SỐ HỌC VỚI HẰNG ĐẲNG THỨC $a^n - b^n$

I. Kiến thức cơ bản

Với $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$ ta có

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (*)$$

Với $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$ **ta có** $a^n - b^n \vdots (a-b)$

Với n **chẵn,** $a \neq -b$ **ta có:** $a^n - b^n = a^n - (-b)^n \vdots (a+b)$

Với n **lẻ,** $a \neq -b$ **ta có:** $a^n + b^n = a^n - (-b)^n \vdots (a+b)$

Ta dùng (*) để giải một số bài toán số học rất nhanh chóng.

II. Một số bài toán minh họa

Dạng toán thường gặp:

Chứng minh chia hết
Tìm số dư
Số chính phương
Bài toán liên quan số nguyên tố
Chứng minh đẳng thức

Câu 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $5^n(5^n+1) - 6^n(3^n+2^n)$ chia hết cho 91.

Lời giải.

Ta có $5^n\left(5^n+1\right) - 6^n\left(3^n+2^n\right) = \left(25^n - 18^n\right) - \left(12^n - 5^n\right)$.

Vì $\left(25^n - 18^n\right) \vdots (25-18)$ và $\left(12^n - 5^n\right) \vdots (12-5)$ nên $5^n\left(5^n+1\right) - 6^n\left(3^n+2^n\right)$ chia hết cho 7.

Lại có $5^n\left(5^n+1\right) - 6^n\left(3^n+2^n\right) = \left(25^n - 12^n\right) - \left(18^n - 5^n\right)$ chia hết cho 13.

Mà $(7,13)=1$ nên $5^n\left(5^n+1\right) - 6^n\left(3^n+2^n\right) \vdots 91$.

Câu 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương chẵn n thì $20^n + 16^n - 3^n - 1$ chia hết cho 323.

Lời giải.

Đặt $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 = 20^n - 1 + 16^n - 3^n$

Ta có $20^n - 1 = (20-1)(20^{n-1} + 20^{n-2} + \cdots + 1)$ chia hết cho 19 với mọi n.

Và n chẵn nên $16^n - 3^n \vdots (16+3)$. Do đó $A \vdots 19$.

Mặt khác $A = 20^n - 3^n + 16^n - 1$

Ta có $20^n - 3^n \vdots (20-3)$

$16^n - 1 \vdots (16+1)$ vì n chẵn. Do đó $A \vdots 17$.

Mà $(17,19)=1$ nên $A \vdots 17.19 = 323$.

Câu 3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n lẻ thì $B = 118^n - 101^n - 16^n - 1$ chia hết cho 3978.

Lời giải.

Ta có

$$B=(118^n-1)-(101^n+16^n)$$
$$\vdots\ 117 \qquad \vdots\ 101+16$$

Suy ra $B \vdots 117 = 9.13$

Mặt khác

$$B=(118^n-16^n)-(101^n+1)$$
$$\vdots\ 118-16 \qquad \vdots\ 101+1$$

Suy ra $B \vdots 102 = 6.17$.

Mà $(9,13,6,17)=1$ nên $B \vdots 2.9.13.17 = 3978$

Câu 4. Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Đặt $m = 2^n - 1$. Chứng minh rằng nếu $2^n - 2 \vdots n$ thì $2^m - 2 \vdots m$.

Lời giải.

Nếu $2^n - 2 \vdots n$ thì $\dfrac{2^n-2}{n}$ là số nguyên dương.

Ta có $2^m - 2 = 2\left(2^{m-1}-1\right) = 2\left(2^{2^n-2}-1\right) = 2\left(2^{n\cdot\frac{2^n-2}{n}}-1\right) = 2\left(\left(2^n\right)^{\frac{2^n-2}{n}}-1\right) \vdots\ 2^n-1,$ (đpcm)

Câu 5. Tìm số dư khi chia $A = 3^{2n} + 3^n + 1$ cho 13 ($n \in \mathbb{N}$).

Lời giải.

Đặt $n = 3k + r$ $(r = 0,1,2;\ k \in \mathbb{N})$.

Ta có $A = 3^{2n} + 3^n + 1 = 9^{3k+r} + 3^{3k+r} + 1 = 9^r(9^{3k}-1) + 3^r(3^{3k}-1) + 9^r + 3^r + 1$.

Vì $(9^{3k}-1) \vdots (9^3-1) \vdots 13$; $(3^{3k}-1) \vdots (3^3-1) \vdots 13$. Do đó ta cần xét $9^r + 3^r + 1 : 13$

* $r = 0 \Rightarrow 9^r + 3^r + 1 = 3$, do đó $A : 13$ dư 3.

* $r = 1 \Rightarrow 9^r + 3^r + 1 = 13$, do đó $A \vdots 13$.

* $r = 2 \Rightarrow 9^r + 3^r + 1 = 91$, do đó $A \vdots 13$.

Tóm lại: $n \not\vdots 3$ thì $A = 3^{2n} + 3^n + 1 \vdots 13$

$n \vdots 3$ thì $A = 3^{2n} + 3^n + 1 : 13$ dư 3.

Câu 6. Cho $A = (10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10 + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$, với $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng A là số chính phương nhưng không là lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải.

Ta có $10^{n+1} - 1 = (10-1)(10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10 + 1)$ nên $10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10 + 1 = \dfrac{1}{9}\left(10^{n+1}-1\right)$

Do đó $A = \dfrac{1}{9}\left(10^{n+1}-1\right)\left(10^{n+1}+5\right) + 1 = \dfrac{1}{9}\left(10^{2n+2} + 4.10^{n+1} + 4\right) = \left(\dfrac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2$

Vì $10^{n+1} + 2 \vdots 3$ (tổng các chữ số chia hết cho 3) nên A là số chính phương.

Lại có $10^{n+1} + 2 = 2\left(5.10^n + 1\right)$ là số chẵn và $5.10^n + 1 \vdots 3$ nên $10^{n+1} + 2 \vdots 6$.

$\dfrac{10^{n+1}+2}{3}$ là số chẵn nên $A = \left(\dfrac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2 \vdots 4$. Lại có $5.10^n + 1$ là số lẻ nên $A = \left(\dfrac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2 \not\vdots 8$

Vậy A không phải là lập phương của một số tự nhiên.

Câu 7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p, không tồn tại hai số nguyên dương x, y sao cho $2^p + 3^p = x^{y+1}$.

Lời giải.

*** Với** $p = 2$ thì $2^p + 3^p = 13$ không viết được dưới dạng x^{y+1} với x, y nguyên dương.

*** Xét** $p \geq 3$, do p là số nguyên tố lẻ nên $2^p + 3^p = (2+3)(2^{p-1} - 2^{p-2}3 + \cdots - 2^1 3^{p-2} + 3^{p-1})$

Suy ra $x^{y+1} \vdots 5 \Rightarrow x \vdots 5$.

Vì y nguyên dương nên $x^{y+1} \vdots 5^2 \Rightarrow (2^{p-1} - 2^{p-2}3 + \cdots - 2^1 3^{p-2} + 3^{p-1}) \vdots 5$. (*)

Ta có $-3 \equiv 2 (mod 5)$ nên (*) suy ra $p.2^{p-1} \vdots 5$

Vế trái của (*) là tổng của p số hạng, vì vậy ta có $p = 5$.

Khi đó $2^p + 3^p = 2^5 + 3^5 = 275 = 5^2.11$ không viết được dưới dạng x^{y+1} với x, y nguyên dương.

Vậy trong mọi trường hợp ta có đpcm.

Câu 8. Xét xem dãy (a_n) xác định bởi $a_n = 2^{2\ldots2} + 5$ (với $n \in \mathbb{N}$, n chữ số 2) có bao nhiêu số nguyên tố.

Lời giải.

$a_1 = 2 + 5 = 7$ là số nguyên tố

Với $n \geq 2$, ta có $a_n = 2^{2k} + 5 = (2^2)^k - 1 + 6 \vdots 3$ mà $a_n > 3$

Vậy với $n \geq 2$ thì $a_n = 2^{2\ldots2} + 5$ hợp số. Do đó dãy đã cho có duy nhất 1 số nguyên tố là 7.

Câu 9. Cho số n và các số nguyên tố đôi một phân biệt $p_1, \ldots, p_n$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p \notin \{2, p_1, \ldots, p_n\}$, số $2^{p_1 \cdots p_n + 1}$ không thể viết được dưới dạng $a^p + b^p$ với a, b là các số nguyên dương.

Lời giải.

Giả sử tồn tại các số nguyên dương a, b sao cho $2^{p_1 \cdots p_n + 1} = a^p + b^p$.

Đặt $a = 2^x t, b = 2^y s$, với $x, y \in \mathbb{N}$ và $t, s \in \mathbb{N}^*$ (t, s lẻ).

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y$.

Ta có $2^{p_1 \cdots p_n + 1} = 2^{px} t^p + 2^{py} s^p = 2^{py}\left[2^{p(x-y)} t^p + s^p\right]$

Nếu $x > y$ thì $2^{p(x-y)} t^p + s^p$ là ước dương lẻ lớn hơn 1 của $2^{p_1 \cdots p_n + 1}$, mâu thuẫn. Do đó $x = y$ và từ đây ta có

$2^{p_1 \cdots p_n + 1 - py} = t^p + s^p$, p lẻ.

Hay $2^{p_1 \cdots p_n + 1 - py} = (t+s)\left(t^{p-1} - t^{p-2}s + \ldots - ts^{p-2} + s^{p-1}\right)$

Tổng $t^{p-1} - t^{p-2}s + \cdots - ts^{p-2} + s^{p-1}$ gồm p số hạng lẻ nên là một số lẻ. Mặt khác, tổng này lại là một lũy thừa của 2, nên ta có $t^{p-1} - t^{p-2}s + \cdots - ts^{p-2} + s^{p-1} = 1$. Suy ra $t^p + s^p = t + s$, đều này xảy ra khi $t = s = 1$. Tức là

$2^{p_1\cdots p_n+1-py}=1+1=2$. Từ đây suy ra $p_1\ldots p_n+1-px=1$ hay $p_1\ldots p_n=py$, do đó $p_1\ldots p_n \vdots p$, mâu thuẫn vì $p\notin\{p_1,\ldots,p_n\}$. Ta có đpcm.

Câu 10. Cho số nguyên tố p và số nguyên dương n. Xét các số nguyên a,b,c thỏa mãn $a^n+pb=b^n+pc=c^n+pa$. Chứng minh rằng $a=b=c.$

Lời giải.

* Từ giả thiết ta có $\begin{cases} a^n-b^n=p(c-b) & (1)\\ b^n-c^n=p(a-c) & (2)\\ c^n-a^n=p(b-a) & (3)\end{cases}$

Trong ba số a,b,c luôn có hai số cùng tính chẵn lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử hai số đó là $a,b.$

Khi đó từ (3) suy ra a^n và c^n cùng tính chẵn lẻ nên c và a cùng tính chẵn lẻ. Tóm lại a,b,c cùng tính chẵn lẻ.

* Giả sử trong ba số a,b,c có ít nhất hai số khác nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\neq b.$ Khi đó từ (3) suy ra $c\neq a$. Từ đó, kết hợp (2) ta có $b\neq c$. Vậy a,b,c đôi một phân biệt.

* Từ (1), (2), (3) ta suy ra $\dfrac{a^n-b^n}{a-b}\cdot\dfrac{b^n-c^n}{b-c}\cdot\dfrac{c^n-a^n}{c-a}=-p^3$ (4)

\+ Nếu n lẻ thì a^n-b^n và $a-b$ cùng dấu nên $\dfrac{a^n-b^n}{a-b}>0$. Tương tự $\dfrac{b^n-c^n}{b-c}>0,\ \dfrac{c^n-a^n}{c-a}>0$. Vì thế (4) không xảy ra.

\+ Nếu n chẵn thì $a^n-b^n=a^{2k}-b^{2k}=(a^2-b^2)C$ với $C\in\mathbb{Z}$.

Tương tự cũng tồn tại các số A,B sao cho $b^n-c^n=(b^2-c^2)A,\ c^n-a^n=(c^2-a^2)B$.

Thay vào (4) ta được.

Do a,b,c cùng tính chẵn lẻ nên $(a+b)(b+c)(c+a)\vdots 2$, suy ra $p\vdots 2\Rightarrow p=2$.

Đẳng thức trên được viết thành $(a+b)(b+c)(c+a)ABC=-8$.

Do $a+b,\ b+c,\ c+a$ là các số chẵn nên từ đẳng thức trên ta thấy $a+b,\ b+c$ và $c+a$ sẽ nhận một trong hai giá trị là 2 và -2. Do đó trong ba số $a+b,\ b+c,\ c+a$ sẽ có hai số bằng nhau.

- Nếu $a+b=b+c$ thì $a=c$, mâu thuẫn.
- Nếu $b+c=c+a$ thì $a=b$, mâu thuẫn.
- Nếu $c+a=a+b$ thì $b=c$, mâu thuẫn.

Từ các mâu thuẫn trên ta suy ra đpcm.

Câu 11. Với mỗi số nguyên tố $p>2$, đặt $A=(2+3)-(2^2+3^2)+(2^3+3^3)-\cdots+(2^p+3^p)$. Tìm điều kiện của p để A chia hết cho 5.

Lời giải.

Vì $2^n+3^n\vdots 5$ với mọi $n\in\mathbb{N}$, n lẻ. Nên $A\vdots 5\Leftrightarrow(2^2+3^2)+(2^4+3^4)+\cdots+(2^{p-1}+3^{p-1})\vdots 5$

Ta lại có $2^4\equiv 1\ (mod\,5), 3^4\equiv 1\ (mod\,5)$ nên

$\left(2^{4n+2}+3^{4n+2}\right)+\left(2^{4n+4}+3^{4n+4}\right)\equiv 2^2+3^2+1+1\equiv 0\,(mod\,5)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

* Nếu $p=4k+1,\ k\in\mathbb{N}^*$ thì $(2^2+3^2)+(2^4+3^4)+\cdots+(2^{4k}+3^{4k})\equiv 0\,(mod\,5)$

* Nếu $p=4k+3,\ k\in\mathbb{N}^*$ thì

$$(2^2+3^2)+(2^4+3^4)+\cdots+(2^{4k+2}+3^{4k+2}) \equiv (2^{4k+2}+3^{4k+2})$$
$$\equiv 2^2+3^2 \equiv 3 \ (mod\,5)$$

Vậy tổng chia hết cho 5 khi và chỉ khi $p \equiv 1 \ (mod\,4)$.

Câu 12. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta có $A = 1^5 + 2^5 + ... + n^5$ chia hết cho $B = 1 + 2 + ... + n$.

Lời giải.

Ta có $2B = n(n+1)$.

Mặt khác sử dụng tính chất $a^k + b^k \vdots (a+b)$ với mọi số nguyên dương *a*, *b* và *k* lẻ, ta có

$2A = (1^5 + n^5) + (2^5 + (n-1)^5) + ... + (n^5 + 1^5) \vdots (n+1)$, do mỗi số hạng đều chia hết cho $(n+1)$

$2A = (1^5 + (n-1)^5) + (2^5 + (n-2)^5) + ... + ((n-1)^5 + 1^5) + 2n^5 \vdots n$

Do $(n,\ n+1) = 1$ nên $2A \vdots n(n+1)$. Suy ra $A \vdots B$.

Câu 13. Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương thì $2(1^{2023} + 2^{2023} + ... + n^{2023})$ chia hết cho $n(n+1)$

Lời giải.

Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương thì $2(1^{2023} + 2^{2023} + ... + n^{2023})$ chia hết cho $n(n+1)$.

Nhận xét. Nếu a, b là hai số nguyên dương thì $a^{2023} + b^{2023} \vdots (a+b)$.

Khi đó ta có

$2(1^{2023} + 2^{2023} + ... + n^{2023}) = (1^{2023} + n^{2023}) + (2^{2023} + (n-1)^{2023}) + ... + (n^{2023} + 1^{2023}) \vdots (n+1)\ (1)$

Mặt khác

$2(1^{2023} + 2^{2023} + ... + n^{2023})$

$= (1^{2023} + (n-1)^{2023}) + (2^{2023} + (n-2)^{2023}) + ... + ((n-1)^{2023} + 1^{2023}) + 2.n^{2023} \vdots n \quad (2)$

Do $(n, n+1) = 1$ và kết hợp với (1), (2) ta được $2(1^{2023} + 2^{2023} + ... + n^{2023})$ chia hết cho $n(n+1)$.

ĐỔI Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương lẻ thì

$B = 2(1^n + 2^n + ... + 2022^n) \vdots 2022.2023$ chia hết cho $n(n+1) = 2022.2023$.

Câu 14. Chứng minh rằng $13^n.2 + 7^n.5 + 26$ không thể là số chính phương ($n \in \mathbb{N}$).

Lời giải.

Đặt $n = 3k + r \ (r = 0,1,2;\ k \in \mathbb{N})$.

Ta có $A = 13^n.2 + 7^n.5 + 26 = 13^{3k+r}.2 + 7^{3k+r}.5 + 26$.

$= 13^r.2197^k.2 + 243^k.7^r.5 + 26$

$= 2.13^r.(2197^k - 1^k) + 5.7^r.(343^k - 1^k) + 2.13^r + 5.7^k + 26$

Ta có $(2197^k - 1^k) \vdots (2197 - 1)$; $(343^k - 1^k) \vdots (343^k - 1^k) \vdots 9$

* $r = 0 \Rightarrow 2.13^r + 5.7^r + 26 = 33$. Ta có $33 \vdots 3$ và $33 \not\vdots 9$.

* $r=1 \Rightarrow 2.13^r+5.7^r+26=87 \vdots 3$, mà $87 \not\vdots 9$.

* $r=2 \Rightarrow 2.13^r+5.7^r+26=609 \vdots 3$, mà $609 \not\vdots 9$.

Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}$ số $13^n.2+7^n.5+26 \vdots 3$ mà không chia hết cho 9 nên nó không thể là số chính phương.

III. Một số bài tập tương tự

………………..