**ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC**

*Hình học phẳng*

**A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM**

**1. Định nghĩa**

* Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

.

* Mỗi tam giác có ba đường trung bình.

**2. Tính chất**

* Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng một nửa cạnh ấy.

Theo hình bên,

 là đường trung bình của 

**3. Định lý đường trung bình của tam giác**

* Trong một tam giác, nếu một đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba của tam giác đó.

.

**B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

|  |
| --- |
| Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng |
| * Dựa vào tính chất đường trung bình của tam giác để tính độ dài đoạn thẳng. |

**Ví dụ 1.** Tìm độ dài  trong các hình sau

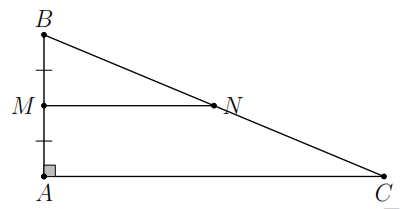
 

a) b)

*Lời giải*

|  |  |
| --- | --- |
| a) Xét tam giác ABC, ta có   * M là trung điểm của AB; * N là trung điểm của AC.   là đường trung bình của .  . | b) Xét tam giác ABC, ta có   * M là trung điểm của AB; * N là trung điểm của AC.   là đường trung bình của .  . |

**Ví dụ 2.** Cho tam giác  vuông tại , , . Qua trung điểm  của , vẽ một đường thẳng song song với  cắt  tại . Tính độ dài .

*Lời giải*

Xét  có  và  nên . Do đó,  là đường trung bình. Suy ra .

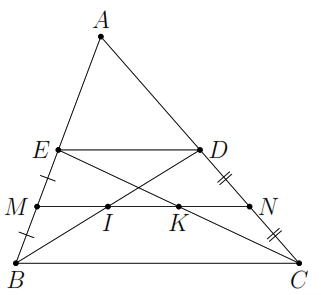
Vì  vuông tại  nên

 .

Vậy .

|  |
| --- |
| Dạng 2: Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau; hai đường thẳng song song. |
| * Sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác. * Sử dụng dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song, hai đoạn thẳng bằng nhau như đã học ở lớp 7. |

**Ví dụ 3.** Cho tam giác , các đường trung tuyến , . Gọi ,  theo thứ tự là trung điểm của  và . Gọi ,  theo thứ tự là giao điểm của  với  và . Chứng minh .

*Lời giải*

Xét  có .

Xét  có .

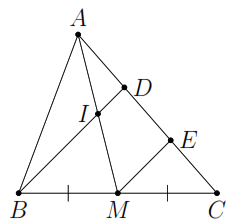
Suy ra ; ; .

.

Vậy .

**Ví dụ 4.** Cho tam giác , điểm ,  thuộc  sao cho . Gọi  là trung điểm của ,  là giao điểm của  và . Chứng minh :

a) ; b) .

*Lời giải*

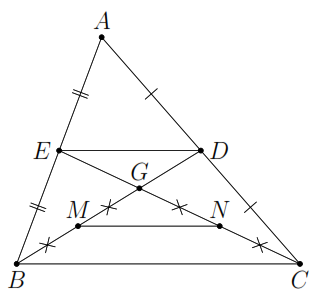
a) Xét  có .

b) Xét  có .

**Ví dụ 5.** Cho tam giác , các đường trung tuyến ,  cắt nhau tại . Gọi ,  lần lượt là trung điểm , . Chứng minh tứ giác  có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

*Lời giải*

Xét  có 

 Xét  có 

Từ  và .

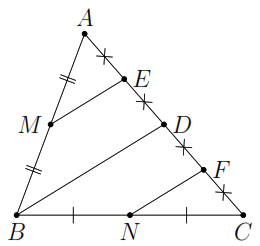
Xét  có 

Xét  có 

Từ  và .

Vậy tứ giác  có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

**Ví dụ 6.** Cho  là đường trung tuyến của tam giác ,  là trung điểm của đoạn thẳng ,  là trung điểm đoạn thẳng ,  là trung điểm cạnh ,  là trung điểm cạnh . Chứng minh  và .

*Lời giải*

Xét  có .

Xét  có .

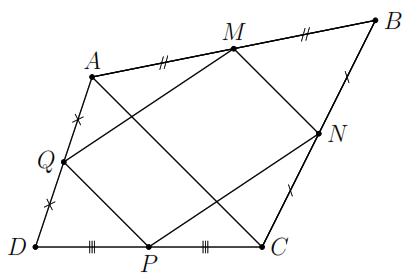
Từ  và 

|  |
| --- |
| Dạng 3: Sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác để chứng minh tứ giác hình thoi; hình bình hành; hình chữ nhật; hình vuông. |
| * Vận dụng định nghĩa, tính chất và định lý đường trung bình của tam giác để chứng minh bài toán liên quan. |

**Ví dụ 5.** Cho tứ giác . Gọi , , ,  lần lượt là trung điểm của các cạnh , , , . Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

*Lời giải*

Xét tam giác  có  là đường trung bình



Xét tam giác  có  là đường trung bình

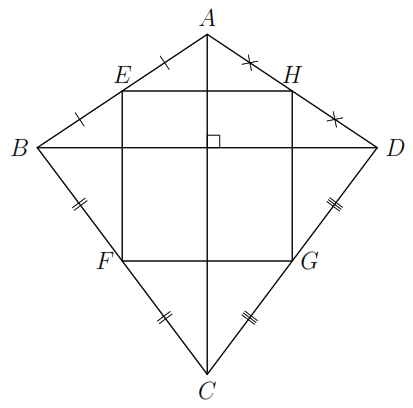


Từ  và  suy ra 

 Tứ giác  là hình bình hành.

**Ví dụ 6.** Cho tứ giác  có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi , , ,  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh , , , . Chứng minh tứ giác  là hình chữ nhật.

*Lời giải*

Xét  có EH là đường trung bình.

  và . (1)

Xét  có  là đường trung bình.

  và . (2)

Từ (1) và (2)   là hình bình hành.(3)

Xét  có  là đường trung bình.

  .

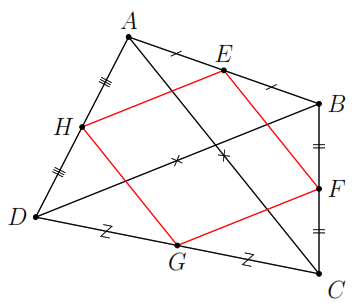
Mà  và 

 . (4)

Từ (3) và (4)   là hình chữ nhật.

**Ví dụ 7.** Cho tứ giác  có , gọi , , ,  lần lượt là trung điểm các cạnh , , , . Chứng minh rằng  là hình thoi.

*Lời giải*

 có  là đường trung bình nên .

Hoàn toàn tương tự, xét các tam giác , , , ta được

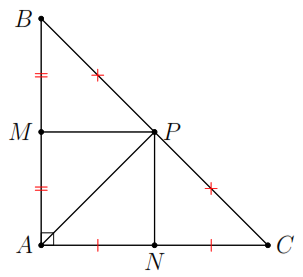


Lại có  nên .

Do đó  là hình thoi.

**Ví dụ 8.** Cho tam giác  vuông cân tại . Gọi ,  là trung điểm , . Qua  kẻ đường thẳng song song  và cắt  tại . Chứng minh rằng  là hình vuông.

*Lời giải*

**Ta có  là trung điểm của ,    là đường trung bình của    là trung điểm của .

Mà  là trung điểm của    là đường trung bình của      là hình bình hành.

Mà  là hình chữ nhật. Mà    là hình vuông.

|  |
| --- |
| Dạng 4: Bài toán thực tế liên quan đường trung bình tam giác. |
| * Vận dụng định nghĩa, tính chất và định lý đường trung bình giải quyêt bài toán liên quan. |

**Ví dụ 9.**

Khi thiết kế một cái thang gấp, để đảm bảo an toàn người thợ đã làm thêm một thanh ngang để giữ cố định ở chính giữa hai bên thang *(như hình vẽ bên)* sao cho hai chân thang rộng một khoảng là 80 cm. Hỏi người thợ đã làm thanh ngang đó dài bao nhiêu cm ?

*Lời giải*

Gọi MN là thanh ngang ; BC là độ rộng giữa hai bên thang.

MN nằm chính giữa thang nên M; N là trung điểm AB và AC.

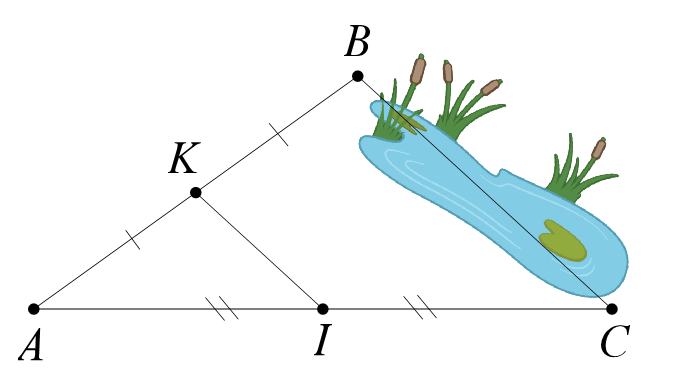
Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ABC.

Suy ra MN = .

Vậy người thợ đã làm thanh ngang đó dài 40 cm.

**Ví dụ 10.**

Giữa hai điểm  và  bị ngăn cách bởi hồ nước *(như hình dưới).* Hãy xác định độ dài  mà không cần phải bơi qua hồ. Biết rằng đoạn thẳng  dài  và  là trung điểm của ,  là trung điểm của .



*Lời giải*

Xét tam giác ABC, có:

K là trung điểm AB

I là trung điểm AC

KI là đường trung bình của tam giác ABC

Hay 



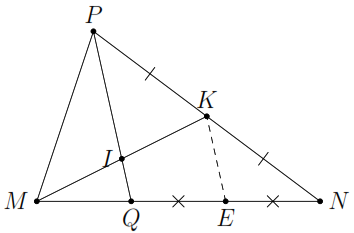
**C. BÀI TẬP VẬN DỤNG**

**Bài 1.** Cho tam giác ,  là trung điểm ,  là một điểm nằm trên cạnh  sao cho . Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh  là trung điểm của .

**Lời giải**

Gọi  là trung điểm  và  là trung điểm .

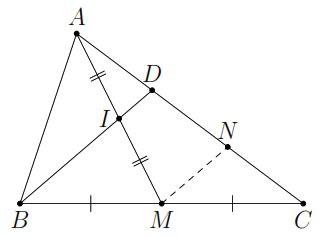
 là đường trung bình của  là trung điểm của .



**Bài 2.** Cho tam giác , trung tuyến . Gọi  là trung điểm ,  là giao điểm của  và .

a) Chứng minh ; b) So sánh độ dài  và .

**Lời giải**

a) Kẻ , .

 là đường trung bình trong 

 là trung điểm của .

 là đường trung bình trong 

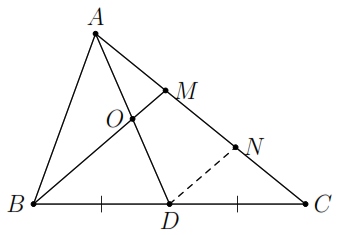
 là trung điểm của .

Từ  và  suy ra .

Có ; , nên .

**Bài 3:** Cho tam giác , đường trung tuyến . Gọi  là một điểm trên cạnh  sao cho . Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh rằng

a)  là trung điểm của . b) .

**Lời giải**

a) Qua  vẽ một đường thẳng song song với  cắt  tại .

Xét  có  và  nên

 (định lý đường trung bình của tam giác).

Mặt khác , do đó .

Xét  có  và  nên  hay O là trung điểm của AD.

b) Xét  có  là đường trung bình nên . (1)

Xét  có  là đường trung bình nên . (2)

Từ (1) và (2) suy ra .

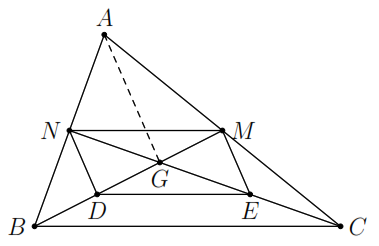
**Bài 4.** Cho tam giác , hai đường trung tuyến  và  cắt nhau tại . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và . Chứng minh rằng

a) . b) .

**Lời giải**

a) Vì ,  là các đường trung tuyến của  nên , .

Do đó  là đường trung bình của , suy ra . (1)

Ta có  là đường trung bình của  nên . (2)

Từ (1) và (2) suy ra .

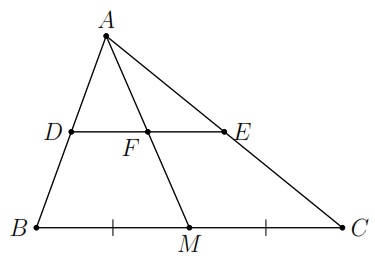
b) Xét , ta có  là đường trung bình.

Xét , ta có  là đường trung bình. Do đó , . Suy ra .

**Bài 5.** Cho tam giác , đường trung tuyến . Gọi , ,  lần lượt là trung điểm của ,  và . Chứng minh rằng

a) Ba điểm , ,  thẳng hàng. b)  là trung điểm của .

**Lời giải**

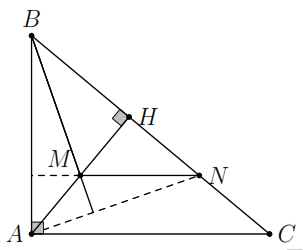
a) Xét  có  là đường trung bình nên  hay . (1)

Xét  có  là đường trung bình nên , (2)

Từ (1) và (2) suy ra , ,  thẳng hàng.

b) Chứng minh  (bằng  của hai đoạn thẳng bằng nhau).

**Bài 6.** Cho tam giác  vuông tại , đường cao . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và . Chứng minh rằng .

**Lời giải**

Xét  có  là đường trung bình nên  .

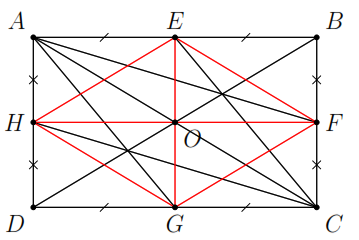
Xét  có  và  là hai đường cao cắt nhau tại .

Do đó 

**Bài 7.** Cho hình chữ nhật . Gọi , , ,  lần lượt là trung điểm của , , , . Chứng minh:

a)  là hình thoi. b) , , ,  đồng quy.

**Lời giải**

a)  có  là đường trung bình nên  và .

 có  là đường trung bình nên  và .

Suy ra  và . Do đó  là hình bình hành.

Hơn nữa,  có  là đường trung bình nên .

Mà  (hình chữ nhật ) nên , suy ra  là hình thoi.

b) Vì  là hình chữ nhật nên  và .

Do đó tứ giác  là hình bình hành.

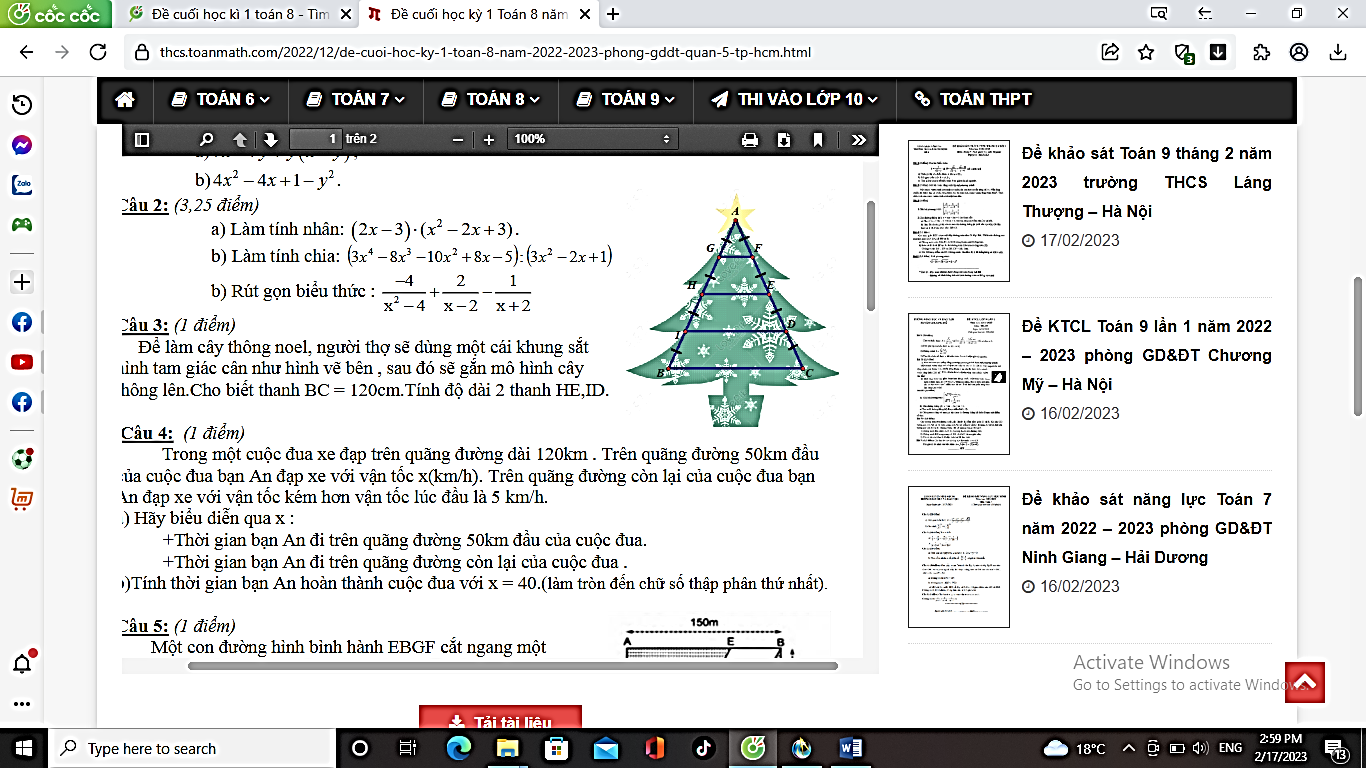
Mà  là trung điểm của đường chéo  (trong hình chữ nhật ).

Nên  cũng là trung điểm của đường chéo .

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được  là hình bình hành.

Và suy ra  cũng là trung điểm của đường chéo .

Vậy , , ,  đồng quy tại .

**Bài 8.**

Để làm cây thông noel, người thợ sẽ dùng một cái khung sắt hình tam giác cân như hình vẽ bên, sau đó gắn mô hình cây thông lên. Cho biết thanh BC = 120cm. Tính độ dài các thanh GF; HE; ID.

**Bài 9.** Để thiết kế mặt tiền cho căn nhà cấp bốn mái thái, sau khi xác định chiều dài mái PQ = 1,5m. Chú thợ nhẩm tính chiều dài mái DE biết Q là trung điểm EC, P là trung điểm của DC. Em hãy tính giúp chú thợ xem chiều dài mái DE bằng bao nhiêu *(xem hình vẽ minh họa)* ?

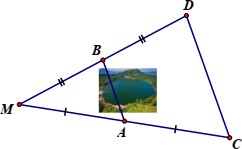


**Lời giải**

Vì Q là trung điểm EC, P là trung điểm của DC nên PQ là đường trung bình của tam giác CDE



Vậy chiều dài mái DE bằng 3m

**Bài 10.**

a/ Giữa 2 điểm A và B là một hồ nước. Biết A, B lần lượt là trung điểm của MC và MD *(như hình vẽ).* Bạn Mai đi từ C đến D hết 120 bước chân, trung bình mỗi bước chân của Mai đi được 4dm.

Hỏi khoảng cách từ A đến B là bao nhiêu mét?

**Lời giải**

AB là đường trung bình của ΔMCD

AB =  CD = > AB = 60 (bước chân)

Khoảng cách từ A đến B là: 60 . 4 = 240 ( dm) = 24m.

b/ Để đo khoảng cách hai điểm B và C bị chắn bởi 1 cái hồ sâu, người ta thực hiện đo như *hình 1*. Biết khoảng cách giữa hai điểm D và E đo được là 53m. Hỏi B và C cách nhau bao nhiêu m ?

|  |  |
| --- | --- |
| Hình 1 | Hình 2 |

c/ Để đo khoảng cách giữa hai điểm A và B bị ngăn cách bởi một hồ nước người ta đóng các cọc tại các vị trí A, B, M, N, O như hình 2 và đo được . Tính khoảng cách AB biết M, N lần lượt là điểm chính giữa OA và OB.

**Bài 11.**

Toán thực tế đường trung bình: Nhà tâm lý học Abraham Maslow (1908 – 1970) được xem như một trong những người tiên phong trong trường phái Tâm lý học nhân văn. Năm 1943, ông đã phát triển Lý thuyết về Thang bậc nhu cầu của con người *(như hình vẽ bên).* Trong đó, BK = 6cm. Hãy tính đoạn thẳng CJ; EH?

Chart, line chart

Description automatically generated

**Bài 12.**

Để đo khoảng cách giữa hai điểm  và  bị ngăn cách bởi một hồ nước người ta đóng các cọc ở vị trí  như hình vẽ. Người ta đo được . Tính khoảng cách giữa hai điểm  và .

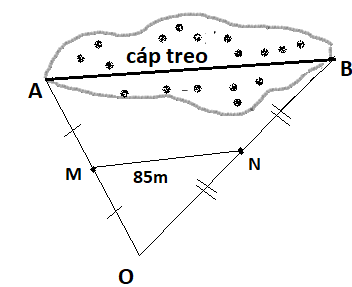


**Lời giải**

\* C/m:  là đường trung bình 

\* 



**Bài 13.** Một cáp treo di chuyển giữa hai địa điểm A và B của một hồ nước (hình bên). Biết M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB và MN = 85m. Hỏi quãng đường di chuyển của cáp treo từ A sang B dài bao nhiêu mét?

**Lời giải**

Vì M, N lần lượt là trung điểm của OA và OB.

Nên MN là đường trung bình của tam giác OAB

Suya ra AB = 2. MN = 2. 85 = 170m

**Bài 14.** Giữa 2 điểm A và N là một một hồ nước sâu. Để tính khoảng cách giữa 2 điểm A và N, một học sinh đã lấy M làm mốc và lấy H, G lần lượt là trung điểm của MA, MN.



a)Chứng minh HG là đường trung bình.

b)Hỏi A và N cách nhau bao nhiêu mét. Biết khoảng cách giữa 2 điểm H và G là 62m.

**Lời giải**

Xét AMN ta có:

H là trung điểm AM(gt)

G là trung điểm MN(gt)

HG là đường trung bình AMN



Vậy AN=124m

**Bài 15.** Người ta xây dựng mô hình như hình dưới để đo bề rộng MN của một cái hồ nước mà không cần phải đo trực tiếp. Em hãy tính xem độ rộng của hồ nước trong hình vẽ là bao nhiêu?



**Lời giải**

Xét ΔAMN, Ta có:

B là trung điểm của AM

C là trung điểm của AN

⇒ BC là đường trung bình của ΔAMN





Vậy độ rộng của hồ nước là 80 (m)