Tailieumontoan.com

Sưu tầm và tổng hợp

BỘ ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

CẤP TỈNH MÔN TOÁN LỚP 9

Thanh Hóa, ngày 8 tháng 3 năm 2020

50 ĐỀ HỌC SINH GIỎI
MÔN TOÁN LỚP 9 CẤP TỈNH

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh luyện thi học sinh giỏi môn toán lớp 9, website tailieumontoan.com giới thiệu đến thầy cô và các em bộ đề thi học sinh giỏi toán lớp 9 của các tỉnh trên cả nước có hướng dẫn giải cụ thể. Đây là bộ đề thi mang tính chất thực tiễn cao, giúp các thầy cô và các em học sinh luyện thi học sinh giỏi lớp 9 có một tài liệu bám sát đề thi để đạt được thành tích cao, mang lại vinh dự cho bản thân, gia đình và nhà trường. Bộ đề gồm nhiều Câu toán hay được các thầy cô trên cả nước sưu tầm và sáng tác, ôn luyện qua sẽ giúp các em phát triển tư duy môn toán từ đó thêm yêu thích và học giỏi môn học này, tạo được nền tảng để có những kiến thức nền tốt đáp ứng cho việc tiếp nhận kiến thức ở các lớp, cấp học trên được nhẹ nhàng và hiệu quả hơn.

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng có thể dùng tuyển tập đề toán này để giúp con em mình học tập. Hy vọng Tuyển tập 50 đề thi học sinh giỏi lớp 9 cấp tỉnh này sẽ có thể giúp ích nhiều cho học sinh phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Bộ đề này được viết theo hình thức Bộ đề ôn thi, gồm: đề thi và hướng dẫn giải đề ngay dưới đề thi đó dựa trên các đề thi chính thức đã từng được sử dụng trong các kì thi học sinh giỏi toán lớp 9 ở các tỉnh trên cả nước.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian, trí tuệ song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ bộ đề này!

MỤC LỤC

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐIỆN BIÊN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 1
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 09/4/2019
Thời gian làm bài 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(5,0 điểm)*

1. Cho biểu thức $P=\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để biểu thức $Q=\sqrt{x}-P$ nhận giá trị nguyên.

2. Cho $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(2y+\sqrt{4y^2+1}\right)=1$. Tính giá trị biểu thức x^3+8y^3+2019.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình: $2x^2+x+3=3x\sqrt{x+3}$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-\dfrac{6}{y}=2 \\ 3x-\dfrac{8}{y^3}=-2. \end{cases}$

Câu 3. *(3,0 điểm)*

1. Chứng minh: $\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=5x^2+9y^2-12xy+24x-48y+82$.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

1. Cho ΔABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Kẻ các đường cao BE, CF của ΔABC $(E\in AC; F\in AB)$. Các đường cao BE, CF cắt (O) lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh rằng MN song song với EF; OA vuông góc với EF.

b) Gọi H là trực tâm của ΔABC. Chứng minh rằng: $CH.CF+BH.BE=BC^2$.

2. Cho điểm O thuộc miền trong của ΔABC. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh của BC, AC, AB lần lượt tại G, E, F. Chứng minh tổng $\frac{OA}{AG}+\frac{OB}{BE}+\frac{OC}{CF}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm O.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

1. Chứng minh rằng $P=x^3-3x^2-3x+3$ là một số chính phương khi $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

2. Tìm $x,y\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn: $x^2-2y^2=5$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH LẠNG SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 2

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 23/3/2019
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4 điểm)*

Cho biểu thức $A=\dfrac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ với $x\ge 0;\ x\ne 9$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

Câu 2. *(4 điểm)*

Cho phương trình $x^2-2(m+4)x+m^2+8m-9=0$.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

b) Tìm m nguyên dương để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ sao cho $P=\dfrac{x_1^2+x_2^2-60}{x_1+x_2}$ đạt giá trị nguyên.

Câu 3. *(4 điểm)*

a) Giải phương trình $x-4\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{\sqrt{x}}+5=0$.

b) Tìm tất cả các cặp $(x;y)$ nguyên thỏa mãn $x^2y^2+(x-2)^2+(2y-2)^2-2xy(x+2y-4)=5$.

Câu 4. *(6 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp trong đường tròn (O), các đường cao BE, CF cắt nhau tại H $(E\in AC, F\in AB)$.

a) Gọi $K=EF\cap BC$, $L=AK\cap(O)$ với $L\ne A$. Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp và $HL\perp AK$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng HL đi qua trung điểm của BC.

c) Gọi T là điểm trên đoạn thẳng FC sao cho $\widehat{ATB}=90^0$. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp hai tam giác KLT và CET tiếp xúc với nhau.

Câu 5. *(2 điểm)*

Cho đa giác đều 30 đỉnh. Chứng minh rằng trong các đỉnh đó, bất kì một bộ gồm có 9 đỉnh nào đều chứa 4 đỉnh tạo nên một hình thang cân.

____________________**Hết**____________________

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NGHỆ AN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 3

(Đề thi có một trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn thi: TOÁN - BẢNG A
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(3,0 điểm)*

a. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2y^2 - xy + x - 2y + 5 = 0$.

b. Chứng minh rằng $A = 2^{2^n} + 4^n + 16$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương *n*.

Câu 2. *(6,5 điểm)*

a. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3} = \dfrac{8x^3+4x}{2x+5}$.

b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1 \\ (x-1)(y-3) - x - y = -3.\end{cases}$

Câu 3. *(2,5 điểm)*

Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(\frac{a}{a+b}\right)^4 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^4 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^4.$$

Câu 4. *(6,0 điểm)*

1. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A, B, C của tam giác. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ nhất M (M khác phía với O so với đường thẳng AB), đường thẳng BM cắt đường thẳng DF tại N. Chứng minh rằng:

a. EF $\perp$ OA.

b. AM = AN.

2. Cho tam giác nhọn ABC, D là điểm trong tam giác đó sao cho $ADB = ACB + 90^0$ và AC.BD = AD.BC. Chứng minh $\dfrac{AB.CD}{AC.BD} = \sqrt{2}$.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Trong hình vuông cạnh bằng 1 có 2019 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng $\dfrac{1}{91}$ nằm trong hình vuông đó mà không chứa điểm nào trong 2019 điểm đã cho.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 4
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 14/3/2019
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(2.5 điểm)*

a. Cho biểu thức $A=\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{3}{x\sqrt{x}+1}+\frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$ với $x \ge 0$. Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của *A*.

b. Không dùng máy tính cầm tay, hãy rút gọn biểu thức

$$B=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Câu 2. *(2.0 điểm)*

a. Xác định các hệ số *a* và *b* để đa thức $P(x)=x^4-2x^3+3x^2+ax+b$ là bình phương của một đa thức.

b. Giải phương trình: $\sqrt{3-4x}+\sqrt{4x+1}=-16x^2-8x+1$ (1).

Câu 3. *(2,5 điểm)*

Cho đường tròn (O) và dây cung $BC=a$ không đổi ($O \notin BC$). *A* là một điểm di động trên cung lớn *BC* sao cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn. Các đường cao *AD, BE, CK* cắt nhau tại *H* ($D\in BC, E\in AC, K\in AB$).

a. Trong trường hợp $BHC=BOC$, tính *AH* theo *a*.

b. Trong trường hợp bất kì, tìm vị trí của *A* để tích *DH.DA* nhận giá trị lớn nhất.

Câu 4. *(1.0 điểm)*

Tìm tất cả các số tự nhiên *n* sao cho $C=2019^n+2020$ là số chính phương.

Câu 5. *(1.0 điểm).*

Cho ba số thực dương *x, y, z* thỏa mãn $x+y+z+2=xyz$. Chứng minh rằng:

$$x+y+z+6\ge 2\left(\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}\right).$$

Câu 6. *(1.0 điểm)*

Cho tam giác vuông *ABC* có $AB=3, AC=4, BC=5$. Xét các hình chữ nhật *MNPQ* sao cho *M, N* thuộc cạnh *BC*, *P* thuộc cạnh *AC*, *Q* thuộc cạnh *AB*. Hãy xác định các kích thước của hình chữ nhật *MNPQ* để nó có diện tích lớn nhất.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐỒNG NAI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 5
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 29/3/2019
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,5 điểm)*

1) Cho (x, y) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-y=m+1 \\ 2x-3y=m+3 \end{cases}$ (với m là tham số thực).

   Tìm m để biểu thức $P=x^2+8y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^3-y^3=-1 \end{cases}$ (với x, y thuộc R).

Câu 2. *(4,5 điểm)*

1) Giải phương trình $x^4-9x^3+24x^2-27x+9=0$ $(x\in R)$
2) Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh:

   $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\ge 4\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)$

Câu 3. *(4,5 điểm)*

1) Cho a, b, c là ba số nguyên khác 0 thỏa $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng: abc chia hết cho 4.

2) Tìm số các số nguyên dương không vượt quá 1000 nguyên tố cùng nhau với 999.

Câu 4. *(2 điểm)*

Cho $A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\frac{99}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ là tổng của 99 số hạng và

$B=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+...+\sqrt{100}$ là tổng của 99 số hạng.

Tính A + B

Câu 5. *(4,5 điểm)*

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E lần lượt là hai tiếp điểm của AB, AC với đường tròn (I). Biết ba góc BAC, ABC, BCA, đều là góc nhọn. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai đoạn BC và AC.

1) Chứng minh: 2AD = AB + AC – BC
2) Chứng minh rằng ba đường thẳng BI, DE, MN đồng quy.

__________________**Hết**__________________

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 6

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH

LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019

MÔN THI: TOÁN

Ngày thi: 22/3/2019

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\frac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\frac{x-5}{x-\sqrt{x}-2}\right)$, với $x>0, x\neq 4$.

2. Cho $a=\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$, $b=\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$. Không dùng máy tính, hãy chứng minh các biểu thức $M=a+b$ và $N=a^7+b^7$ có giá trị đều là số chẵn.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2+2kx+4=0$ (k là tham số). Tìm tất cả các giá trị của k sao cho : $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2\leq 3$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=2y+1 \\ y+\sqrt{y^2+1}=2x+1 \end{cases}$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y^2\left(x+y\right)+x=2+y\left(x-1\right)$

2. Cho $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng nếu $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương thì n chia hết cho 40.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho đường tròn $\left(O,R\right)$ và một điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn, $OA=2R$. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O)(B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng OA cắt dây BC tại I. Gọi M là điểm di động trên cung nhỏ BC. Tiếp tuyến tại M của đường tròn $\left(O\right)$ cắt AB, AC lần lượt ở E, F. Dây BC cắt OE, OF lần lượt tại các điểm P, Q

1. Chứng minh $ABI=60^0$ và tứ giác $OBEQ$ nội tiếp.

2. Chứng minh $EF=2PQ$.

3. Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ BC sao cho tam giác OPQ có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích nhỏ nhất đó theo R.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y-z+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{x^3y^3}{\left(x+yz\right)\left(y+xz\right)\left(z+xy\right)^2}$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÌNH PHƯỚC

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 06/3/2019
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 7
(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(5.0 điểm)*

1. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}}+\dfrac{x+8}{\left(3-\sqrt{x-1}\right)\left(3+\sqrt{x-1}\right)}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x-1}+1}{x-1-3\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$.

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|$.

2. Cho x,y là các số thực thỏa mãn: $x+y=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=2x^4+x^3\left(2y-1\right)+y^3\left(2x-1\right)+2y^4$.

Câu 2. *(5.0 điểm)*

1. Giải phương trình: $\sqrt{3x+5}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x}-\sqrt{2x-3}$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy-2x+y=6 \\ \left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=8 \end{cases}$

3. Cho hàm số $\left(P\right):y=x^2$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng $\left(d\right):y=2x+m-1$ cắt đồ thị hàm số $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1;y_1\right),B\left(x_2;y_2\right)$ thỏa mãn $y_1.y_2-x_1.x_2=12$.

Câu 3. *(5.0 điểm)*

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$, D là một điểm trên cạnh AB, $\left(D\neq A,B\right)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CB,CA. Đường thẳng MN cắt $\left(O\right)$ tại hai điểm P,Q (P,Q lần lượt thuộc cung CB và CA). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt BC tại I $\left(I\neq B\right)$. Các đường thẳng DI và AC cắt nhau tại K.

a) Chứng minh tứ giác $CIPK$ nội tiếp.

b) Chứng minh $PK.QC=QB.PD$.

c) Đường thẳng AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G $\left(G\neq P\right)$. Đường thẳng IG cắt BA tại E. Chứng minh rằng khi D di chuyển trên BA thì $\dfrac{AD}{AE}$ không đổi.

Câu 4. *(2.0 điểm)*

Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=a,AD=b$. Trên các cạnh AD,AB,BC,CD lần lượt lấy các điểm E,F,G,H sao cho luôn tạo thành tứ giác $EFGH$. Gọi c là chu vi của tứ giác $EFGH$. Chứng minh $c\geq 2\sqrt{a^2+b^2}$.

Câu 5. *(3.0 điểm)*

1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $4y^4+6y^2-1=x$.

2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n chẵn thì: $n^3+20n+96$ chia hết cho 48.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH SƠN LA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 8
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 18/3/2019
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(3,0 điểm)*

Cho biểu thức: $A = \frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4}$

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+3m-3=0 \quad (1)$

a) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn biểu thức $M = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 5x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Câu 3. *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\frac{2x}{2x^2-5x+3} + \frac{13x}{2x^2+x+3} = 6$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 \\ 8y^2+x^2=12 \end{cases}$

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua B và C (O không nằm trên đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

a) Chứng minh 4 điểm O, M, N, I cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

c) Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho hình vuông ABCD và 2019 đường thẳng phân biệt thỏa mãn: mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông và chia hình vuông thành 2 phần có tỷ số diện tích là $\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng: trong 2019 đường thẳng trên có ít nhất 505 đường thẳng đồng qui.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NINH BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 9

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 13/3/2019
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Gọi x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của phương trình $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$. Tính giá trị biểu thức $S = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$.

2. Rút gọn biểu thức $A = \left(1 - \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9}\right) : \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6}\right)$ với $x \ge 0$, $x \ne 4$, $x \ne 9$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(y - 2x)(1 - y - x) = 2x^2 - x \\ x(y - 1) + \sqrt[3]{x^2 - y} = 2\end{cases}$.

2. Giải phương trình $x^2 + x + 24 - 2x\sqrt{2x + 3} = 6\sqrt{12 - x}$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2y^2 - x^2 + 5y^2 - 22x - 121 = 0$.

2. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2019$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{3}{4xy} + \frac{3}{4yz} + \frac{3}{4zx}$.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

1. Qua điểm M nằm trong tam giác ABC kẻ $DK // AB$, $EF // AC$, $PQ // BC$ ($E, P \in AB$; $K, F \in BC$; $D, Q \in CA$). Biết diện tích các tam giác MPE, MQD, MKF lần lượt là x^2, y^2, z^2 với x, y, z là các số thực dương. Tính diện tích tam giác ABC theo x, y, z.

2. Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn tâm O. M là điểm bất kỳ trên dây BC (M khác B, M khác C). Vẽ đường tròn tâm D đi qua M và tiếp xúc với AB tại B, vẽ đường tròn tâm E đi qua M và tiếp xúc với AC tại C. Gọi N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (D) và (E).

a) Chứng minh rằng tứ giác ABNC là tứ giác nội tiếp. Từ đó chứng minh điểm N thuộc đường tròn (O) và ba điểm A, M, N thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng trung điểm I của đoạn thẳng DE luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm M di động trên dây BC.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố $(p; q; r)$ sao cho $pqr = p + q + r + 160$.

2. Cho 8 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 210. Chứng minh rằng trong 8 đoạn thẳng đó luôn tìm được 3 đoạn thẳng để ghép thành một tam giác.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NAM ĐỊNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 10
(Đề thi có 2 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (*3,0 điểm*)

1. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}-\dfrac{1-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}{7-\sqrt{89-28\sqrt{10}}}$.

2. Xét ba số thực dương x,y,z thoả mãn $\dfrac{xz}{z+\sqrt{z^2+1}}+\dfrac{z}{y}=\dfrac{\sqrt{z^2+1}}{y}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{xy}+x\sqrt{yz}+1}+\frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1}=1.$$

Câu 2. (*5,0 điểm*)

1. Giải phương trình $x^3+x^2+2x=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}\left(x^2+2\right)\sqrt{x^4+4}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{(x-y)^2-1}{xy}-\dfrac{2(x+y-1)}{x+y}=-4\\ 4x^2+5y+\sqrt{x+y-1}+6\sqrt{x}=13\end{cases}$.

Câu 3. (*3,0 điểm*)

1. Cho các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ thoả mãn $P(x)=\dfrac{1}{2}\left(Q(x)+Q(1-x)\right)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng các hệ số của $P(x)$ là các số nguyên không âm và $P(0)=0$. Tính $P\left(3P(3)-P(2)\right)$.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;\,y)$ thỏa mãn phương trình

$$(x-y-1)(x+1-y)+6xy+y^2(2-x-y)=2(x+1)(y+1).$$

Câu 4. (*7,0 điểm*) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$, vẽ đường tròn $(O';R')$ $(R'<R)$ tiếp xúc với cạnh AD tại H, tiếp xúc với cạnh BC tại G và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại M (điểm M thuộc cung CD không chứa điểm A). Vẽ đường thẳng tt' là tiếp tuyến chung tại M của hai đường tròn (O) và (O') (tia Mt nằm trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng MA chứa điểm D).

1. Chứng minh $DHM=DMt+AMH$ và MH, MG lần lượt là tia phân giác của các góc AMD và góc BMC.

2. Đường thẳng MH cắt đường tròn (O) tại E (E khác M). Hai đường thẳng HG và CE cắt nhau tại I. Chứng minh $\widehat{EHI} = \widehat{EIM}$.

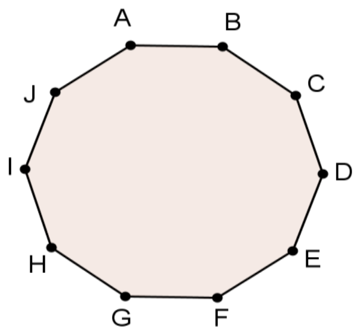
3. Chứng minh đường thẳng HG đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD.

Câu 5. (*2,0 điểm*)

1. Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{c(c+a+3b)+c^2}+\frac{1}{a(a+b+3c)+a^2}+\frac{1}{b(b+c+3a)+b^2} \le \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

2. Cho một đa giác có 10 đỉnh như hình vẽ ở bên (bốn đỉnh: A, B, C, D hoặc B, C, D, E hoặc C, D, E, F hoặc … hoặc J, A, B, C được gọi là bốn đỉnh liên tiếp của đa giác). Các đỉnh của đa giác được đánh số một cách tuỳ ý bởi các số nguyên thuộc tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ (biết mỗi đỉnh chỉ được đánh bởi một số, các số được đánh ở các đỉnh là khác nhau). Chứng minh rằng ta luôn tìm được 4 đỉnh liên tiếp của đa giác được đánh số mà tổng các số đó lớn hơn 21.



____________________**Hết**____________________

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BẮC NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 11
(Đề thi có 1 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức:

$$P=\left(\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3}-2\sqrt{2b^3}}-\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{2ab}+2b}\right).\left(\frac{\sqrt{a^3}+2\sqrt{2b^3}}{2b+\sqrt{2ab}}-\sqrt{a}\right) \text{ với } a\ge 0, b>0, a\ne 2b.$$

2) Cho hàm số $y=\left(m^2-4m-4\right)x+3m-2$ có đồ thị là d. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB có diện tích là 1 cm^2 (O là gốc tọa độ, đơn vị đo trên các trục là cm).

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1) Cho phương trình $x^2-\left(3m-2\right)x+2m^2-5m-3=0$, x là ẩn, m là tham số. Tìm tất cả giá trị của m để phương trình có ít nhất một nghiệm dương.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}\\ x^3-3x+2=2y^3-y^2\end{cases}$

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn các điều kiện $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a}{b+3c}+\frac{b}{a+3c}+\frac{ab}{bc+ca}$.

2) Tìm số nguyên tố p thỏa mãn p^3-4p+9 là số chính phương.

Câu 4. *(7,0 điểm)*

1) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) $(AB<AC)$ và đường cao AD. Vẽ đường kính AE của đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng $AD.AE=AB.AC$.

b) Vẽ dây AF của đường tròn (O) song song với BC, EF cắt AC tại Q, BF cắt AD tại P. Chứng minh rằng PQ song song với BC .

c) Gọi K là giao điểm của AE và BC. Chứng minh rằng:

$$AB.AC-AD.AK=\sqrt{BD.BK.CD.CK}$$

2) Cho tam giác ABC có $BAC=90^\circ, ABC=20^\circ$. Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh AC,AB sao cho $\hat{ABE}=10^o$ và $\hat{ACF}=30^o$. Tính $\hat{CFE}$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Trong kì thi Olympic có 17 học sinh thi môn Toán được mang số báo danh là số tự nhiên trong khoảng từ 1 đến 1000. Chứng minh rằng có thể chọn ra 9 học sinh thi toán có tổng các số báo danh được mang chia hết cho 9.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HƯNG YÊN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 12
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017 – 2018
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4 điểm)*

a) Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2018}$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a+b}=\sqrt{a-2018}+\sqrt{b-2018}$

b) Cho a là nghiệm dương của phương trình $6x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$

Tính giá trị biểu thức $A=\frac{a+2}{\sqrt{a^4+a+2}-a^2}$

Câu 2. *(4 điểm)*

a) Giải phương trình: $\left(1-\sqrt{1-x}\right)\sqrt[3]{2-x}=x$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $(x-2018)^2=y^4-6y^3+11y^2-6y$

Câu 3. *(4 điểm)*

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\frac{(x-y)^2}{2}\\ (3x+2y)(y+1)=4-x^2\end{cases}$

b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $2\sqrt{y}+\sqrt{z}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $2\sqrt{y}+\sqrt{z}=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Chứng minh rằng: $\frac{3yz}{x}+\frac{4zx}{y}+\frac{5xy}{z}\ge 4$

Câu 4. *(6 điểm)*

Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định với $OA=2R$; đường kính BC quay quanh O sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I. Các đường thẳng AB, AC cắt (O;R) lần lượt tại điểm thứ hai là D và E. Gọi K là giao điểm của DE với OA.

a) Chứng minh AK.AI=AE.AC

b) Tính độ dài đoạn AK theo R

c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Câu 5. *(2 điểm)*

Từ 625 số tự nhiên liên tiếp 1; 2; 3; …; 625 chọn ra 311 số sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625. Chứng minh rằng trong 311 số được chọn, bao giờ cũng có ít nhất một số chính phương

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH KHÁNH HÒA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 13
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017 – 2018
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 14/3/2018
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,00 điểm)*

Giải phương trình $2\left(5x+3\sqrt{x^2+x-2}\right)=27+3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}$.

Câu 2. *(4,00 điểm)*

a) Chứng minh rằng $\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}$ là một số nguyên.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3.$$

Câu 3. *(2,00 điểm)*

Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x^2+xy+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=x^3y+y^3x.$$

Câu 4. *(2,00 điểm)*

Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn $p=a^3-b^3$ với a,b là hai số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng nếu lấy $4p$ chia cho 3 và loại bỏ phần dư thì nhận được một số là bình phương của một số nguyên lẻ.

Câu 5. *(6,00 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi E,F lần lượt là các chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC. Đường tròn (I) đi qua E,F và tiếp xúc với BC tại điểm D. Chứng minh rằng $\frac{DB^2}{DC^2}=\frac{BF.BE}{CF.CE}$.

Câu 6. *(2,00 điểm)*

Trên bàn có $n\ (n\in\mathbb{N}, n>1)$ viên bi. Có hai người lần lượt lấy bi. Mỗi người đến lượt mình được lấy một số viên bi tùy ý (ít nhất 1 viên bi) trong những viên bi còn lại trên bàn, nhưng không vượt quá số viên bi mà người lấy trước vừa lấy, biết rằng người lấy đầu tiên lấy không quá $n-1$ viên bi. Người nào lấy viên bi cuối cùng được xem là chiến thắng. Tìm các số n sao cho người lấy trước có chiến lược thắng.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH KIÊN GIANG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 14

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017 – 2018
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 13/3/2018
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(3 điểm)*

1) Cho biểu thức $A=n^2+4n+5\ (n\in N)$ (n lẻ). Chứng minh A không chia hết cho 8.

2) Cho số x $(x\in \mathbb{R};x>0)$ thỏa mãn điều kiện: $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$. Tính giá trị của: $B=x^5+\dfrac{1}{x^5}$

Câu 2. *(3 điểm)*

Rút gọn biểu thức: $X=\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}}+...+\sqrt{1+\dfrac{1}{2017^2}+\dfrac{1}{2018^2}}$.

Câu 3. *(4 điểm)*

1) Giải phương trình: $3x+2\sqrt{27x^3+8}=9x^2+6$.

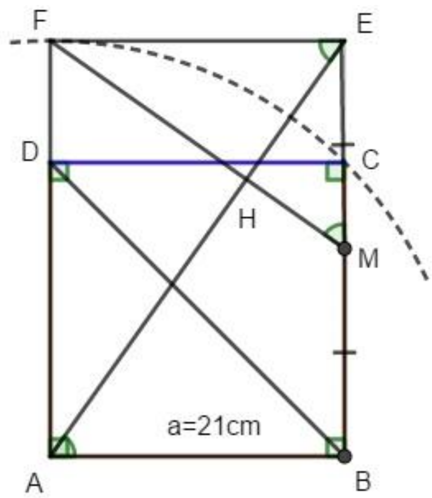
2) Tìm 2 số m, n cùng dấu thỏa mãn điều kiện: $|m|+2|n|$ đạt giá trị nhỏ nhất sao cho hai phương trình sau có nghiệm chung: $x^2+mx+2=0$; $x^2+2nx+6=0$.

Câu 4. *(3 điểm)*

1) Cho phương trình: $x^2+2(m-3)x-m-3=0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 2 và một nghiệm lớn hơn 2.

2) Cho x, y, z, $t>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+t}+\dfrac{z}{t+x}+\dfrac{t}{x+y}\geq 2$.

Câu 5. *(3,5 điểm)* Để có được tờ giấy khổ A4 (kích thước xấp xỉ $21\,cm$ × $29,7\,cm$) người ta thực hiện như hình vẽ minh họa bên.



Bước 1: Tạo ra hình vuông $ABCD$ cạnh $a=21\,cm$.
Bước 2: Vẽ cung tròn tâm A bán kính AC cắt tia AD tại F.
Bước 3: Tạo hình chữ nhật $ABEF$.
Khi đó hình chữ nhật $ABEF$ chính là tờ giấy A4 thông dụng hiện nay.

Bạn An ngồi nghịch xếp tờ giấy A4 này theo đường thẳng AE, rồi xếp theo đường thẳng FM (M là trung điểm BE) khi mở tờ giấy ra. An ngạc nhiên thấy hai đường thẳng FM và AE vuông góc với nhau. Em hãy chứng minh giúp bạn An về điều đó.

Câu 6. *(4 điểm)*

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, trên dây cung DC lấy điểm E sao cho $DC=3DE$, nối AE cắt cung nhỏ CD tại M. Trên cung nhỏ CB lấy điểm N sao cho cung nhỏ DM bằng cung nhỏ CN, nối AN cắt dây cung BC tại F. Chứng minh rằng: F là trung điểm của BC.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 15
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017 – 2018
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 10/3/2018
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Cho biểu thức $P=\frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}+\frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$, với $x>0, x\neq 1$. Rút gọn P và tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

2. Tính giá trị của $P=\frac{4(x+1)x^{2018}-2x^{2017}+2x+1}{2x^2+3x}$ tại $x=\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2}-\frac{3}{2\sqrt{3}+2}}$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Biết phương trình $(m-2)x^2-2(m-1)x+m=0$ có hai nghiệm tương ứng là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông. Tìm m để độ dài đường cao ứng với cạnh huyền của tam giác vuông đó bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)^2(8x^2+8y^2+4xy-13)+5=0\\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1\end{cases}$

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2-5y+62=(y-2)x^2+(y^2-6y+8)x$.

2. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p=a^2+b^2$ là số nguyên tố và $p-5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn ax^2-by^2 chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có $(O),(I),(I_a)$ theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác với các tâm tương ứng là O, I, I_a. Gọi D là tiếp điểm của (I) với BC, P là điểm chính giữa cung BAC của (O), PI_a cắt (O) tại điểm K. Gọi M là giao điểm của PO và BC, N là điểm đối xứng với P qua O.

1. Chứng minh IBI_aC là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP.

3. Chứng minh $DAI=KAI_a$.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho $x, y, z>0$ thỏa mãn $x\geq z$. Chứng minh rằng: $\frac{xz}{y^2+yz}+\frac{y^2}{xz+yz}+\frac{x+2z}{x+z}\geq\frac{5}{2}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH VĨNH PHÚC

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 16
(Đề thi có 2 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017 – 2018
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 10/3/2018
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{a}+2018}{a+2\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}-2018}{a-1}\right)\dfrac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$.

2) Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2$;

$\sqrt{x}+\sqrt{y}\neq\sqrt{z};y\neq z$. Chứng minh rằng $\dfrac{x+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{y+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1) Tìm số tự nhiên $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321$.

2) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\le 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\le\frac{2}{3}.$$

Câu 3. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình $\sqrt{1-x}+\sqrt{4+x}=3$.

b) Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m-1)x+y=2\\ x+2y=2\end{cases}$ (với m là tham số và x,y là ẩn số).

Tìm các giá trị m nguyên để hệ phương trình có nghiệm (x,y) nguyên.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=12cm$, $AC=16cm$. Gọi I là giao điểm các đường phân giác tròn của tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng BI vuông góc với đường thẳng MI.

2. Cho hình thoi $ABCD$ có $BAD=50^0$, O là giao điểm hai đường chéo. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng AB. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M (M khác B), trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho đường thẳng HM song song với đường thẳng AN.

a) Chứng minh $MB.DN = BH.AD$;

b) Tính số đo MON.

3. Cho đường tròn (O) cố định và hai điểm phân biệt B, C cố định thuộc đường tròn (O). Gọi A là một điểm thay đổi trên đường tròn (A không trùng với B và C), M là trung điểm của đoạn thẳng AC. Từ điểm M kẻ đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AB tại điểm H. Chứng minh rằng khi điểm A thay đổi trên đường tròn (O) thì điểm H luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Câu 5 ***(1,0 điểm).***

Cho hình vuông $ABCD$ và 2018 đường thẳng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

1) Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông;

2) Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ lệ diện tích bằng $\frac{1}{3}$.

Chứng minh rằng trong 2018 đường thẳng có ít nhất 505 đường thẳng đồng quy.

__________________Hết__________________

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 17

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017 – 2018
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 13/3/2018
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Cho biểu thức $A=\frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$. Rút gọn $B=1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}$ (với $0\le x\le\frac{1}{4}$)

b) Cho $x,y,z\ne 0$ và đôi một khác nhau thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2zx}+\frac{1}{z^2+2xy}\right)\left(x^{2016}+y^{2017}+z^{2018}\right)=xy+yz+zx \quad (*)$$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x-10}\right)=7$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2-xy=2\\x^3=x+y\end{cases}$

Câu 3. *(2,0 điểm)*

a) Tìm các số thực *x* sao cho $x+\sqrt{2018}$ và $\frac{7}{x}-\sqrt{2018}$ đều là số nguyên.

b) Tìm các số tự nhiên có dạng $\overline{ab}$. Biết rằng $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2$ là một số chia hết cho 3267.

Câu 4. *(3,0 điểm)* Cho hình bình hành $ABCD$ có $BDC=90^0$, đường phân giác của góc BAD cắt cạnh BC và đường thẳng CD tại E và F. Gọi O và O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và ΔCEF.

1) Chứng minh rằng O' thuộc đường tròn (O);

2) Khi DE vuông góc với BC

a) Tiếp tuyến của (O) tại D cắt BC tại G. Chứng minh rằng $BG.CE=BE.CG$;

b) Đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại H (H khác C). Kẻ tiếp tuyến chung IK (I thuộc đường tròn (O), K thuộc đường tròn (O') và H, I, K nằm cùng phía bờ OO'. Dựng hình bình hành $CIMK$. Chứng minh rằng $OB+O'C>HM$.

Câu 5. *(1,0 điểm)* Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2\le 3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+zx}+\frac{z^2}{z^4+xy}.$$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 18

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016 – 2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (*4,0 điểm*)

Cho biểu thức: $P=\dfrac{x}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1-\sqrt{y})}-\dfrac{y}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+1)}-\dfrac{xy}{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{y})}$

1. Rút gọn biểu thức *P*.
2. Tìm các giá trị x,y nguyên thỏa mãn $P=2$.

Câu 2. (*4,0 điểm*)

1. Tìm m để phương trình $(x^2-1)(x+3)(x+5)=m$ có 4 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3,x_4 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}=-1$

2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2=2+xy^2 \\ y^2=2+x^2y \end{cases}$

Bài 3. (*4 điểm*)

1. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{2016}-1$ chia hết cho 60.

2. Cho *x*, *y*, *z* là các số dương khác nhau đôi một và $x^3+y^3+z^3$ chia hết cho $x^2y^2z^2$. Tìm thương của phép chia $x^3+y^3+z^3:x^2y^2z^2$

Câu 4. (6,0 *điểm*)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và $AB<AC$. Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại D. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB, cắt BC và AC lần lượt tại M, N.

1) Chứng minh tứ giác $BONC$ nội tiếp và tam giác ANB cân.
2) Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại I, BI cắt DM tại K. Chứng minh K là trung điểm của DM.
3) Trên đoạn thẳng BD lấy điểm P sao cho $IP//DN$, AP cắt BC tại Q. Gọi G là trung điểm của DK. Chứng minh ba điểm Q,I,G thẳng hàng.

Câu 5. (2,0 *điểm*)

Cho các số thực *x*, *y*, *z* thỏa mãn : $0\le x,y,z\le 2$ và $x+y+z=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NGHỆ AN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 19
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016 – 2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4 điểm)*

a. Tìm các hệ số b, c của đa thức $P(x)=x^2+bx+c$ biết $P(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $x=2$.

b. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy^2-xy-y^3=0 \\ 2(x^2+1)-3\sqrt{x}(y+1)-y=0. \end{cases}$

Câu 2.*(4 điểm)*

a. Giải phương trình $x+2=3\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}$.

b. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$.

Câu 3. *(3 điểm)* Cho tam giác ABC có $BAC=135^0$, $BC=5cm$ và đường cao $AH=1cm$. Tính độ dài các cạnh AB và AC.

Câu 4.*(5 điểm)* Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, D là điểm trên cung BC không chứa A. Dựng hình bình hành ADCE. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC, ACE ; P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của K trên các đường thẳng BC, AB và I là giao điểm của EK với AC.

a. Chứng minh ba điểm P, I và Q thẳng hàng.

b. Chứng minh đường thẳng PQ đi qua trung điểm của đoạn HK.

Câu 5.*(4 điểm)*

a. Tìm tất cả các số nguyên tố khác nhau m, n, p, q thỏa mãn

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{mnpq}=1.$$

b. Trên một bảng có ghi hai số 1 và 5. Ta ghi các số tiếp theo lên bảng theo quy tắc: Nếu có hai số x,y phân biệt trên bảng thì ghi thêm số $z=x+y+xy$. Chứng minh rằng các số được viết trên bảng (trừ số 1) có dạng 3k + 2 (với k là số tự nhiên)

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NAM

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 20
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016 – 2017
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 10/4/2017
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(5,0 điểm)*

a) Cho biểu thức $P=\left(\frac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2}-\frac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1}\right)\left(x\sqrt{x}+2+\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ với $x>0$ và $x\neq\frac{1}{4}$.

Rút gọn biểu thức *P* và tìm *x* để $P\le\frac{3}{2}$.

b) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $ab+bc+ca=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{a^3}{c+a^2}+\frac{b^3}{a+b^2}+\frac{c^3}{b+c^2}$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình $x^2+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy^2+2x-4y=-1\\ x^2y^3+2xy^2-4x+3y=2\end{cases}$

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a,b) thỏa mãn đẳng thức:

$$a^3-b^3+3(a^2-b^2)+3(a-b)=(a+1)(b+1)+25.$$

b) Cho hai số nguyên a và b thỏa $24a^2+1=b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.

Câu 4. *(2,5 điểm)*

Cho tam giác nhọn *ABC* cân tại *A* và nội tiếp trong đường tròn *(O)* đường kính *AK*; lấy điểm *I* thuộc cung nhỏ AB của đường tròn *(O)* (*I* khác *A*, *B*). Gọi *M* là giao điểm của *IK* và *BC*, đường trung trực của đoạn thẳng *IM* cắt *AB* và *AC* lần lượt tại *D* và *E*. Chứng minh tứ giác *ADME* là hình bình hành.

Câu 5. *(4,5 điểm)*

Cho tam giác nhọn *ABC* (*AB*<*AC*) nội tiếp trong đường tròn *(O)* và có trực tâm là *H*. Gọi *D*, *E*, *F* lần lượt là các chân đường cao vẽ từ *A*, *B*, *C* của tam giác *ABC*.

a) Gọi *K* là giao điểm của hai đường thẳng *EF* và *BC*, gọi *L* là giao điểm của đường thẳng *AK* và đường tròn *(O)* (*L* khác *A*). Chứng minh *HL* vuông góc với *AK*.

b) Lấy điểm *M* thuộc cung nhỏ *BC* của đường tròn *(O)* (*M* khác *B*, *C*). Gọi *N* và *P* lần lượt là hai điểm đối xứng của điểm *M* qua hai đường thẳng *AB* và *AC*. Chứng minh ba điểm *N*, *H*, *P* thẳng hàng.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH**
TỈNH HẢI DƯƠNG	LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016 – 2017
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**MÔN THI: TOÁN**
	Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 21

(Đề thi có một trang)

Bài 1. (*2,0 điểm*)

a) Cho biểu thức: $P=\sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ (với $-1\le x\le 1$).

Tính giá trị của biểu thức *P* khi $x=-\frac{1}{2019}$

2. Cho a,b,c là ba số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$.

Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{a}}{1+a}+\frac{\sqrt{b}}{1+b}+\frac{\sqrt{c}}{1+c}=\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$

Bài 2. (*2,0 điểm*)

a) Giải phương trình: $2x^2-2x+1=(2x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)$.

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x^2+(y+1)^2=xy+x+1\\2x^3=x+y+1\end{cases}$.

Bài 3. (*2,0 điểm*)

a) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7$.

b) Tìm các số tự nhiên n sao cho $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương.

Bài 4. (*3,0 điểm*)

1) Cho tam giác nhọn $ABC(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H $(D\in BC;E\in AC;F\in AB)$. Tia EF cắt tia CB tại P, AP cắt đường tròn $(O;R)$ tại M (M khác A).

a) Chứng minh $PE.PF=PM.PA$ và AM vuông góc với HM;

b) Cho cạnh BC cố định, điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Xác định vị trí của A để diện tích tam giác BHC đạt giá trị lớn nhất.

2) Cho tam giác ABC có góc A nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O. Một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A(I không trùng với B,C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. (*1,0 điểm*)

Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}}+\frac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}}+\frac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}}\le 3.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BẮC NINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 22
(Đề thi có 2 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016 – 2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(3.0 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức $B=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

2) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0;a^2+b^2\neq c^2;b^2+c^2\neq a^2;c^2+a^2\neq b^2$.

Tính giá trị biểu thức $P=\frac{a^2}{a^2-b^2-c^2}+\frac{b^2}{b^2-c^2-a^2}+\frac{c^2}{c^2-a^2-b^2}$.

Câu 2. *(4.0 điểm)*

1) Trong hệ trục tọa độ Oxy hãy tìm trên đường thẳng $y=2x+1$ những điểm $M(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $y^2-5y\sqrt{x}+6x=0$.

2) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{6}+\frac{b}{5}+\frac{c}{4}=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Câu 3. *(4.0 điểm)*

1) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{8}{(b+c)^2+4abc}+\frac{8}{(a+c)^2+4abc}+a^2+b^2+c^2\geq\frac{8}{a+3}+\frac{8}{b+3}+\frac{8}{c+3}$$

2) Tìm các số nguyên tố a, b, c và số nguyên dương k thỏa mãn phương trình

$$a^2+b^2+16c^2=9k^2+1$$

Câu 4. *(6.0 điểm)*

Cho đoạn thẳng $AB=2a$ có trung điểm là O. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn tâm O đường kính AB và nửa đường tròn tâm O' đường kính AO. Điểm M thay đổi trên nửa đường tròn (O') (M khác A và O), tia OM cắt đường tròn (O) tại C. Gọi D là giao điểm thứ hai của CA với đường tròn (O').

1) Chứng minh rằng tam giác ADM cân.

2) Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt tia OD tại E, chứng minh rằng EA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

3) Đường thẳng AM cắt OD tại H, đường tròn ngoại tiếp tam giác COH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N. Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

4) Tính độ dài đoạn OM theo a biết ME song song với AB.

Câu 5. *(3.0 điểm)*

1) Cho hình vuông MNPQ và điểm A nằm trong tam giác MNP sao cho $AM^2 = AP^2 + 2AN^2$. Tính số đo của góc $\widehat{PAN}$.

2) Cho các đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $Q(x) = x^2 + 2016x + 2017$ thỏa mãn các điều kiện $P(x) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt và $P(Q(x)) = 0$ vô nghiệm.

Chứng minh rằng $P(2017) > 1008^6$.

__________________**Hết**_________________

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐỒNG NAI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 23

(Đề thi có 1 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016 – 2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(3.0 điểm)* Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

Tính giá trị biểu thức $P=a\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)}+b\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-c^2\right)}+c\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-a^2\right)}-abc$

Câu 2. *(4.0 điểm)* Giải các phương trình sau:

a) $\left(x^2-9\right)^2=12x+1$

b) $\sqrt{x+2}=x^2-2$

Câu 3. *(5.0 điểm)*

a) Cho a, b là hai số thực và x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng:
$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{\left(a+b\right)^2}{x+y}$.

b) Cho x, y là hai số thực dương sao cho $x+y=1$. Chứng minh rằng:

$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}\ge\frac{4}{3}$.

Câu 4. *(5.0 điểm)* Cho tam giác ABC có $AB=5, BC=6, CA=7$.

a) Gọi G và I lần lượt là trọng tâm và tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng IG song song với BC.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Chứng minh rằng bốn điểm A, M, I, N cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 5. *(3.0 điểm)* Cho tam giác vuông có độ dài ba cạnh là số nguyên. Chứng minh rằng bán kính đường tròn nội tiếp cũng là số nguyên.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HƯNG YÊN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 24

(Đề thi có 1 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016 – 2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(2.0 điểm)* Cho $a=\frac{\sqrt{2}-1}{2};b=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Tính a^7+b^7.

Câu 2. *(4.0 điểm)*

a) Cho hàm số $y=ax+b\left(a\ne 0\right)$có đồ thị $\left(d\right)$. Lập phương trình đường thẳng $\left(d\right)$, biết $\left(d\right)$ đi qua điểm $A\left(1;2\right)$ và cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm C có tung độ dương và thỏa mãn $OB+OC$ nhỏ nhất (O là gốc tọa độ).

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $3x-16y-24=\sqrt{9x^2+16x+32}$.

Câu 3. *(3.0 điểm)* Giải phương trình $4x^3+5x^2+1=\sqrt{3x+1}-3x$.

Câu 4. *(3.0 điểm)* Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^2\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}=5y^2-\sqrt{6x-3}\\ 2y^4\left(5x^2-17x+6\right)=6-15x\end{cases}$

Câu 5. *(6.0 điểm)*

Cho điểm M thuộc nửa đường tròn $\left(O\right)$đường kính AB $\left(M\ne A,M\ne B,MA<MB\right)$. Tia phân giác của góc AMB cắt AB tại C. Qua C vẽ đường vuông góc với AB cắt đường thẳng AM, BM thứ tự tại D, H

a) Chứng minh rằng $CA=CH$.

b) Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên tiếp tuyến tại A của đường tròn $\left(O\right)$, F là hình chiếu vuông góc của D trên tiếp tuyến tại B của đường tròn $\left(O\right)$. Chứng minh rằng E, M, F thẳng hàng.

c) Gọi S_1,S_2 thứ tự là diện tích tứ giác ACHE và BCDF. Chứng minh rằng $CM^2<\sqrt{S_1.S_2}$

Câu 6. *(2.0 điểm)* Cho ba số $a,b,c\ge 1$ thỏa mãn $32abc=18\left(a+b+c\right)+27$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}+\frac{\sqrt{b^2-1}}{b}+\frac{\sqrt{c^2-1}}{c}$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP. HỒ CHÍ MINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 25
(Đề thi có 1 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016 – 2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(3.0 điểm)* Cho ba số a, b, c thoả các điều kiện sau $a-b=7; b-c=3$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a^2-c^2-2ab+2bc}$

Câu 2. *(3.0 điểm)* Giải phương trình $(2x-1)\sqrt{x+3}=x^2+3$.

Câu 3. *(3.0 điểm)* Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y-1)+y(x+1)=6 \\ (x-1)(y+1)=1 \end{cases}$

Câu 4. *(4.0 điểm)*

1. Cho các số thực dương x, y thoả mãn điều kiện $\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{2y}{1+y}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xy^2$

2. Tìm các số nguyên x, y thoả mãn phương trình $(x+y)(x+2y)=x+5$

Câu5. *(5.0 điểm)*

1. Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AH. Đường phân giác trong góc A cắt MN tại K. Chứng minh rằng AK vuông góc với HK.

2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi AH, AD lần lượt là đường cao. đường phân giác trong của tam giác ABC (H,D thuộc BC). Tia AD cắt (O) tại E, tia EH cắt (O) tại F và tia FD cắt (O) tại K. Chứng minh rằng AK là đường kính của (O).

Câu 6. *(2.0 điểm)* Trong tuần, mỗi ngày Nam chỉ chơi một môn thể thao. Nam chạy ba ngày một tuần nhưng không bao giờ chạy trong hai ngày liên tiếp. Vào thứ Hai, anh ta chơi bóng bàn và hai ngày sau đó anh ta chơi bóng đá. Nam còn đi bơi và chơi cầu lông, nhưng không bao giờ Nam chơi cầu lông sau ngày anh ta chạy hoặc bơi. Hỏi ngày nào trong tuần Nam đi bơi?

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 26
(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Cho $x = 3-\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^5 - 8x^4 + 17x^3 + 6x^2 - 116x + 104$.

b) Cho *x*, *y* là hai số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)} = x + y - \sqrt{x^2+y^2}.$$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^2 - 20x + 24 + 8.\sqrt{3(x-1)} = 0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 3 = 4x \\ x^3 + 12x + 8y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases}$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

a) Tìm các số nguyên x, y thoả mãn: $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 20x - 20y + 24 = 0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

1) Cho tam giác *ABC* có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Chứng minh rằng: $\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.

2) Cho tam giác *ABC* có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ $(c < a,\ c < b)$. Gọi *M*, *N* lần lượt là các tiếp điểm của cạnh *AC* và cạnh *BC* với đường tròn tâm *O* nội tiếp tam giác *ABC*. Đường thẳng *MN* cắt tia *AO* tại *P* và cắt tia *BO* tại *Q*. Gọi *E*, *F* lần lượt là trung điểm của *AB* và *AC*.

a) Chứng minh rằng: $\frac{MP}{a} = \frac{NQ}{b} = \frac{PQ}{c}$.

b) Trên đoạn thẳng *NC* lấy điểm *I* sao cho *MF* = *NI*. Chứng minh *IQ* đi qua trung điểm của *NF*.

Câu 5. *(1,0 điểm)* Cho *x*, *y*, *z* là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{x}{y+z+2x}} + \sqrt{\frac{y}{z+x+2y}} + \sqrt{\frac{z}{x+y+2z}}$$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH VĨNH PHÚC

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 27
(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}+4}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right):\left(1-\dfrac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm các giá trị x nguyên để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $(x+1)(x-2)(x+6)(x-3)=45x^2$.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $x(x^2+x+1)=4^y-1$.

Câu 3. *(1,0 điểm)*

Cho các số nguyên x,y thỏa mãn $3x+2y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$H=x^2-y^2+|xy|+|x+y|-2.$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho hai điểm A,B phân biệt, lấy điểm C bất kì thuộc đoạn AB sao cho $0<AC<\dfrac{3}{4}AB$; tia Cx vuông góc với AB tại C. Trên tia Cx lấy hai điểm D,E phân biệt sao cho $\dfrac{CE}{CB}=\dfrac{CA}{CD}=\sqrt{3}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC và đường tròn ngoại tiếp tam giác BEC cắt nhau tại điểm thứ hai H (H không trùng với C).

a) Chứng minh rằng $ADC=EBC$ và ba điểm A,H,E thẳng hàng;

b) Xác định vị trí của C để $HC\perp AD$;

c) Chứng minh rằng khi điểm C thay đổi thì đường thẳng HC luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. *(1,0 điểm)* Cho ba số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x+y+z=2$. Chứng minh rằng

$$x+2y+z\ge(2-x)(2-y)(2-z).$$

Câu 6. *(1,0 điểm)*

Trên mặt phẳng cho năm điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào cùng thuộc một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua ba điểm trong năm điểm đã cho và hai điểm còn lại có đúng một điểm nằm bên trong đường tròn.

__________________**Hết**__________________

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NGHỆ AN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 28

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(3 điểm)*

a. Chia 18 vật có khối lượng $2016^2; 2015^2; 2014^2; ...; 1999^2$ gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau. (không được chia nhỏ các vật đó).

b. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x + 171 = y^2$.

Câu 2. *(6 điểm)*

a. Giải phương trình: $x^2 + 6x + 1 = (2x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3}$

b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2 + 1 = y^2 - 4x \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$

Câu 3. *(3 điểm)*

Cho $a,b,c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$

Câu 4. *(6 điểm)*

Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm (O; R). Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm), cát tuyến MPQ không đi qua O (P nằm giữa M, Q). Gọi H là giao điểm của OM và AB.

a. Chứng minh: $HPO = HQO$

b. Tìm điểm E thuộc cung lớn AB sao cho tổng $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. *(2 điểm)*

Tìm hình vuông có kích thước nhỏ nhất để trong hình vuông đó có thể sắp xếp được 5 hình tròn có bán kính bằng 1 sao cho không có hai hình tròn bất kì nào trong chúng có điểm trong chung.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 29

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{a-3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}-\dfrac{a+3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}\right).\left(\sqrt{a}-\dfrac{9}{\sqrt{a}}\right)$ (với $a>0;a\ne 9$)

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm các giá trị biểu thức $M=A+a$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+9}}=1$.

b) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}x^3-y^3=4(4x-y)\\ y^2-5x^2=4\end{cases}$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Tìm các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình: $54x^3+1=y^3$.

b) Tìm các giá trị nguyên dương của m để phương trình $x^2-mxy+y^2+1=0$ có nghiệm nguyên dương với x,y là ẩn số.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho đường tròn tâm O bán kính R. Tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ có B,C cố định. Đường cao AD, BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường thẳng chứa các tia phân giác ngoài của góc BHC cắt AB, AC lần lượt tại điểm M,N.

a) Chứng minh tam giác AMN cân;

b) Xác định vị trí của A để chu vi tam giác DEF lớn nhất;

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của góc BAC tại K (K khác A). Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Câu 5. *(2,0 điểm)* Cho các số dương a,b,c thỏa mãn: $ab^2+bc^2+ca^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}+\frac{2b^5+3c^5}{bc}+\frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 15\left(a^3+b^3+c^3-2\right).$$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HƯNG YÊN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 30

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho $x=1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[2]{4}.$. Tính giá trị của biểu thức $A=\sqrt{x^3-3x^2-3x+2018}.$.

Câu 2. *(5,0 điểm)*

a) Cho đường thẳng (d) có phương trình $y=mx+1-m\,(m\neq 0)$. Tìm m để khoảnh cách từ gốc tọa độ O đến (d) là lớn nhất.

b) Tìm các số có 2 chữ số $\overline{ab}\,(a\neq b)$ sao cho số $n=\overline{ab}-\overline{ba}$ là một số chính phương.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Giải phương trình: $x^2+3x\sqrt[3]{3x+2}-12+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}+8}{x}$

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2+y^2-3xy-4x+3y+2=0\\ \sqrt{x^2-y+3}+\sqrt{y-x+1}=2\end{cases}$

Câu 5. *(6,0 điểm)* Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Lấy điểm M bất kỳ trên cung nhỏ BC. Đường thẳng qua A và vuông góc với CM tại H cắt tia BM tại K.

a) Chứng minh H là trung điểm của AK;

b) Chứng minh rằng điểm K luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M thay đổi. Tính bán kính đường tròn đó khi $R=3\sqrt{3}$;

c) Gọi D là giao điểm của AM với BC. Tìm vị trí của M sao cho tích hai bán kính của đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MBD, MCD đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6. *(2,0 điểm)*

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^3}{3a-ab-ac+2bc}+\frac{b^3}{3b-ba-bc+2ac}+\frac{c^3}{3c-ca-cb+2ab}+3abc.$$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH PHÚ THỌ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 31
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(3,0 điểm)*

a) Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2)$ với n là số tự nhiên khác 0.
Chứng minh rằng $4S + 1$ là số chính phương.

b) Tìm các số nguyên x và y thỏa mãn $x^2 + 2y^2 + 2xy = y + 2$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{x^5 - 4x^3 - 17x + 9}{x^4 + 3x^2 + 2x + 11}$ với $\dfrac{x}{x^2 + x + 1} = \dfrac{1}{4}$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 5$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{a}}{a+2} + \dfrac{\sqrt{b}}{b+2} + \dfrac{\sqrt{c}}{c+2} = \dfrac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình $(3x+1)\sqrt{2x^2 - 1} = 5x^2 + \dfrac{3}{2}x - 3$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy + y - 5x + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$.

Câu 4. *(7,0 điểm)*

Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc đường tròn (O) (M khác A, khác B). Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và M cắt nhau ở E. Vẽ MP vuông góc với AB (P thuộc AB). Vẽ MQ vuông góc với AE (Q thuộc AE).

a) Chứng minh rằng AEMO là tứ giác nội tiếp và APMQ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh rằng PQ, OE, MA đồng qui.

c) Gọi K là giao điểm của EB và MP. Chứng minh rằng K là trung điểm MP.

d) Đặt AP = x, tính MP theo R và x. Tìm vị trí của M trên đường tròn (O) để hình chữ nhật APMQ có diện tích lớn nhất.

Câu 5. *(2,0 điểm)* Cho các số thực phân biệt a, b, c. Chứng minh rằng

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}\right) \geq \frac{9}{2}.$$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NAM ĐỊNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 32
(Đề thi có một trang)

Câu 1. (*3,0 điểm*)

1. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.
2. Cho các số thực *x, y, z* thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=18$ và $xyz=-1$. Tính giá trị của $S=\dfrac{1}{xy+z-1}+\dfrac{1}{yz+x-1}+\dfrac{1}{zx+y-1}$.

Câu 2. (*5,0 điểm*)

1. Giải phương trình $2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}-\sqrt{5x+11}=0$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-y\left(\sqrt{x-1}+1\right)+\sqrt{x-1}=0 \\ x^2+y-\sqrt{7x^2-3}=0. \end{cases}$

Câu 3. (*3,0 điểm*)

1. Tìm tất cả các số nguyên *x, y* thỏa mãn $x^2+y^2+xy-x-y=1$.
2. Chứng minh với mọi số nguyên dương *n* lớn hơn 1 ta có $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}<3$.

Câu 4. (*7,0 điểm*) Cho tam giác nhọn *ABC* có $AB<AC$, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Điểm *D* thuộc cạnh *AC* sao cho $ABD=ACB$. Đường thẳng *AI* cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *DIC* tại điểm thứ hai là *E* và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là *Q*. Đường thẳng đi qua *E* và song song với *AB* cắt *BD* tại *P*.

1. Chứng minh tam giác *QBI* cân;
2. Chứng minh $BP.BI=BE.BQ$;
3. Gọi *J* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABD*, *K* là trung điểm của *JE*. Chứng minh $PK//JB$.

Câu 5. (*2,0 điểm*) Cho một lớp học có 35 học sinh, các học sinh này tổ chức một số câu lạc bộ môn học. Mỗi học sinh tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kì thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐĂK LĂK

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 33

(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(4.0 điểm)*

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-5y=-20 \\ (1+x)(1+2x)(1+3x)=(1+3y)(1+3y+2x^2) \end{cases}$

b) Tìm tất cả các số thực m để phương trình $x^2-2(2m+1)x+3m+4=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Câu 2. *(4.0 điểm)*

a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$ và $x+y+z=2$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{\sqrt{y}}{y+1}+\frac{\sqrt{z}}{z+1}\right)$$

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1;2)$ và cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B khác góc tọa độ O mà thỏa mãn $OA+OB=6$.

Câu 3. *(4.0 điểm)*

a) Tìm các số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$ thỏa mãn $\overline{ab}+6=(a+b)^3$.

b) Cho $a=\underbrace{111...1}_{2017\,cs\,1}$ và $b=1\underbrace{000...0}_{2016\,cs\,0}5$. Chứng minh rằng số $M=ab+1$ là số chính phương.

Câu 4. *(4.0 điểm)*

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính $AB=2R$. Biết $BC=CD$ và hai đường thẳng AD, BC cắt nhau tại F. Trên đường kính AB lấy điểm E sao cho $AD=BE$. Vẽ EH vuông góc với AD tại H. Hai đường thẳng AC, EH cắt nhau tại K. Gọi I là trung điểm của AE.

a) Chứng minh rằng $AD.AF+BC.BF=4R^2$.

b) Chứng minh rằng ba điểm D, I, K thẳng hàng.

Câu 5. *(2.0 điểm)*

Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O và diện tích tam giác AOB bằng $9cm^2$, diện tích tam giác COD bằng $16cm^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác ABCD.

Câu 6. *(2.0 điểm)*

Cho a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $ab+7bc+ca=188$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=5a^2+11b^2+5c^2$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH VĨNH LONG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 34

(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(4.0 điểm)*

a) Cho $x=\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}-2}$. Tính $P=\left(x^2+x-1\right)^{2016}$

b) Cho $x=y=-5$ và $x^2+y^2=11$. Tính x^4+y^4.

Câu 2. *(4.0 điểm)*

a) Giải phương trình $x^2+4x=2\sqrt{2x+3}-5$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}5x^2+2y^2+2xy-2x-4y=24\\3x+(2x+y-1)(x-y+1)=11\end{cases}$

Câu 3. *(2.0 điểm)*

Cho phương trình $x^2+(m-1)x-6=0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm x_1,x_2 sao cho biểu thức $A=\left(x_1^2-9\right)\left(x_2^2-4\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4. *(2.0 điểm)*

Cho a, b là các số dương thỏa mãn $ab=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=(a+b+1)\left(a^2+b^2\right)+\frac{4}{a+b}$$

Câu 5. *(3.0 điểm)*

a) Cho p và q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p=q+2$. Tìm số dư khi chia $p+q$ cho 12.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình $x(x+1)=y^2+1$.

Câu 6. *(3.0 điểm)*

Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$ và H là một điểm di động trên đoạn OA(H khác A). Đường thẳng qua H và vuông góc với OA cắt cung nhỏ AB tại M. Gọi K là hình chiếu của M trên OB.

a) Chứng minh rằng $HKM=2AMH$.

b) Các tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại A và B cắt tiếp tuyến tại M của đường tròn $(O;R)$ lần lượt tại D và E. Gọi giao điểm của OD, OE với AB lần lượt là F và G. Chứng minh rằng $OD.GF=OG.DE$.

Câu 7. *(2.0 điểm)*

Cho đường tròn tâm O bán kính $R=5cm$ và một điểm P cố định trong đường tròn sao cho $OP=3cm$. Hai dây cung AC và BD thay đổi nhưng luôn vuông góc với nhau tại P. Khi diện tích của tứ giác ABCD đạt giá trị lớn nhất, hãy tính diện tích đó và số đo góc OPD.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 35

(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(5.0 điểm)*

a) Cho các nguyên a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3=2\left(c^2-8d^3\right)$.

Chứng minh rằng $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho 2^x+x^2 là số nguyên tố.

Câu 2. *(5.0 điểm)*

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2+11x+19}+\sqrt{2x^2+5x+7}=3\left(x+2\right)$

b) Tìm tất cả các bộ ba số $\left(x;y;z\right)$ thỏa mãn $\begin{cases} x+y+z=3 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3} \\ x^2+y^2+z^2=17 \end{cases}$

Câu 3. *(3.0 điểm)*

a) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $0<x,y,z<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $xy+yz+zx=\dfrac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4x}{3-4x^2}+\frac{4y}{3-4y^2}+\frac{4z}{3-4z^2}$$

b) Cho a, b, c là đồ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^{2016}}{b+c-a}+\frac{b^{2016}}{c+a-b}+\frac{c^{2016}}{a+b-c}\ge a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}$$

Câu 4. *(6.0 điểm)*

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Lấy điểm Q bất kì trên cạnh BC (Q khác B và C). Trên tia đối của tia BA lấy điểm P sao cho $CQ.AP=a^2$. Gọi M là giao điểm của AQ và CP.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, CA.

1. Xác định vị trí của Q để IK có độ dài lớn nhất.

2. Chứng minh $MI^2+MJ^2+MK^2$ không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC.

Câu 5. *(1.0 điểm)*

Cho bảng ô vuông kích thước 10.10 gồm 100 ô vuông có kích thước 1x1. Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 36

(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(1.5 điểm)*

Cho biểu thức $M=\dfrac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{\sqrt{a}-2}{1-\sqrt{a}}$ với $a\ge 0, a\ne 1$

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để biểu thức M nhận giá trị nguyên.

Câu 2. *(2.0 điểm)*

a) Giải phương trình $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}}=9$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+zx=48 \\ y^2+xy+yz=12 \\ z^2+zx+yz=84 \end{cases}$.

Câu 3. *(2.0 điểm)*

a) Cho $a=\underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}...\sqrt{2}}_{2016\text{ ts }\sqrt{2}}$ và $b=\underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}...\sqrt{2}}_{3016\text{ ts }\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng hai số a và b có cùng chữ số hàng đơn vị.

b) Cho hàm số $y=ax+a+1$ với a là tham số, $a\ne 0$ và $a\ne -1$. Tìm tất cả các giá trị của a để khoảng cách từ góc tọa độ O đến đồ thị của hàm số đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4. *(3.5 điểm)*

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ BC lấy điểm M tùy ý. Đường tròn $(M;MB)$ cắt đoạn thẳng AM tại D.

a) Chứng minh rằng tam giác BDM là tam giác đều.

b) Chứng minh rằng $MA=MB+MC$.

c) Chứng minh rằng khi điểm M thay đổi trên cung nhỏ BC thì điểm D luôn nằm trên một đường tròn cố định có tâm thuộc đường tròn (O).

Câu 5. *(1.0 điểm)*

Cho các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn $x+y+z=0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\frac{1}{x^2+y^2-z^2}+\frac{1}{y^2+z^2-x^2}+\frac{1}{z^2+x^2-y^2}$$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ AN GIANG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 37
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4.0 điểm)*

Cho $x=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\left(1+3x^3-x^5\right)^{2016}$.

Câu 2. *(4.0 điểm)*

Cho Parabol $y=\dfrac{1}{4}x^2\,(P)$ và điểm $A(0;1)$.

a) Vẽ Parabol P trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Chứng minh rằng nếu điểm M nằm trên Parabol P thì độ dài đoạn thẳng AM bằng khoảng cách từ M đến đường thẳng $y=-1$. Biết rằng khoảng cách giữa hai điểm $C(x_C;y_C), D(x_D;y_D)$ bất kỳ trên mặt phẳng tọa độ Oxy được tính theo công thức $CD=\sqrt{(x_C-x_D)^2+(y_C-y_D)^2}$.

Câu 3. *(4.0 điểm)*

Cho phương trình $x^3+bx^2+cx+1=0$ trong đó c, d là các số nguyên. Biết rằng phương trình có một nghiệm $x_0=2+\sqrt{5}$. Tìm c, d và các nghiệm còn lại của phương trình.

Câu 4. *(3.0 điểm)*

Tìm x, y biết $\sqrt{2\left(\sqrt{x}+y-2\right)}=\sqrt{\sqrt{x}.y}$.

Câu 5. *(5.0 điểm)*

Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MB, MD với đường tròn(B, D là tiếp điểm) và một cát tuyến qua M cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, C.

a) Chứng minh rằng hai tam giác MAB và MBC đồng dạng với nhau.

b) Chứng minh rằng $AB.CD=BC.AD$.

c) Gọi d là đường thẳng qua D và song song với MB. Đường thẳng d cắt BA, BC lần lượt tại I và J. Chứng minh rằng $DI=DJ$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 38

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(2.0 điểm)*

Cho hai số thực a, b phân biệt thỏa mãn $ab = a - b$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$.

Câu 2. *(3.0 điểm)*

Giải phương trình $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+2} = \frac{4x-3}{5}$.

Câu 3. *(3.0 điểm)*

Cho $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$, đồng thời $x_1^2 - \frac{1}{2}$ và $x_2^2 - \frac{1}{2}$ là các nghiệm của phương trình $x^2 + \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)x + b^2 - \frac{1}{2} = 0$. Tìm các số a và b.

Câu 4. *(4.0 điểm)*

a) Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x + y \neq 0$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2 \geq 2$$

b) Trong một hình vuông có cạnh bằng 1 lấy năm điểm tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 5. *(5.0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (K) đi qua A và tiếp xúc với BC tại D, cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q và cắt đường tròn (O) tại điểm E khác A. Tia ED cắt đường tròn (O) tại F khác E.

a) Chứng minh rằng $CAD = FAB$.

b) Chứng minh rằng $\frac{PQ}{BC} = \frac{DP.DQ}{DB.DC}$.

Câu 6. (3.0 điểm)

Chiều ngày 13 tháng 3, Công ty khai thác thủy lợi hồ Dầu Tiếng – Phước Hòa cho biết đã kết thúc đợt xả nước đẩy mặn xuống sông Sài Gòn. Đây là lần xả nước thứ 5 từ đầu năm, giúp người dân Sài Gòn đảm bảo nước sinh hoạt, phục vụ nông nghiệp.

Đợt xả nước công suất $30\left(m^3/s\right)$ kéo dài trong 3 ngày, mặn đã được đẩy ra các cửa sông. Theo đơn vị này, sau đợt xả, mực nước trong hồ cao khoảng 20m, trữ lượng nước gần 850 triệu m^3.

Tuy giúp các nhà máy nước hạ lưu hoạt động được nhưng nhiều chuyên gia bày tỏ lo lắng bởi trữ lượng tại các hồ đầu nguồn thấp trong khi dự báo đợt hạn mặn có thể kéo dài đến tháng 5. Hiện các hồ phải căn kéo trong việc xả nước đẩy mặn để phục vụ cho nông nghiệp và hoạt động sản xuất nước.

Về nguyên nhân xâm nhập mặn, ông Phạm Thế Vinh – Viện Khoa học Thủy lợi miền Nam – cho rằng, hạn mặn diễn ra mạnh vì El Nino kéo dài khiến khu vực Nam bộ rất ít mưa. Ngoài ra, việc triều cường kéo dài đến tháng 2; 3 khiến nước mặn đi sâu vào các cửa sông. Ông Bùi Thanh Giang – Phó tổng giám đốc Công ty cấp nước Sài Gòn (Sawaco) – cho biết, năm nay trữ lượng nước về các hồ đầu nguồn giảm mạnh. Trong đó, lượng nước tích trữ của hệ thống hồ Dầu Tiếng – Phước Hòa trên thượng nguồn sông Sài Gòn còn hiện tại chỉ đạt 70%. Lưu lượng của hồ Trị An trên sông Đồng Nai chỉ đạt khoảng 80% so với trung bình hàng năm. Về giải pháp lâu dài, Sawaco kiến nghị UBND TP.HCM cho phép xây dựng hồ trữ nước thô cho nguồn nước sông Sài Gòn với vốn thực hiện từ ngân sách. Ngoài ra, đơn vị cũng đề xuất nâng cao công nghệ xử lý nước nhưng việc này đòi hỏi chi phí đầu tư, vận hành cao.(Nguồn vnexpress.net)

a) Hãy cho biết lượng nước mà hồ Dầu Tiếng đã xả trong 3 ngày qua?

b) Nếu tiếp tục xả 20% lượng nước hiện có đề ngăn mặn (với tốc độ xả như trên) thì công việc này sẽ mất bao nhiêu ngày.

c) Giả sử việc xả nước chống mặn diễn ra liên tục từ hôm nay (22/3) đến hết ngày 15/5, tính lượng nước mà hồ đã xả trong khoảng thời gian này.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH**
TỈNH HƯNG YÊN	LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014 – 2015
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**MÔN THI: TOÁN**
	Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 39

(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(3,0 điểm)* Cho $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$A=\left(x^4+x^3-x^2-2x-1\right)^{2019}.$$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+1$ (m là tham số thực). Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB=\sqrt{10}$.
2. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình

$$5x^2+6xy+2y^2+2x+2y-40=0.$$

Câu 3. *(5,0 điểm)*

1. Giải phương trình $\dfrac{x^3}{\sqrt{5-x^2}}+8x^2=40$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-15y-14=3\cdot\left(2y^2-x\right) \\ 4x^3+6xy+15x+3=0 \end{cases}$.

Câu 4. *(6,0 điểm)* Cho hình chữ nhật ABCD có $AB=5a$ và $AD=2a$ $(a>0)$. M là điểm bất kì trên cạnh AB (M khác A và khác B). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AC và DC.

1. Chứng minh rằng 5 điểm B, C, K, H, M cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó.
2. Tính $\dfrac{AH\cdot MK}{MH}$ theo a.
3. Khi AK là tiếp tuyến của đường tròn (O). Tính AM theo a.

Câu 5. *(2,0 điểm)* Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+ac+bc=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{19a+3}{1+b^2}+\dfrac{19b+3}{1+c^2}+\dfrac{19c+3}{1+a^2}$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NGHỆ AN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 40
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014 – 2015
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4 điểm)*

a. Cho hai số tự nhiên a, b thoả mãn điều kiện: $a^2 + a = 2b^2 + b$.
Chứng monh rằng a – b và a + b + 1 đều là các số chính phương.

b. Tìm số tự nhiên n sao cho số 2015 có thể viết được thành tổng của n hợp số nhưng không thể viết được thành tổng của n + 1 hợp số.

Câu 2. *(5 điểm)*

a. Giải phương trình: $\sqrt{6x-1}+\sqrt{9x^2-1}=6x-9x^2$

b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy=2 \\ x^3+y^3=2x+4y \end{cases}$

Câu 3. *(3 điểm)*

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn: abc = 1.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = $\frac{1}{a+2b+3}+\frac{1}{b+2c+3}+\frac{1}{c+2a+3}$.

Câu 4. *(6 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) lấy điểm M (M không trùng với B, C). Gọi D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng với M qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a. Ba điểm D, E, F thẳng hàng .

b. $\frac{AB}{MF}+\frac{AC}{ME}=\frac{BC}{MD}$

Câu 5. *(2 điểm)*

Cho 121 điểm phân biệt nằm trong hoặc trên các cạnh của một tam giác đều có cạnh bằng 6 cm. Chứng minh rằng có thể vẽ được một hình tròn đường kính bằng $\sqrt{3}$ cm chứa ít nhất 11 điểm trong số các điểm đã cho.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH PHÚ THỌ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014 – 2015
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 41
(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(3,0 điểm)*

a)Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình: $x^2+y^2-xy=x+y+2$.

b) Chứng minh rằng với ba số tự nhiên a,b,c trong đó có đúng một số lẻ và hai số chẵn ta luôn có $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(a-b+c)^3$ Chia hết cho 96

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có

$$\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)^2}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$$

b) Tính tổng

$$S=\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^2}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)^2}+.....+\sqrt{1+\left(\frac{1}{2014}+\frac{1}{2016}\right)^2}$$

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2-x}=2x-x^2$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x^2-1)y+(y^2-1)x=2(xy-1)\\4x^2+y^2+2x-y-6=0\end{cases}$$

Câu 4. *(7,0 điểm)*

Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O; R) ,(BC<2R),A là điểm di động trên cung lớn BC,(A không trùng B,C). Gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC;EF cắt BC tại P ,qua D kẻ đường thẳng song song với EF cắt AC tại Q và cắt AB tại R .

a) Chứng minh tứ giác BQCR là tứ giác nội tiếp

b) Gọi M là trung điểm cạnh BC .Chứng minh hai tam giác EPM,và DEM là hai tam giác đồng dạng.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR luôn đi qua một điểm cố định

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$

Chứng minh rằng $\frac{x}{\sqrt[3]{yz}}+\frac{y}{\sqrt[3]{xz}}+\frac{z}{\sqrt[3]{xy}}\ge xy+yz+xz$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 42

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014 – 2015
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (*4,0 điểm*) Cho biểu thức $A=\left(\frac{2x-1+\sqrt{x}}{1-x}+\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right).\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}-1}-1$

1. Rút gọn biểu thức A
2. Tìm x để $A<-\frac{1}{7}$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình $\frac{x}{x^2-x-2}-\frac{3x}{x^2-5x-2}-2=0.$
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=2x^2y^2\\(x+y)(1+xy)=4x^2y^2\end{cases}$

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1. Tìm các nghiệm nguyên (x; y) của phương trình: $5\left(x^2+xy+y^2\right)=7\left(x+2y\right)$
2. Tìm tất cả các số nguyên tố *p*, *q* sao cho tồn tại số tự nhiên *m* thỏa mãn :
$\frac{pq}{p+q}=\frac{m^2+1}{m+1}.$

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho 3 điểm A , B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (B nằm giữa A và C).

Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua B và C (O không thuộc đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

1. Chứng minh 4 điểm O, M, N, I cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.
3. Gọi D là trung điểm của HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm của ME.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+c\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\right)=6.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{bc}{a\left(2b+c\right)}+\frac{ca}{b\left(2a+c\right)}+\frac{4ab}{c\left(a+b\right)}.$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH VĨNH PHÚC

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 43

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014 – 2015
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(1,5 điểm)*

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{3x+\sqrt{16x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}\right):\left(2-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức *A*;

b) Tìm x để $A=-6$

Câu 2. *(1,5 điểm)*

Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx-2y=2 \\ 2x+my=5 \end{cases}$ (với m là tham số).

a) Giải hệ phương trình khi $m=10$;

b) Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn

$$x+y-2014=\frac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}.$$

Câu 3. *(3,0 điểm)*

a) Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P=\frac{a}{9a^3+3b^2+c}+\frac{b}{9b^3+3c^2+a}+\frac{c}{9c^3+3a^2+b}$$

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $x\left(1+x+x^2\right)=4y(y-1)$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho đoạn thẳng *AC* có độ dài bằng *a*. Trên đoạn *AC* lấy điểm *B* sao cho $AC=4.AB$. Tia *Cx* vuông góc với *AC* tại điểm *C*, gọi *D* là điểm bất kì thuộc tia *Cx* (*D* không trùng với *C*). Từ điểm *B* kẻ đường thẳng vuông góc với *AD* cắt hai đường thẳng *AD* và *CD* ở *K*, *E*.

a) Tính *DC.CE* theo *a*;

b) Xác định vị trí điểm *D* để tam giác *BDE* có diện tích nhỏ nhất;

c) Chứng minh rằng khi điểm *D* thay đổi trên tia *Cx* thì đường tròn đường kính *DE* luôn có một dây cung cố định.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho dãy gồm 2015 số: $\dfrac{1}{1};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{4};....;\dfrac{1}{2014};\dfrac{1}{2015}$.

Người ta biến đổi dãy nói trên bằng cách xóa đi hai số u,v bất kì trong dãy và viết thêm vào dãy một số có giá trị bằng $u+v+uv$ vào vị trí của u hoặc v. Cứ làm như thế đối với dãy mới thu được và sau 2014 lần biến đổi, dãy cuối cùng chỉ còn lại một số. Chứng minh rằng giá trị của số cuối cùng không phụ thuộc vào việc chọn các số *u*, *v* để xóa trong mỗi lần thực hiện việc biến đổi dãy, hãy tìm số cuối cùng đó.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 44

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014 – 2015
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(2,0 điểm)*

b) Tính giá trị của biểu thức: $A = 2x^3+3x^2-4x+2$

với $x=\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-1$

b) Cho x, y thỏa mãn:

$\sqrt{x+2014}+\sqrt{2015-x}-\sqrt{2014-x}=\sqrt{y+2014}+\sqrt{2015-y}-\sqrt{2014-y}$

Chứng minh: $x=y$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình $x^3+(x+1)\sqrt{x+1}+2\sqrt{2}=\left(x+\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)^3$

b) Giải phương trình sau: $\begin{cases}3x^2+xy-4x+2y=2\\ x(x+1)+y(y+1)=4\end{cases}$

Câu 3. *(2,0 điểm)*

a) Tìm số nguyên tố *p* sao cho các số $2p^2-1;\ 2p^2+3;\ 3p^2+4$ đều là số nguyên tố.

b) Tìm các số nguyên dương *x, y, z* thỏa mãn: $3x^2-18y^2+2z^2+3y^2z^2-18x=27$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn (*O;R*) đường kính *BC*. Gọi *A* là điểm thỏa mãn tam giác ABC nhọn. *AB, AC* cắt đường tròn trên tại điểm thứ hai tương ứng là *E* và *D*. Trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa D lấy *F*(*F* ≠ *B, C*). *AF* cắt *BC* tại *M*, cắt đường tròn (*O;R*) tại *N*(*N* ≠ *F*) và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *ADE* tại *P*(*P* ≠ *A*).

a) Giả sử $\widehat{BAC}=60^0$, tính *DE* theo *R*.

b) Chứng minh *AN.AF = AP.AM*

c) Gọi *I, H* thứ tự là hình chiếu vuông góc của *F* trên các đường thẳng *BD, BC*. Các đường thẳng *IH* và *CD* cắt nhau ở *K*. Tìm vị trí của *F* trên cung $\overset{\frown}{BC}$ để biểu thức $\frac{BC}{FH}+\frac{BD}{FI}+\frac{CD}{FK}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho các số dương *x, y, z* thay đổi thỏa mãn: $xy+yz+zx=xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M=\frac{1}{4x+3y+z}+\frac{1}{x+4y+3z}+\frac{1}{3x+y+4z}$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH KHÁNH HÒA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 45

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014 – 2015
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,0 điểm)*

a) Không dùng máy tính cầm tay. Chứng minh đẳng thức $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau

$$\left(1+x_1\right)\left(1+x_2\right)...\left(1+x_{2015}\right)=2^{2015}.\sqrt{x_1x_2...x_{2015}}.$$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{y-1}+\sqrt{y-2}+\sqrt{y-3}\\ x^2+y^2=10\end{cases}$.

Câu 3. *(3,0 điểm)*

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn x + y + z = 4. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}\ge 1.$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2=2x+\overline{yzz4}$.

Câu 5. *(4,0 điểm)*

Cho đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F. Qua E vẽ đường thẳng song song với BC cắt AD, DF lần lượt ở M, N. Chứng minh M là trung điểm EN.

Câu 6. *(2,0 điểm)*

Người ta xếp 16 số nào đó vào một hình vuông có 4×4 ô (hình bên) sao cho tổng các số ở mỗi hàng, mỗi cột, hai đường chéo đều bằng nhau và bằng số s. Chứng minh rằng s cũng là tổng 4 số đặt ở 4 góc hình vuông.

x	y	.	.
z	.		
.		.	
.			

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẢI DƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014 – 2015
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 46
(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(2 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2-\sqrt{1-x^2}}$ với $-1\le x\le 1.$

b) Cho *a* và *b* là các số thỏa mãn $a>b>0$ và $a^3-a^2b+ab^2-6b^3=0$.

Tính giá trị của biểu thức $B=\dfrac{a^4-4b^4}{b^4-4a^4}$.

Câu 2. *(2 điểm)*

a) Giải phương trình $x^2(x^2+2)=4-x\sqrt{2x^2+4}.$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3=2x+y\\ y^3=2y+x\end{cases}$.

Câu 3. *(2 điểm)*

a) Tìm các số nguyên dương *x, y* thỏa mãn phương trình $xy^2+2xy+x=32y$.

b) Cho hai số tự nhiên *a, b* thỏa mãn $2a^2+a=3b^2+b$.

Chứng minh rằng $2a+2b+1$ là số chính phương.

Câu 4. *(3 điểm)*

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O, R). H là một điểm di động trên đoạn OA (H khác A). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với OA cắt cung nhỏ AB tại M. Gọi K là hình chiếu của M trên OB.

a) Chứng minh $HKM=2AMH.$

b) Các tiếp tuyến của (O, R) tại A và B cắt tiếp tuyến tại M của (O, R) lần lượt tại D và E. OD, OE cắt AB lần lượt tại F và G. Chứng minh OD.GF = OG.DE.

c) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB theo R.

Câu 5. *(1 điểm)*

Cho *a, b, c* là các số thực dương thỏa mãn $2ab+6bc+2ac=7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=\dfrac{4ab}{a+2b}+\dfrac{9ac}{a+4c}+\dfrac{4bc}{b+c}$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014 – 2015
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 47
(Đề thi có một trang)

Câu 1. (*4,0 điểm*) Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}+\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}}+1\right):\left(1-\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Cho $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=6$. Tìm giá trị lớn nhất của A.

Câu 2. (*5,0 điểm*)

1.Cho phương trình $x^2+2\left(m-2\right)x+m^2-2m+4=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{2}{x_1^2+x_2^2}-\dfrac{1}{x_1x_2}=\dfrac{1}{15m}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+z=1\\ x^4+y^4+z^4=xyz\end{cases}$.

Câu 3. (*4,0 điểm*)

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a; b) sao cho $(a+b^2)$ chia hết cho (a^2b-1).

2. Tìm $x,y,z\in N$ thỏa mãn $\sqrt{x+2\sqrt{3}}=\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Câu 4. (*6,0 điểm*) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Một điểm C cố định thuộc đoạn thẳng AO (C khác A và C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AO cắt nửa đường tròn đã cho tại D. Trên cung BD lấy điểm M (M khác B và M khác D). Tiếp tuyến của nửa đường tròn đã cho tại M cắt đường thẳng CD tại E. Gọi F là giao điểm của AM và CD.

1. Chứng minh tam giác EMF là tam giác cân.

2. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác FDM. Chứng minh ba điểm D, I, B thẳng hàng.

3. Chứng minh góc ABI có số đo không đổi khi M di chuyển trên cung BD.

Câu 5. (*1,0 điểm*) Cho x, y là các số thực dương thoả mãn $x+y=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=\dfrac{1}{x^3+y^3}+\dfrac{1}{xy}$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HƯNG YÊN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014 – 2015
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Đề số 48
(Đề thi có một trang)

Câu 1. *(3,0 điểm)* Cho $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$A=(4x^5+4x^4-x^3+1)^{19}+\left(\sqrt{4x^5+4x^4-5x^3+5x+3}\right)^3+\left(\frac{1-\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+2x}}\right)^{2014}.$$

Câu 2. *(5,0 điểm)*

1. Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn $2xy+4x+2y+1>5x^2+2y^2$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x^3-y^3=x+2y\\52x^2-82xy+21y^2=-9\end{cases}$

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1. Cho parabol (P): $y=-2x^2$ và đường thẳng (d): $y=ax+a-2$. Tìm số nguyên a sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn AB = $\sqrt{5}$.

2. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\a+2b+3c\ge 10\end{cases}$, chứng minh rằng : $a+b+c+\frac{3}{4a}+\frac{9}{8b}+\frac{1}{c}\ge\frac{13}{2}$

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) có các đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D thuộc cạnh AC, E thuộc cạnh AB). Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác BEI và tam giác CDI cắt nhau tại K (K khác I). Gọi M là giao điểm của DE và BC. Chứng minh rằng:

1. Các điểm A, E, H, K, D thuộc một đường tròn.
2. A, K, I thẳng hàng.
3. $\angle$ MEC = $\angle$ MKC *(Kí hiệu $\angle$ ABC là số đo góc ABC)*

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho 19 điểm nằm trong hay trên cạnh của một lục giác đều cạnh bằng 4 cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 trong số 19 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH PHÚ THỌ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 49
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014 – 2015
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(3,0 điểm)*

a) Giải phương trình trên tập số nguyên $x^2+5y^2-4xy+4x-8y-12=0$.

b) Cho $P(x)=x^3-3x^2+14x-2$. Tìm số các số tự nhiên *x* nhỏ hơn 100 mà $P(x)$ chia hết cho 11.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{a^3-3a+2}{a^3-4a^2+5a-2}$, biết $a=\sqrt[3]{55+\sqrt{3024}}+\sqrt[3]{55-\sqrt{3024}}$.

b) Cho các số thực x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn

$$x^3=3x-1,\ y^3=3y-1 \text{ và } z^3=3z-1.$$

Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2=6$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình $3x-1+\dfrac{x-1}{4x}=\sqrt{3x+1}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^2+2y^2-4xy+x+8y-4=0\\ x^2-y^2+2x+y-3=0.\end{cases}$

Câu 4. *(7,0 điểm)*

Cho đường tròn *(O; R)* và dây cung *BC* không đi qua tâm. Gọi *A* là điểm chính giữa của cung nhỏ *BC*. Góc nội tiếp EAF quay quanh điểm *A* và có số đo bằng α không đổi sao cho *E, F* khác phía với điểm *A* so với *BC*; *AF* và *AE* cắt đường thẳng *BC* lần lượt tại *M* và *N*. Lấy điểm *D* sao cho tứ giác *MNED* là hình bình hành.

a) Chứng minh *MNEF* là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *MDF*. Chứng minh rằng khi góc nội tiếp EAF quay quanh điểm *A* thì *I* chuyển động trên một đường thẳng cố định.

c) Khi $\alpha=60^0$ và $BC=R$, tính theo *R* độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng *OI*.

Câu 5. *(2,0 điểm)* Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{2x^2+y^2+z^2}{4-yz}+\dfrac{2y^2+z^2+x^2}{4-zx}+\dfrac{2z^2+x^2+y^2}{4-xy}\ge 4xyz.$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH VĨNH PHÚC

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 50
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014 – 2015
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(2 điểm)*

a) Cho biểu thức $M=\frac{2\sqrt{a}-16}{a-6\sqrt{a}+8}-\frac{\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}-2}-\frac{2\sqrt{a}+1}{4-\sqrt{a}}$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để giá trị M là một số nguyên.

b) Cho đa thức $P(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $P(x)\ge 0\,\forall x; b>a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q=\frac{a+b+c}{b-a}$.

Câu 2. *(2 điểm)*

Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau vô ghiệm $\frac{x+1}{x-m+1}=\frac{x}{x+m+2}$.

Câu 3. *(3 điểm)*

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng số $p^{1954^{57}}-1$ chia hết cho 60.

Câu 4. *(3 điểm)*

Cho đường tròn tâm O bán kính R. Hai điểm phân biệt B,C cố định nằm trên đường tròn $(O;R)$ sao cho $BC=a<2R$. Gọi A là điểm bất kì thuộc cung lớn BC của $(O;R)$, A không trùng với B,C. Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ A của tam giác ABC. Hai điểm E,F lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADB,ADC.

a) Chứng minh hai tam giác AEO và ADC đồng dạng;

b) Tính diện tích tứ giác $AEOF$ theo a và R;

c) Chứng minh rằng khi điểm A thay đổi thì E di chuyển trên một đường thẳng cố định.

Câu 5. *(1 điểm)*

Trên một đường tròn cho 21 điểm phân biệt. Mỗi một điểm được tô bởi một trong 4 màu: xanh, đỏ, tím, vàng. Giữa mỗi cặp điểm nối với nhau bởi một đoạn thẳng được tô bởi một trong hai màu: nâu hoặc đen. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác có ba đỉnh được tô cùng một màu (xanh, đỏ, tím hoặc vàng) và ba cạnh được tô cùng một màu (nâu hoặc đen).

Hết

HƯỚNG DẪN GIẢI

Đề số 1

Câu 1.

1. a) Điều kiện: $x\ge 0; x\ne 1$

$$P=\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-1$$

$$P=\left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)-1$$

$$P=\left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{x-1}{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)-1$$

$$P=\left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right).\left(\frac{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)-1$$

$$P=\frac{x+1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-1=\frac{x}{\sqrt{x}+1}$$

$$Q=\sqrt{x}-P=\sqrt{x}-\frac{x}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

b) Để $Q\in\mathbb{Z}$ thì $\sqrt{x}+1$ là ước của 1

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}+1=1\\ \sqrt{x}+1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ \ (\text{tháa m·n §K})\\ \sqrt{x}=-2\ \ (\text{VN}_0)\end{array}\right.$$

Vậy $x=0$ thì $Q\in\mathbb{Z}$

2. Ta có:

$$\left(x^2-x^2-1\right)\left(2y+\sqrt{4y^2+1}\right)=x-\sqrt{x^2+1}\Rightarrow -2y-\sqrt{4y^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}$$

$$x+2y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4y^2+1}\quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\left(4y^2-4y^2-1\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=2y-\sqrt{4y^2+1}\Rightarrow -x-\sqrt{x^2+1}=2y-\sqrt{4y^2+1}$$

$$x+\ 2y=\sqrt{4y^2+1}\ -\sqrt{x^2+1}\quad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) với (2) ta được $2(x+2y)=0\Leftrightarrow x+2y=0$

Mặt khác $x^3+8y^3+2019=(x+2y)\left(x^2-2xy+4y^2\right)+2019$=2019 (vì $x+2y=0$)

Câu 2.

1. Đặt $x=a;\ \sqrt{x+3}=b\ge 0$

Ta có PT: $2a^2+b^2-3ab=0\ \Leftrightarrow (a-b)(2a-b)=0$

TH1: $a=b\Rightarrow x=\sqrt{x+3}$

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

TH2: $2a=b\Rightarrow 2x=\sqrt{x+3}$

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ 4x^2-x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-3}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Vậy PT đã cho có hai nghiệm TH1: $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$; $x=1$

2. $\begin{cases} x^3-\dfrac{6}{y}=2 \ \ (1) \\ 3x-\dfrac{8}{y^3}=-2 \ \ (2) \end{cases}$ ĐK: $y\ne 0$

Cộng PT (1) với PT (2) ta được

$$\Leftrightarrow \left(x^3-\frac{8}{y^3}\right)+\left(3x-\frac{6}{y}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{y}\right)\left(x^2+\frac{2x}{y}+\frac{4}{y^2}+3\right)=0$$

TH1: $x=\dfrac{2}{y}$ thay vào phương trình (1) ta được:

$$\frac{8}{y^3}-\frac{6}{y}=2\Rightarrow 2y^3+6y^2-8=0\Leftrightarrow (y-1)(y+2)^2=0$$

$y=1\Rightarrow x=2$; $y=-2\Rightarrow x=-1$

TH2: $\Leftrightarrow \left(x^2+\dfrac{2x}{y}+\dfrac{4}{y^2}+3\right)=0\Leftrightarrow \left(x^2+\dfrac{2x}{y}+\dfrac{1}{y^2}\right)+\dfrac{1}{y^2}+3=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\dfrac{1}{y^2}+3=0$ (PT vô nghiệm)

Vậy hệ PT đã cho có nghiệm (x;y) = (2;1), (-1;-2)

Câu 3.

1. Ta có:

$$(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}>n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}\Leftrightarrow\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)>0\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\dots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+(n+1)\sqrt{n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

2. Ta có:

$A=5x^2+9y^2-12xy+24x-48y+82$

$A=\left[9y^2-12y(x-4)+4(x-4)^2\right]-4(x-4)^2+5x^2-24x+82$

$A=\left[3y-2(x+3)\right]^2+x^2-8x+18$

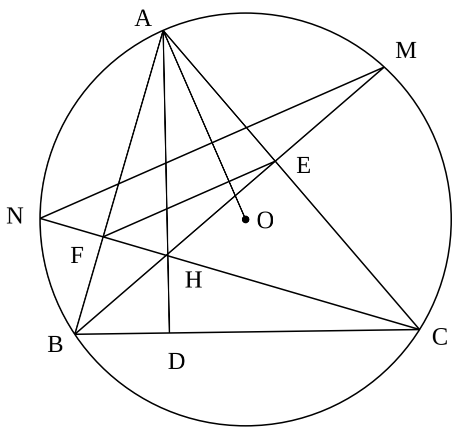
$A=\left[3y-2(x+4)\right]^2+\left(x-4\right)^2+2$

$A=\left[3y-2x-8\right]^2+\left(x-4\right)^2+2\geq 2$

$A\geq 2$. Dấu bằng sảy ra khi: $\begin{cases}3y-2x-8=0\\ x-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{16}{3}\\ x=4\end{cases}$

GTNN của $A=2$ khi $x=4; y=\dfrac{16}{3}$

Câu 4.



1.a) Ta có: Tứ giác $BFEC$ nội tiếp

$BCF = FEB$ (cùng chắn cung BF của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$)

$BCF = BMN$ (cùng chắn cung BN của đường tròn (O)

$BMN = FEB \Rightarrow MN // FE$ (đpcm) (*)

Ta có: $OM = ON = R$ (1)

Mặt khác: $ECF = FBE$ (cùng chắn cung EF của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$)

$ECF = FBE \Rightarrow$ $AM = AN \Rightarrow AM = AN$ (2)

Từ (1) và (2) OA là đường trung trực của MN (**)

Từ (*) và (**) $OA \perp$ EF

1.b) Gọi D là giao của AH với BC. Ta có $AD \perp BC$

$\Delta CDH \backsim \Delta CFB$ (C chung, $D = F = 90^0$)

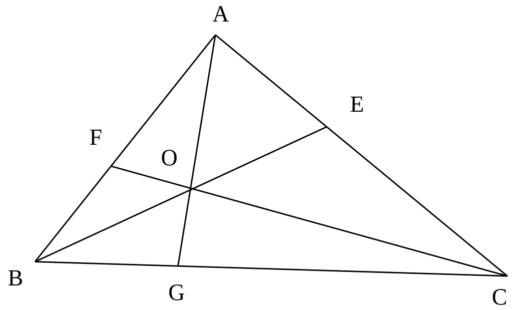
$\Rightarrow \dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CD}{CF} \Rightarrow CH.CF = CB.CD$ (3)

$\Delta BDH \backsim \Delta BEC$ (B chung, $D = E = 90^0$)

$\Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BD}{BE} \Rightarrow BH.\text{BE} = BC.\text{BD}$ (4).Cộng vế với vế (3) và (4) ta được:

$CH.CF + BH.BE = CB.CD + BD.BC$

$CH.CF + BH.BE = BC(CD + BD) = BC^2$



Đặt $S_{AOB} = S_1; S_{AOC} = S_2; S_{BOC} = S_3$

Ta có: $\dfrac{S_1}{S_{ABE}} = \dfrac{BO}{BE}; \dfrac{S_3}{S_{BEC}} = \dfrac{BO}{BE} \Rightarrow \dfrac{S_1}{S_{ABE}} = \dfrac{S_3}{S_{BEC}} = \dfrac{S_1 + S_3}{S_{ABC}} = \dfrac{BO}{BE}$ (1)

$\dfrac{S_3}{S_{BCF}} = \dfrac{CO}{CF}; \dfrac{S_2}{S_{ACF}} = \dfrac{CO}{CF} \Rightarrow \dfrac{S_3}{S_{BCF}} = \dfrac{S_2}{S_{ACF}} = \dfrac{S_2 + S_3}{S_{ABC}} = \dfrac{CO}{CF}$ (2)

$\dfrac{S_1}{S_{ABG}} = \dfrac{AO}{AG}; \dfrac{S_2}{S_{AGC}} = \dfrac{AO}{AG} \Rightarrow \dfrac{S_1}{S_{ABG}} = \dfrac{S_2}{S_{AGC}} = \dfrac{S_2 + S_1}{S_{ABC}} = \dfrac{AO}{AG}$ (3)

Cộng vế với vế $\dfrac{AO}{AG} + \dfrac{BO}{BE} + \dfrac{CO}{CF} = \dfrac{2\left(S_1 + S_2 + S_3\right)}{S_{ABC}}$ =2

Vậy tổng $\dfrac{AO}{AG} + \dfrac{BO}{BE} + \dfrac{CO}{CF}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm O.

Câu 5.

1. $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = = \dfrac{\left(1 - \sqrt[3]{2}\right)\left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)}{1 - \sqrt[3]{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$

$x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2} - 1\right)x = 1 \Leftrightarrow 2x^3 = \left(x + 1\right)^3$

$\Leftrightarrow 2x^3 - \left(x + 1\right)^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 3 = 4$

$P = 4 = 2^2$ là một số chính phương

2. $x^2 - 2y^2 = 5$ (5). Từ Pt (5) $\Rightarrow x$ lẻ $x = 2m + 1$ (m $\in \mathbb{Z}$)

Thay vào PT (5) ta được: $(2m + 1)^2 - 2y^2 = 5 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 2y^2 = 4 \Leftrightarrow 2m\left(m + 1\right) - y^2 = 2$ (6)

Từ PT (6) $\Rightarrow y$ chẵn $y = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Thay vào (6): $2m\left(m + 1\right) - (2k)^2 = 2 \Leftrightarrow 2m\left(m + 1\right) - 4k^2 = 2$

$\Leftrightarrow m\left(m + 1\right) = 2k^2 + 1$ (7)

Ta thấy VT phương trình (7) chẵn; VP phương trình (7) lẻ.
Vậy PT đã cho không có nghiệm nguyên.

Đề số 2

Câu 1.

a. Ta có:

$$A=\frac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}-\frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-3-2(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-3)(x+8)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{x+8}{(\sqrt{x}+1)}$$

b. Ta có: $A=\dfrac{x+8}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}+1+\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}-2$

Vì $\sqrt{x}+1>0,\forall x\ge 0; x\ne 9$ nên áp dụng BĐT Cô – Si ta có:

$$A\ge 2\sqrt{(\sqrt{x}+1).\frac{9}{\sqrt{x}+1}}-2=4.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{x}+1=\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow x=4$. Vậy $A_{\min}=4$ khi $x=4$.

Câu 2.

a. Ta có: $\Delta'=(m+4)^2-\left(m^2+8m-9\right)=25>0$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

b. Áp dụng định lí Vi – ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2(m+4)=2m+8\\ x_1x_2=m^2+8m-9\end{cases}$

$$P=\frac{x_1^2+x_2^2-60}{x_1+x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-60}{x_1+x_2}$$

$$P=\frac{(2m+8)^2-2\left(m^2+8m-9\right)-60}{2m+8}=\frac{m^2+8m+11}{m+4}=m+4-\frac{5}{m+4}$$

P nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{5}{m+4}$ nguyên $\Rightarrow m+4$ là ước của 5

$\Rightarrow m+4 \in \{\pm1;\pm5\}$. Mà m nguyên dương $\Rightarrow m = 1$.

Câu 3.

a. Điều kiện: $x>0$

Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\geq 2 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=t^2-2$ đi đến phương trình: $t^2-4t+3=0$

Giải phương trình này được nghiệm: $t=1$ (loại), $t=3$

Do đó $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=3 \Rightarrow x-3\sqrt{x}+1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\ \sqrt{x}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện, phương trình cho có 2 nghiệm $x=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}; x=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$

b. Ta có:

$x^2y^2+(x-2)^2+(2y-2)^2-2xy(x+2y-4)=5$

$\Leftrightarrow x^2y^2+x^2-4x+4+4y^2-8y+4-2x^2y-4xy^2+8xy=5$

$\Leftrightarrow \left(x^2y^2-4xy^2+4y^2\right)+\left(x^2-4x+4\right)+\left(-2x^2y+8xy-8y\right)=5-4$

$\Leftrightarrow y^2\left(x^2-4x+4\right)+\left(x^2-4x+4\right)-2y\left(x^2-4x+4\right)=1$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+4\right)\left(y^2+1-2y\right)=1 \Leftrightarrow (x-2)^2(y-1)^2=1$

$TH1: (x-2)=(y-1)=1 \Leftrightarrow x=3$ và $y=2$

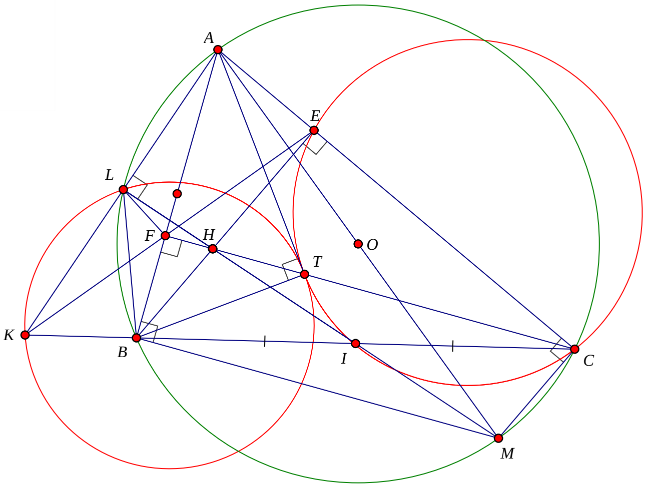
$TH2: (x-2)=(y-1)=-1 \Leftrightarrow x=1$ và $y=0$

$TH3: (x-2)=-(y-1)=1 \Leftrightarrow x=3$ và $y=0$

$TH4: (x-2)=-(y-1)=-1 \Leftrightarrow x=1$ và $y=2$

Vậy phương trình có các cặp $(x;y)$ nguyên là: $(3;2);(1;0);(3;0);(1;2)$.

Câu 4.



a.Ta có $AFH = AEH = 90^0$ suy ra tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH .

Ta có tứ giác $ALBC$ nội tiếp $\Rightarrow$ $KB.KC = KL.KA$ (1).

Vì tứ giác $BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow$ $KB.KC = KF.KE$ (2).

Từ (1), $(2) \Rightarrow$ tứ giác $ALFE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH .

Do đó, $LH \perp AK$.

b. Gọi $M = HL \cap (O)$. Vì $LH \perp AK \Rightarrow AM$ là đường kính.

Ta có $\begin{cases} MC \perp AC \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow MC // BH$ (3)

Ta có $\begin{cases} CH \perp AB \\ MB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CH // \text{MB}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ Tứ giác $BHCM$ là hình bình hành $\Rightarrow HL$ đi qua trung điểm của BC .

c. Áp dụng hệ thức lượng tam giác vuông ABT thì $AT^2 = AF.AB$ và chú ý $BFEC$ nội tiếp nên $AF.AB = AE.AC$.

Do đó, $AT^2 = AE.AC$ nên AT là tiếp tuyến của đường tròn (CET).

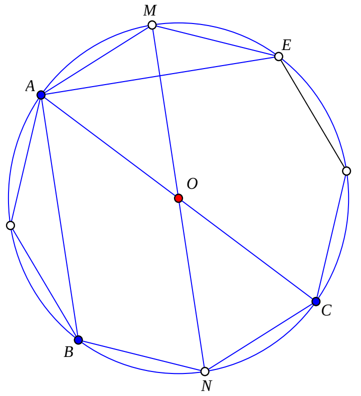
Hơn nữa, $KFB = ACB = KLB$ nên suy ra $KLFB$ nội tiếp, do đó $AF.AB = AL.AK$ nên $AT^2 = AL.AK$ tức là AT là tiếp tuyến của (KLT).

Vậy (CET) tiếp xúc với (KLT) vì có AT là tiếp tuyến chung.

Câu 5.

Ta gọi các cạnh song song với nhau là cùng một hướng. Chú ý rằng hai cạnh hoặc hai đường chéo song song với nhau tạo thành một hình thang cân.

Ta thấy rằng một đa giác đều n cạnh gồm có n hướng (cụ thể như trên hình vẽ thì AB, MN, CE cùng một hướng, trong khi đó AB, AC khác hướng).



Với mỗi bộ gồm có k đỉnh sẽ sinh ra $\dfrac{k(k-1)}{2}$ đoạn thẳng, nếu số đoạn thẳng này lớn hơn n thì sẽ có ít nhất hai cạnh có cùng một hướng nên chúng tạo thành hình thang cân.

Do đó, điều kiện để k điểm có thể chứa bốn điểm tạo thành hình thang cân nếu

$$\frac{k(k-1)}{2} > n \Leftrightarrow k^2 - k > 2n \Leftrightarrow \left(k-\frac{1}{2}\right)^2 > 2n + \frac{1}{4} \Leftrightarrow k > \sqrt{2n+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}.$$

Bây giờ áp dụng bài toán cho $n = 30$ ta suy ra $k > \sqrt{60+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \Rightarrow k = 9,$ suy ra cứ 9 đỉnh thì sẽ có 4 đỉnh tạo thành hình thang cân.

Đề số 3

Câu 1.

a. Ta có: $2y^2 - xy + x - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow x(y-1) = 2y^2 - 2y + 5$

$$\Leftrightarrow x = 2y + \frac{5}{y-1}$$

($y = 1$ không thỏa mãn PT)

Vì x, y là các số nguyên nên $y - 1$ là ước của 5.

$TH1: y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 9.$

$TH2: y - 1 = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -5.$

$TH3: y - 1 = 5 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 13.$

$TH4: y - 1 = -5 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow x = -9.$

Vậy PT có các nghiệm nguyên $(x;y)$ là: (9;2), (-5;0), (13;6), (-9;-4).

b. Ta có $A = 2^{2^n} + 4^n + 16 = \left(2^{2^n} - 1\right) + \left(4^n - 1\right) + 18$

Đặt $2^{2^n} = 2^{2k}$ $\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$ suy ra $2^{2^n} - 1 = 2^{2k} - 1 = 4^k - 1 \vdots 3$

Do đó với mọi n nguyên dương ta có: $2^{2^n}-1\,\vdots\,3;\ 4^n-1\,\vdots\,3;\ 18\,\vdots\,3$

$$\Rightarrow A=2^{2^n}+4^n+16\,\vdots\,3$$

Câu 2.

a. Điều kiện: $x\ge\frac{-3}{2}$

$$\sqrt{2x+3}=\frac{8x^3+4x}{2x+5}\Leftrightarrow(2x+5)\sqrt{2x+3}=8x^3+4x$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{2x+3})^3+2\sqrt{2x+3}=(2x)^3+2(2x)$$

Đặt $a=\sqrt{2x+3}\ge0,\ b=2x$

Ta có:

$$a^3+2a=b^3+2b\Leftrightarrow(a-b)\left[(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}+2\right]=0\Leftrightarrow a=b$$

Suy ra: $\sqrt{2x+3}=2x\Leftrightarrow\begin{cases}2x\ge0\\2x+3=4x^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{4}$$

b. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2=1\\(x-1)(y-3)=(x-1)+(y-3)+1\end{cases}$$

Đặt $a=x-1;\ b=y-3\cdot$ Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2+b^2=1\\ab=a+b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2-2ab=1\\ab=a+b+1\end{cases}$$

Đặt $S=a+b;P=ab,$ điều kiện $S^2\ge4P$. Hệ trên trở thành

$\begin{cases}S^2-2P=1\\P=S+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=-1\\P=0\end{cases}$ *(thỏa mãn)* hoặc $\begin{cases}S=3\\P=4\end{cases}$ *(loại)*

$$\begin{cases}S=-1\\P=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-1\\ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}\\\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

+) $\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=-1\\y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}$

+) $\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\y-3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là (0;3), (1;2)

Câu 3.

Ta có: $P = \dfrac{1}{(1+\frac{b}{a})^4} + \dfrac{1}{(1+\frac{c}{b})^4} + \dfrac{1}{(1+\frac{a}{c})^4}$

Đặt: $x = \dfrac{b}{a}, y = \dfrac{c}{b}, z = \dfrac{a}{c} \Rightarrow x, y, z > 0,\ xyz = 1.$

$\Rightarrow P = \dfrac{1}{(1+x)^4} + \dfrac{1}{(1+y)^4} + \dfrac{1}{(1+z)^4}$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có:

$P \geq \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1+y)^2} + \dfrac{1}{(1+z)^2}\right]^2$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có:

$\left[1+\left(\sqrt{xy}\right)^2\right]\left[1+\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2\right] \geq (1+x)^2 \Rightarrow \dfrac{1}{(1+x)^2} \geq \dfrac{y}{(1+xy)(x+y)}$

Tương tự: $\dfrac{1}{(1+y)^2} \geq \dfrac{x}{(1+xy)(x+y)}$

Từ 2 BĐT trên ta có: $\dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1+y)^2} \geq \dfrac{1}{1+xy}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$

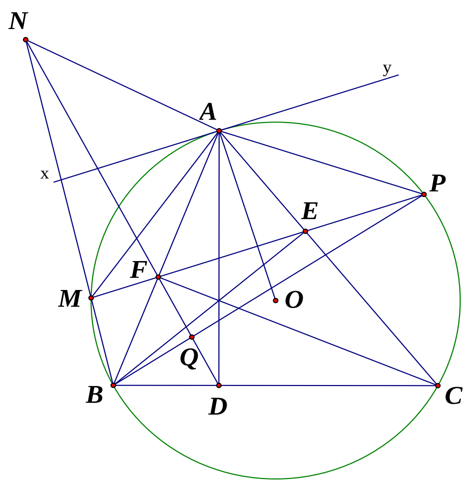
Tương tự: $\dfrac{1}{(1+z)^2} + \dfrac{1}{(1+1)^2} \geq \dfrac{1}{1+z} \Rightarrow \dfrac{1}{(1+z)^2} \geq \dfrac{1}{1+z} - \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1+y)^2} + \dfrac{1}{(1+z)^2} \geq \dfrac{1}{1+xy} + \dfrac{1}{1+z} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{z}{1+z} + \dfrac{1}{1+z} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

Ta có: $P \geq \dfrac{3}{16},\quad P = \dfrac{3}{16} \Leftrightarrow x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = c$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là: $\dfrac{3}{16}$.

Câu 4.



1.

a) Qua điểm *A* vẽ tiếp tuyến *xy* với đường tròn (*O*) suy ra $OA \perp xy$

Xét tứ giác *BCEF* có $BEC = 90^0$ (GT); $BFC = 90^0$ (GT) do đó tứ giác *BCEF* là tứ giác nội tiếp suy ra $ACB = AFE$ (1)

Mặt khác $BAx = \frac{1}{2} Sd\, AB$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$ACB = \frac{1}{2} Sd\, AB$ (góc nội tiếp) do đó $BAx = ACB$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AFE = BAx$ ở vị trí so le trong nên *EF* // *xy* hay $EF \perp OA$.

b) Đường thẳng *EF* cắt (*O*) tại điểm thứ 2 là *P*, *BP* cắt *DF* tại *Q*.

AD, BE, CF là các đường cao của tam giác *ABC* nên *BCEF, ACDF* nội tiếp, do đó $ACB = AFP$

Mặt khác $ACB = \frac{1}{2} Sd\, AB = \frac{1}{2} Sd\left(BM + MA\right)$

$AFP = \frac{1}{2} Sd\left(BM + AP\right)$

Do đó $Sd\, AM = Sd\, AP$ suy ra *BA* là tia phân giác của MBQ và $\Rightarrow AM = AP$ (1)

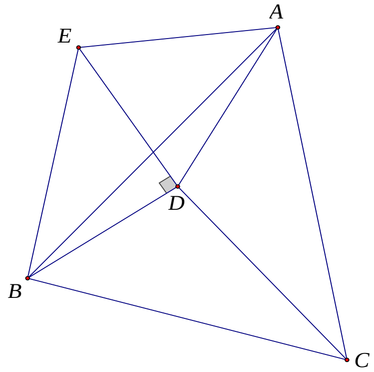
Tứ giác *BCEF* nội tiếp suy ra $ACB = BFM$, tứ giác *ACDF* nội tiếp nên $ACB = BFQ$

do đó $BFQ = BFM = ACB$, suy ra *FB* là tia phân giác của MFQ $\Delta MFB = \Delta QFB \Rightarrow MB = QB \Rightarrow \Delta BMP = \Delta BQN \Rightarrow BP = BN$.

Do đó $\Delta ABN = \Delta ABP$ nên *AN* = *AP* (2)

Từ (1) và (2) suy ra *AM* = *AN*.

2.



Dựng tam giác vuông cân BDE tại D sao cho E thuộc nửa mặt phẳng có bờ BD không chứa C.

Ta có $ADE = ACB$ và DE = DB

Từ giả thiết AC.BD = AD.BC

Suy ra $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ACB$, từ đó $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$

Mặt khác $BAC = EAD$, suy ra $CAD = BAE$. Do đó $\Delta CAD \sim \Delta BAE$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE} = \frac{CD}{BD\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{AB.CD}{AC.BD} = \sqrt{2}$$

Câu 5.

Chia hình vuông đã cho thành 2025 hình vuông nhỏ có cạnh bằng nhau và bằng $\frac{1}{45}$.

Gọi $(C_1),\ (C_2),\ldots,\ (C_{2025})$ là các hình tròn nội tiếp các hình vuông nhỏ ở trên, chúng có bán kính bằng nhau và bằng $\frac{1}{90}$.

Gọi $(C_1^{'}),\ (C_2^{'}),\ldots,\ (C_{2025}^{'})$ lần lượt là các hình tròn đồng tâm với các hình tròn ở trên có bán kính là: $\frac{1}{91}$. Khi đó các hình tròn này nằm trong hình vuông và đôi một không có điểm chung (rời nhau).

Trong hình vuông đã cho có các hình tròn rời nhau $(C_1^{'}),\ (C_2^{'}),\ldots,\ (C_{2025}^{'})$ và có 2019 điểm nên tồn tại một hình tròn trong các hình tròn này không chứa điểm nào trong 2019 điểm đã cho.

Đề số 4

Câu 1. a) Với $x \ge 0$ ta có:

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{x-\sqrt{x}+1-3+2\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$$

Ta có $\begin{cases} x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\ \forall x\geq 0 \\ \sqrt{x}\geq 0,\ \forall x\geq 0 \end{cases}$

và $\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0,\ \forall x\geq 0 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1\geq 0,\ \forall x\geq 0$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}+1\geq \sqrt{x},\ \forall x\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\leq 1,\ \forall x\geq 0 \Leftrightarrow A\leq 1,\ \forall x\geq 0$

$A=1 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 1 khi $x=1$.

b) Ta có:

$$B^2=4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}+4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2\sqrt{\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}$$

$$=8+2\sqrt{16-\left(10+2\sqrt{5}\right)}=8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}$$

$$=8+2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=8+2\left(\sqrt{5}-1\right)=6+2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow B=\sqrt{6+2\sqrt{5}}\ \left(\text{do } B\geq 0\right)$$

$$=\sqrt{5}+1$$

Câu 2.

a) Ta có $P(x)$ là bình phương của một đa thức thì:

$P(x)=\left(x^2+cx+d\right)^2=x^4+2cx^3+\left(c^2+2d\right)x^2+2cdx+d^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Mà: $P(x)=x^4-2x^3+3x^2+ax+b$

Do đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}2c=-2\\ c^2+2d=3\\ 2cd=a\\ d^2=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-1\\ d=1\\ a=-2\\ b=1\end{cases}$$

Vậy: $a=-2, b=1$.

b) ĐK: $-\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{3}{4}$ (*)

Ta có $\left(\sqrt{3-4x}+\sqrt{4x+1}\right)^2=3-4x+2\sqrt{(3-4x)(1+4x)}+1+4x$

$=4+2\sqrt{(3-4x)(1+4x)}\geq 4\Rightarrow\sqrt{3-4x}+\sqrt{1+4x}\geq 2$ (2)

Lại có: $-16x^2-8x+1=2-\left(4x+1\right)^2\leq 2$ (3)

Từ (2) và (3) ta có:

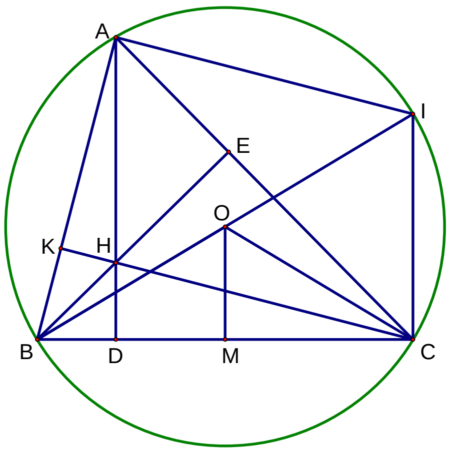
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3-4x}+\sqrt{1+4x}=2 \\ -16x^2-8x+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4x+2\sqrt{(3-4x)(1+4x)}+1+4x=4 \\ 16x^2+8x+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(3-4x)(1+4x)}=0 \\ x=\dfrac{-1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{4} \\ x=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \\ x=-\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4} \quad \text{(thỏa mãn(*))}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-\frac{1}{4}$

Câu 3.



a. Xét tứ giác $AKHE$ có $K=E=90^0 \Rightarrow BAC+BHC=180^0$

mà $BHC=BOC$ và $BOC=2BAC \Rightarrow 3BAC=180^0 \Rightarrow BAC=60^0$

Kẻ đường kính BI, suy ra tứ giác $AICH$ là hình bình hành $\Rightarrow AH=CI$ (1).

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow IC=2OM$ (2) (*Đường trung bình*).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH=2OM$.

Do M là trung điểm của $BC \Rightarrow OM \perp BC$ và OM là tia phân giác của $BOC \Rightarrow$ $MOC=60^0$.

Þ $OM=MC.\cot 60^0=\dfrac{a}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

b. Ta có $\Delta DBH \sim \Delta DAC \Rightarrow \dfrac{DB}{DA}=\dfrac{DH}{DC} \Leftrightarrow DA.DH=DB.DC$

Áp dụng bất đẳng thức $xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4}$ (Dấu "=" xảy ra khi $x = y$)

ta có: $DA.DH = DB.DC \le \dfrac{(DB+DC)^2}{4} = \dfrac{a^2}{4}$ (*Không đổi*).

(Dấu "=" xảy ra khi $DB = DC$ hay D là trung điểm của BC)

$\Rightarrow$ $DA.DH$ nhận giá trị lớn nhất là $\dfrac{a^2}{4}$ khi D là trung điểm của BC. $\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại $A \Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa của cung BC.

Câu 4.

Với mọi số tự nhiên a thì a^2 khi chia cho 8 chỉ có các số dư là 0; 1; 4.

Số 2019 chia 8 dư 3; 2020 chia 8 dư 4.

Suy ra $2019^n \equiv 3^n \pmod 8$

- Nếu n chẵn thì $n = 2k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2019^n \equiv 3^{2k} \equiv 1 \pmod 8$

$\Rightarrow C \equiv 5 \pmod 8$

$\Rightarrow C$ không thể là số chính phương.

- Nếu n lẻ thì $n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2019^n \equiv 3^{2k+1} \equiv 3.3^{2k} \equiv 3 \pmod 8$

$\Rightarrow C \equiv 7 \pmod 8$

$\Rightarrow C$ không thể là số chính phương.

KL: Không tồn tại n thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 5.

Đặt $a = \dfrac{1}{1+x}, b = \dfrac{1}{1+y}, c = \dfrac{1}{1+z}$ khi đó $x+y+z+2 = xyz \Leftrightarrow a+b+c = 1$

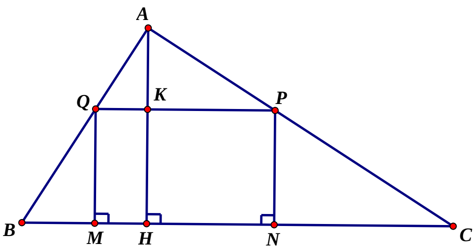
và $x = \dfrac{1}{a} - 1 = \dfrac{1-a}{a} = \dfrac{b+c}{a}, \ y = \dfrac{c+a}{b}, z = \dfrac{a+b}{c}$.

Vậy $x+y+z+6 = \dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} + \dfrac{a+b}{c} + 6 = \sum_{cyc} \left(\dfrac{c+a}{c} + \dfrac{a+b}{b}\right)$

$\ge 2\sum_{cyc} \sqrt{\dfrac{(c+a)(a+b)}{bc}} = 2\left(\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy}\right)$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hay $x = y = z = 2$.

Câu 6.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BC và PQ.

Tam giác ABC vuông tại A nên $AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{12}{5}$

Đặt $PN = x,\ PQ = y$

Vì $\Delta APQ \backsim \Delta ACB$ suy ra $\dfrac{PQ}{CB} = \dfrac{AK}{AH} \Leftrightarrow \dfrac{y}{5} = 1 - \dfrac{5}{12}x \Leftrightarrow y = 5 - \dfrac{25}{12}x$

$$S_{MNPQ} = x.y = 5x - \frac{25}{12}x^2 = 3 - \frac{25}{12}\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 \le 3$$

Vậy giá trị lớn nhất của S_{MNPQ} bằng 3 khi $x = \dfrac{6}{5}$ và $y = \dfrac{5}{2}$.

Đề số 5

Câu 1.

1) Ta có:

$$\begin{cases} x - y = m + 1 \\ 2x - 3y = m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 3m + 3 \\ 2x - 3y = m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m \\ y = x - m - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m \\ y = m - 1 \end{cases} \quad (\forall m \in R)$$

Ta có:

$P = x^2 + 8y = 4m^2 + 8(m-1) = 4m^2 + 8m - 8$

$= (2m+2)^2 - 12 \ge -12$

Dấu "=" xẩy ra khi $2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Giá trị nhỏ nhất của P là -12 khi m = -1

2) Giải: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 - y^3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 + 2xy = 1 \\ (x-y)^3 - 3xy(x-y) = -1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x - y = S \\ xy = P \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} S^2 + 2P = 1 \\ S^3 - 3SP = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{1-S^2}{2} \\ S^3 - 3S.\dfrac{1-S^2}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{1-S^2}{2} \\ 2S^3 + 3S^3 - 3S + 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{1-S^2}{2} \\ 5S^3 - 3S + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{1-S^2}{2} \\ (S+1)(5S^2 - 5S + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{1-S^2}{2} \\ (S+1)(5S^2 - 5S + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{1-S^2}{2} \\ \left[\begin{array}{l} (S+1) = 0 \\ 5S^2 - 5S + 2 = 0 \ \ (vn) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Câu 2.

1. Giải: $x^4-9x^3+24x^2-27x+9=0$ (*)

Với x = 0, (*) $\Leftrightarrow 0x+9=0$ (phương trình vô nghiệm.

Với x ≠ 0, chia 2 vế của phương trình (*) cho x^2 :

$$(*)\Leftrightarrow x^2-9x+24-\frac{27}{x}+\frac{9}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{3}{x}\right)^2-9\left(x+\frac{3}{x}\right)+18=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{3}{x}-3\right)\left(x+\frac{3}{x}-6\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{3}{x}-3=0\\ x+\frac{3}{x}-6=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+3=0\ (VN)\\ x^2-6x+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3+\sqrt{6}\\ x=3-\sqrt{6}\end{array}\right.$$

2. Ta có:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\ge 4\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+1\right)+\left(\frac{b}{c}+1\right)+\left(\frac{c}{a}+1\right)\ge 4\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+b}{b}-\frac{4a}{a+b}+\frac{b+c}{c}-\frac{4b}{b+c}+\frac{c+a}{a}-\frac{4c}{c+a}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{b(a+b)}+\frac{(b-c)^2}{c(b+c)}+\frac{(c-a)^2}{a(c+a)}\ge 0$$

Luôn đúng vì a, b, c là các số dương. Dấu bằng xẩy ra khi a = b = c.

Câu 3. *(4,5 điểm)*

1) Ta có: $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Leftrightarrow bc=a(b+c)$ (1)

TH1: Nếu a là số nguyên chẵn, suy ra $a(b+c)\ \vdots 2$, theo (1)Suy ra: $b.c\ \vdots 2$

Vậy abc chia hết cho 4

TH2: Nếu a là số nguyên lẻ. Với b và c là hai số cũng lẻ thì: $b+c\vdots 2\Rightarrow a(b+c)\vdots 2$

Mà $a.b.c$ không chia hết cho 2 (vì a, b, c đều lẻ). Suy ra mâu thuẫn.

Vậy trong hai số, b, c tồn tại ít nhất 1 số chẵn.

+ Với b chẵn, mà a lẻ nên c chẵn (vì b.c chẵn nên a(b + c) chẵn suy ra c chẵn, vì a lẻ)

Suy ra abc chia hết cho 4

+ Với c chẵn, tương tự abc chia hết cho 4

Cách khác: $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Leftrightarrow bc=a(b+c)\Leftrightarrow abc=a^2(b+c)$ (2)

Ta thấy a, b, c không thể đều là số lẻ vì nếu vây thì abc là số lẻ, còn b+c là số chẵn.

Vậy trong 3 số tồn tại ít nhất 1 số chẵn.

Nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4, từ (2) suy ra abc chia hết cho 2.

Nếu b chẵn, do a lẻ nên b + c chẵn (vì abc chẵn) suy ra c chẵn. Vậy abc chia hết cho 2.

Tương tự cho trường hợp c chẵn.

2. Dùng hàm Ơle:

Phân tích số m ra thừa số nguyên tố: $m = p_1^{x}.p_2^{y}.p_3^{z}...$

Số các số nguyên dương không vượt quá m và nguyên tố cùng nhau với m là

$$\varphi(m) = m.\left(1-\frac{1}{p_1}\right).\left(1-\frac{1}{p_2}\right).\left(1-\frac{1}{p_3}\right)....$$

Ta có: $999 = 3^3.37 \Rightarrow \varphi(999) = 999.\left(1-\frac{1}{3}\right).\left(1-\frac{1}{37}\right) = 648$

Có 648 số nguyên tố cùng nhau với 999 và không vượt quá 999.

Vây có 649 số nguyên tố cùng nhau với 999 và không vượt quá 1000.

Cách khác:

Gọi A là số các số nguyên dương không vượt quá 1000. Suy ra A = 1000

B là số các số nguyên dương không vượt quá 1000 mà không nguyên tố cùng nhau với 999.

C là số các số nguyên dương không vượt quá 1000 nguyên tố cùng nhau với 999

Ta có: $999 = 3^3.37$

B = (Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 3) – (Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 37 mà không chia hết cho 3)

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 3 là: $\frac{999-3}{3}+1 = 333$

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 37 là:
$\frac{999-37}{37}+1 = 27$

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho cả 37 và 3 (chia hết cho 111) là: $\frac{999-111}{111}+1 = 9$

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 37 mà không chia hết cho 3 là: $27-9=18$

Suy ra B = 333+ 18 = 351. Vậy C= A – B = 1000 – 351 = 649

Câu 4.

Ta có: $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{99}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

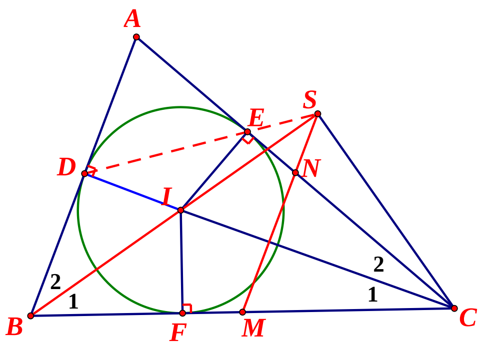
$= \left(\sqrt{2}-1\right) + 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + 3\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right) + ... + 98\left(\sqrt{99}-\sqrt{98}\right) + 99\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)$ và

$= -1-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{4}-...-\sqrt{99}+99\sqrt{100}$

$B = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+...+\sqrt{100}$

$\Rightarrow A + B = 100\sqrt{100} - 1 = 999$

Câu 5.



a) Gọi F là tiếp điểm của BC với đường tròn (I)

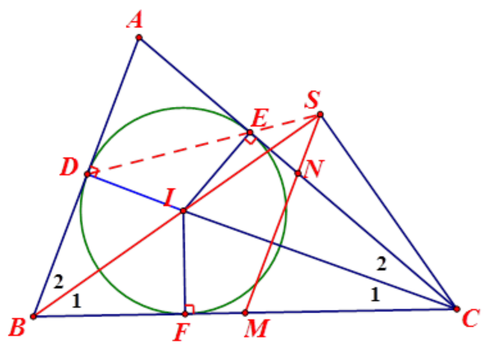
Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có:

AD = AE; BD = BF; CE = CF

Suy ra: AB + AC – BC = (AD + DB) + (AE+ CE) – (BF + CF)

= AD + AE = 2AD.

b)



Gọi S là giao điểm của BI và MN. Ta cần chứng minh: D, E, S thẳng hàng.

Thật vậy:

Do MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN//AB

$\Rightarrow B_2 = BSM$ (hai goc so le trong);$B_2 = B_1$

$\Rightarrow BSM = B_1$

Suy ra tam giác MBS cân tại M nên MB = MS = MC.

Tam giác BSC có đường trung tuyến SM=1/2BC nên tam giác BSC vuông tại S.

Ta có:

Tứ giác IECF và IESC là các tứ giác nội tiếp (đường tròn đường kính IC)

Nên 5 điểm I, E, S, C, F cùng thuộc đường tròn đường kính IC

Ta có:

$\Rightarrow \mathrm{SEC} = \mathrm{SIC}$; $\mathrm{SIC} = \mathrm{B}_1 + \mathrm{C}_1$ (góc ngoài của tam giác)

$\Rightarrow \mathrm{SEC} = \mathrm{B}_1 + \mathrm{C}_1$ (1)

Lại có tam giác ADE cân tại A

nên: $\mathrm{AED} = \mathrm{ADE} = \dfrac{180^0 - \mathrm{A}}{2} = 90^0 - \dfrac{\mathrm{A}}{2} = \mathrm{B}_1 + \mathrm{C}_1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\mathrm{SEC} = \mathrm{AED}$ mà A, E, C thẳng hàng nên D, E, S thẳng hàng.

Vậy ba đường thẳng BI, DE, MN đồng quy.

Cách khác: Gọi P là giao điểm của DE và BI. Đi chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Đề số 6

Câu 1. 1) Với điều kiện $x > 0, x \neq 4$, ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{x-5}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} \right)$$

$$= \frac{x-\left(x-\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)} : \frac{(x-4)-(x-5)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)} . \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{1}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$$

Vậy $P = \dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}} \quad (x > 0, x \neq 4)$

2) - Chứng minh M là số chẵn

$$a = \sqrt[3]{7+\sqrt{50}} = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(1+\sqrt{2}\right)^3} = 1+\sqrt{2}$$

$$b = \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(1-\sqrt{2}\right)^3} = 1-\sqrt{2})$$

$$M = a+b = \left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right) = 2$$

- Chứng minh N là số chẵn

$a+b=2$; $a.b = \left(1+\sqrt{2}\right).\left(1-\sqrt{2}\right) = -1$; $a^2+b^2 = \left(a+b\right)^2 - 2ab = 6$

$$N = a^7+b^7 = \left(a^7+a^4b^3\right)+\left(b^7+a^3b^4\right)-\left(a^4b^3+a^3b^4\right)$$

$$= a^4\left(a^3+b^3\right)+b^4\left(a^3+b^3\right)-a^3b^3\left(a+b\right)$$

$$=\left(a^3+b^3\right).\left(a^4+b^4\right)+2$$

$$=(a+b)\left(a^2+b^2-ab\right)\left[\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2\right]+2=2(7.34+1)\vdots 2$$

Vậy *M, N* là các số chẵn.

Chú ý :

- Học sinh có thể tính M bằng cách đưa về phương trình bậc 3: $M^3+3M-14=0$*, giải ra được nghiệm M = 2. Mỗi ý dưới đây cho 0,5 điểm.*

$$M^3=\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)^3=14+3.\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}.\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)$$

$$M^3=14-3M \Leftrightarrow (M-2)\left(M^2+2M+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow M=2 \text{ vì } M^2+2M+7=(M+1)^2+6>0$$

- Học sinh có thể chứng minh N là số chẵn bằng cách đặt :

$S_n=\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n$ *rồi xây dựng công thức* $S_{n+1}=2S_n+S_{n-1}$ *để chỉ ra* S_7 *là số chẵn hoặc có thể khai triển* $\left(1+\sqrt{2}\right)^7+\left(1-\sqrt{2}\right)^7$ *để tính N thì đều cho 0,5đ.*

Câu 2.

1) Vì Phương trình $x^2+2kx+4=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 nên $\Delta'\geq 0$.

$\Leftrightarrow k^2-4\geq 0 \Leftrightarrow k^2\geq 4$ (1); Theo hệ thức Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1+x_2=-2k \\ x_1.x_2=4 \end{cases}$.

Do đó :

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2\leq 3 \Leftrightarrow \frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^2x_2^2}\leq 3 \Leftrightarrow \frac{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}{x_1^2x_2^2}\leq 5 \Leftrightarrow \left(\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}\right)^2\leq 5$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4k^2-8}{4}\right)^2\leq 5 \Leftrightarrow \left(k^2-2\right)^2\leq 5 \Leftrightarrow -\sqrt{5}\leq k^2-2\leq\sqrt{5} \Leftrightarrow 0\leq k^2\leq 2+\sqrt{5} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra : $4\leq k^2\leq 2+\sqrt{5} \Leftrightarrow -\sqrt{2+\sqrt{5}}\leq k\leq -2$

Hoặc $2\leq k\leq\sqrt{2+\sqrt{5}}$

Vậy tất cả các giá trị của k cần tìm là : $-\sqrt{2+\sqrt{5}}\leq k\leq -2$ và $2\leq k\leq\sqrt{2+\sqrt{5}}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $x=y=0$.

2) Trừ theo vế các phương trình (1) và (2) ta được:

$$\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right)+3(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-y=0 \text{ hoặc } \frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3=0 \qquad (*)$$

Trường hợp 1: $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$. Thay $y=x$ vào (1) ta được phương trình:

$$\sqrt{x^2+1}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=(x+1)^2 \\ x \ge -1 \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $x=0 \Rightarrow x=y=0$.

Trường hợp 2: $\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3=0$.

Xét $A=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3=\dfrac{\left(3\sqrt{x^2+1}+x\right)+\left(3\sqrt{y^2+1}+y\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}$.

Ta có: $3\sqrt{x^2+1}+x>3\sqrt{x^2}+x=3|x|+x=2|x|+(|x|+x)\ge 0$.

Tương tự: $3\sqrt{y^2+1}+y>0$

Suy ra: $A>0$. Trường hợp 2 không xảy ra.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $x=y=0$.

Cách 2 :

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=2y+1 \\ y+\sqrt{y^2+1}=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1}=2y-x+1 \\ \sqrt{y^2+1}=2x-y+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y-x+1\ge 1 \quad (1) \\ 2x-y+1\ge 1 \quad (2) \\ x^2+1=4y^2+4y+1-4xy-2x+x^2 \quad (3) \\ y^2+1=4x^2+4x+1-4xy-2y+y^2 \quad (4) \end{cases}$$

Trừ theo vế các phương trình (3) và (4) ta được phương trình :

$$(x-y)\left[4(x+y)+6\right]=0 \Leftrightarrow x=y \text{ hoặc } 4(x+y)+6=0:$$

Cộng theo vế các bất phương trình (1) và (2) ta được : $x+y\ge 0$, suy ra trường hợp $4(x+y)+6=0$ không xảy ra.

Trường hợp $x=y$, thay vào (3) ta được: $x=y=0$.

Câu 3.

1. Đặt $a=xy, b=x+y \Rightarrow a\in Z, b\in Z, b^2\ge 4a$ (*)

Phương trình (1) trở thành: $a^2b+b=a+2$.

$$\Leftrightarrow b=\frac{a+2}{a^2+1}$$

$$\Rightarrow a+2 \vdots a^2+1 \Rightarrow a^2-4 \vdots a^2+1 \Rightarrow (a^2+1)-5 \vdots a^2+1 \Rightarrow 5 \vdots a^2+1$$

$$\Rightarrow a^2+1\in\{1;5\} \Rightarrow a^2\in\{0;4\} \Rightarrow a\in\{0;-2;2\}$$

Nếu $a=0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow \begin{cases} xy=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow (x,y)\in\{(0;2),(2;0)\}$

Nếu $a=-2 \Rightarrow b=0 \Rightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$ (loại vì không thỏa mãn $x, y \in Z$)

Nếu $a=2 \Rightarrow b=\frac{4}{5}$, loại vì không thỏa mãn $b \in Z$.

Vậy nghiệm nguyên (x, y) của phương trình đã cho là: $(0;2),(2;0)$.

Cách khác: Đưa phương trình về dạng : $(x+y)(xy)^2-xy+(x+y-2)=0$

Đặt $t=xy, t \in Z$ ta được phương trình ẩn t: $(x+y)t^2-t+(x+y-2)=0$ (1)

Nếu $x+y=0 \Rightarrow xy=-2 \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ (Loại)

*) Nếu $x+y \neq 0$, ta có phương trình bậc 2 ẩn t:

$$(x+y)t^2-t+(x+y-2)=0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta=1-4(x+y)(x+y-2) \geq 0 \Leftrightarrow (x+y-1)^2 \leq \frac{5}{4}$$

$\Leftrightarrow (x+y-1)^2 \in \{0;1\} \Leftrightarrow (x+y-1) \in \{-1;0;1\} \Leftrightarrow x+y \in \{1;2\}$

*) Nếu $x+y=1 \Rightarrow \begin{cases} xy=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ xy=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ (loại)

*) Nếu $x+y=2 \Rightarrow \begin{cases} xy=0 \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(0;2),(2;0)\}$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm nguyên (x, y) của phương trình đã cho là: $(0;2),(2;0)$.

2. Cho $n \in N^*$. Chứng minh rằng nếu $2n$ + 1 và $3n$ + 1 là các số chính phương thì n chia hết cho 40.

Giả sử $2n+1=m^2$, $3n+1=k^2$ $(m,k \in N^*)$ $\Rightarrow m^2$ là số lẻ $\Rightarrow m$ là số lẻ.

$\Rightarrow 2n=m^2-1=(m-1)(m+1) \vdots 4$, Suy ra : n chẵn, k lẻ

Vì k là số lẻ nên $k-1, k+1$ là hai số chẵn liên tiếp và (3, 8) = 1 nên

Từ $3n+1=k^2 \Rightarrow 3n=k^2-1=(k-1)(k+1) \vdots 8 \Rightarrow n \vdots 8$ (1)

Khi chia một số chính phương cho 5 thì số dư chỉ có thể là 0 ; 1 ; 4. Ta xét các trường hợp:

Nếu n chia cho 5 dư 1 thì 2n + 1 chia cho 5 dư 3. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 2 thì 3n + 1 chia cho 5 dư 2. (vô lí)

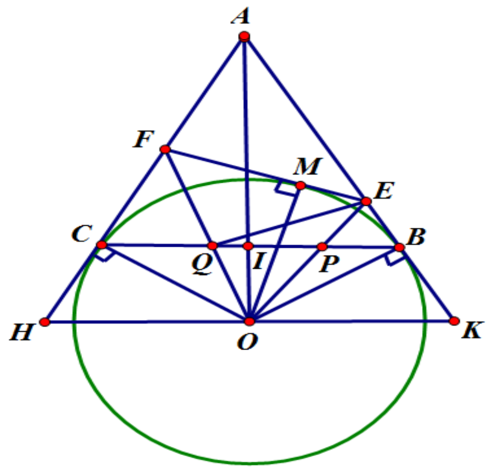
Nếu n chia cho 5 dư 3 thì 2n + 1 chia cho 5 dư 2. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 4 thì 3n + 1 chia cho 5 dư 3. (vô lí)

Vì (5, 8) = 1 nên từ (1) và (2) suy ra n chia hết cho 40.

Vậy $n \vdots 5$ (2)

Câu 4.



1. Từ tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, suy ra : $OI \perp BC$.

$\Rightarrow ABI = BOI$ (vì cùng phụ với BAO).

$$\Rightarrow \cos ABI = \cos BOI = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow ABI = BOI = 60^0 \quad (1)$$

Từ tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau suy ra OF, OE lần lượt là các tia phân giác của các góc COM và MOB. Suy ra:

$$FOM = \frac{COM}{2}; MOE = \frac{MOB}{2} \Rightarrow \text{EOF} = FOM + MOE = \frac{COM + MOB}{2} = \frac{BOC}{2} = BOI \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $ABI = EOF = 60^0$ hay $QBE = QOE \Rightarrow$ Tứ giác $OBEQ$ nội tiếp.

2. Ta có: $OQB = OEB$ (cùng chắn cung OB của đường tròn $(OBEQ)$).

$OEF = OEB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow OQB = OEF$ hay $OQP = OEF$

$$\Rightarrow \Delta OQP \sim \Delta OEF\ (g.g)\ \text{(vì có } OQP = OEF, QOP \text{ là góc chung)} \Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{OQ}{OE} \quad (3)$$

Vì tứ giác $OBEQ$ nội tiếp và $OBE = 90^0, QBE = 60^0$ nên:

$OQE = 180^0 - OBE = 90^0$; $OEQ = OBQ = OBE - QBE = 30^0$

$\Rightarrow \Delta OQE$ vuông tại Q và $OEQ = 30^0$.

$$\Rightarrow \frac{OQ}{OE} = \sin OEQ = \sin 30^0 = \frac{1}{2} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra : $\frac{PQ}{EF} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow EF = 2PQ$.

3. Vì $\Delta OQP \sim \Delta OEF$ theo tỉ số đồng dạng $\frac{EF}{PQ} = 2$ nên

$$\frac{S_{OPQ}}{S_{OEF}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow S_{OPQ} = \frac{S_{OEF}}{4} = \frac{OM.EF}{8} = \frac{R.EF}{8} \qquad (5).$$

Kẻ qua O một đường thẳng vuông góc với OA, cắt AC, AB theo thứ tự tại H, K. Ta có:

$BKO = BOI = 60^0$ (Vì cùng phụ với BAO)

$$HC = KB = OB.\cot BKO = OB.\cot 60^0 = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$EF = FM + EM = FC + EB = (HF - HC) + (KE - KB) = (HF + KE) - (HC + KB)$$

$$= (HF + KE) - 2HC \geq 2\sqrt{HF.KE} - \frac{2R}{\sqrt{3}} \qquad (6)$$

Mặt khác , $FHO = AOC = 60^0$, $EKO = AOB = 60^0$ nên dễ chứng minh được $\Delta HFO \backsim \Delta KOE$ (vì cùng đồng dạng với tam giác OFE)

$$\Rightarrow \frac{HF}{OK} = \frac{HO}{KE} \Leftrightarrow HF.KE = OK.OH = OK^2 = \left(\frac{R}{\sin 60^0}\right) = \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 \qquad (7)$$

Từ (5), (6), (7) suy ra : $S_{OPQ} = \dfrac{R.EF}{8} \geq \dfrac{R\left(\dfrac{4R}{\sqrt{3}} - \dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)}{8} = \dfrac{R^2}{4\sqrt{3}}$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $KE = HF = OH = OK \Leftrightarrow FM = EM \Leftrightarrow MC = MB \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung BC.

Vậy để tam giác OPQ có diện tích nhỏ nhất thì M là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{R^2}{4\sqrt{3}}$.

Cách khác: Vì $\Delta OQP \sim \Delta OEF$ theo tỉ số đồng dạng $\dfrac{EF}{PQ} = 2$ nên

$$\frac{S_{OPQ}}{S_{OEF}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow S_{OPQ} = \frac{S_{OEF}}{4} = \frac{1}{8}(S_{ABOC} - S_{AEF}) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}OA.BC - S_{AEF}\right) = \frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3} - S_{AEF}\right)$$

Sử dụng công thức : Hê-Rông. Tính diện tích S của tam giác có độ dài ba cạnh a, b, c.

$$\Rightarrow S^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{16}$$

$$\leq \frac{(a+b+c)\left[(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)\right]^3}{16.27} = \left(\frac{(a+b+c)^2}{4.3\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow S \leq \frac{(a+b+c)^2}{4.3\sqrt{3}}$$

$$S_{OPQ}=\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-S_{AEF}\right)\geq\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-\frac{\left(AE+EF+FA\right)^2}{4.3\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-\frac{\left[AE+\left(EM+MF\right)+AF\right]^2}{4.3\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-\frac{\left[AE+\left(EB+FC\right)+AF\right]^2}{4.3\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-\frac{\left[\left(AE+EB\right)+\left(AF+FC\right)\right]^2}{4.3\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-\frac{\left[AB+AC\right]^2}{4.3\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-\frac{\left(2AB\right)^2}{4.3\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3}-\frac{\left(2.2R.\sin\widehat{AOB}\right)^2}{4.3\sqrt{3}}\right)=\frac{R^2}{4\sqrt{3}}$$

Câu 5. Ta có $x+y+1=z\Leftrightarrow z+xy=x+y+1+xy=\left(x+1\right)\left(y+1\right)$

$$x+yz=x+y\left(x+y+1\right)=x+xy+y^2+y=\left(x+y\right)\left(y+1\right)$$

$$y+xz=y+x\left(x+y+1\right)=\left(x+y\right)\left(x+1\right)$$

$$\Rightarrow P=\frac{x^3y^3}{\left(x+y\right)^2\left(x+1\right)^3\left(y+1\right)^3}.$$

Vì $\begin{cases}\left(x+y\right)^2\geq 4xy\\ x>0\\ y>0\end{cases}\Rightarrow P\leq\frac{x^3y^3}{4xy\left(x+1\right)^3\left(y+1\right)^3}=\frac{x^2y^2}{4\left(x+1\right)^3\left(y+1\right)^3}.$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số thực dương, ta có:

$$x+1=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}\Leftrightarrow\left(x+1\right)^3\geq\frac{27x^2}{4}\Leftrightarrow 0<\frac{x^2}{\left(x+1\right)^3}\leq\frac{4}{27}.$$

Tương tự: $0<\frac{y^2}{\left(y+1\right)^3}\leq\frac{4}{27}$.

$P=\frac{x^2y^2}{4\left(x+1\right)^3\left(y+1\right)^3}\leq\frac{1}{4}.\frac{4}{27}.\frac{4}{27}=\frac{4}{729}$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=1\\ z=x+y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=2\\ z=5\end{cases}$

Vậy MaxP=$\frac{4}{729}$, đạt được tại $\begin{cases}x=y=2\\ z=5\end{cases}$.

Cách khác :

$$\frac{1}{P}=\frac{\left(x+yz\right)\left(y+xz\right)\left(z+xy\right)^2}{x^3y^3}=\frac{x+yz}{y}.\frac{y+xz}{x}.\frac{\left(z+xy\right)^2}{x^2y^2}=\left(\frac{x}{y}+z\right)\left(\frac{y}{x}+z\right)\left(\frac{z}{xy}+1\right)^2$$

$$\frac{1}{P}=\left(1+\frac{zy}{x}+\frac{zx}{y}+z^2\right)\left(\frac{z}{xy}+1\right)^2=\left[1+\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)z+z^2\right]\left(\frac{z}{xy}+1\right)^2$$

Vì $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2;\quad\frac{1}{xy}\geq\frac{4}{\left(x+y\right)^2};\quad x+y=z-1$ nên:

$$\frac{1}{P} \ge \left(1+2z+z^2\right)\left(\frac{4z}{\left(x+y\right)^2}+1\right)^2 = \left(1+z\right)^2\left(\frac{4z}{\left(z-1\right)^2}+1\right)^2 = \left(\frac{4z\left(z+1\right)}{\left(z-1\right)^2}+z+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{P} \ge \left(\frac{4z\left(z+1\right)}{\left(z-1\right)^2}+z+1\right)^2 = \left[6+\frac{12}{z-1}+\frac{8}{\left(z-1\right)^2}+\left(z-1\right)\right]^2$$

Đặt $t = z-1,$

$$\Rightarrow \frac{1}{P} \ge \left(6+\frac{12}{t}+\frac{8}{t^2}+t\right)^2 = \left[6+\left(\frac{12}{t}+\frac{3t}{4}\right)+\left(\frac{8}{t^2}+\frac{t}{8}+\frac{t}{8}\right)\right]^2$$

$$\ge \left(6+2\sqrt{\frac{12}{t}.\frac{3t}{4}}+3\sqrt[3]{\frac{8}{t^2}.\frac{t}{8}.\frac{t}{8}}\right)^2 = \frac{729}{4} \Leftrightarrow P \le \frac{4}{729}$$

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow t=4, x=y \Leftrightarrow x=y=2, z=5.$

Vậy $\text{MaxP} = \frac{4}{729}$, đạt được tại $\begin{cases} x=y=2 \\ z=5 \end{cases}.$

Đề số 7

Câu 1.

1. a) Điều kiện xác định: $1 < x \ne 10$

Đặt $a = \sqrt{x-1}; 0 < a \ne 3$

Khi đó

$$P = \left(\frac{a}{3+a}+\frac{a^2+9}{\left(3-a\right)\left(3+a\right)}\right):\left(\frac{3a+1}{a^2-3a}-\frac{1}{a}\right)$$

$$= \left(\frac{a\left(3-a\right)+a^2+9}{\left(3-a\right)\left(3+a\right)}\right):\left(\frac{3a+1}{a\left(a-3\right)}-\frac{1}{a}\right)$$

$$= \frac{3a+9}{\left(3-a\right)\left(3+a\right)}:\frac{3a+1-a+3}{a\left(a-3\right)} = \frac{3\left(a+3\right)}{\left(3-a\right)\left(3+a\right)}:\frac{2a+4}{a\left(a-3\right)}$$

$$= \frac{3\left(a+3\right)}{\left(3-a\right)\left(3+a\right)}.\frac{a\left(a-3\right)}{2a+4} = \frac{-3a}{2a+4} = \frac{-3\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}+4}$$

b) Ta có:

$$x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} - \left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} + \sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|$$

$$= \sqrt{2}+1-\left(\sqrt{5}+1\right)\left|1-\sqrt{2}\right| + \sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|$$

$$= \sqrt{2}+1-\sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right| - \left|1-\sqrt{2}\right| + \sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|$$

$$= \sqrt{2}+1-\left(\sqrt{2}-1\right) = 2.$$

Vậy $P=\dfrac{-3\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1+4}=-\dfrac{1}{2}$.

2. Ta có

$$P=2x^4+x^3(2y-1)+y^3(2x-1)+2y^4$$
$$=2x^4+2x^3y-x^3+2xy^3-y^3+2y^4$$
$$=x^3(2x+2y)+y^3(2x+2y)-(x^3+y^3)$$
$$=(2x+2y)(x^3+y^3)-(x^3+y^3)$$
$$=(2x+2y-1)(x^3+y^3)=x^3+y^3$$

Do $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^2-xy+y^2=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)+\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{y}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$\Rightarrow P\ge\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

Mà

$$x+y=1\Rightarrow x^2+y^2+2xy=1\Rightarrow 2(x^2+y^2)-(x-y)^2=1$$
$$\Rightarrow 2(x^2+y^2)\ge 1\Rightarrow (x^2+y^2)\ge\frac{1}{2}\Rightarrow P\ge\frac{1}{4}$$

Dấu "=" xẩy ra khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{1}{4}$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Câu 2.

1. Điều kiện: $x\ge\dfrac{3}{2}$

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{4x}+\sqrt{x+2}=\sqrt{3x+5}+\sqrt{2x-3}$$
$$\Leftrightarrow 4x+x+2+2\sqrt{4x(x+2)}=3x+5+2x-3+2\sqrt{(3x+5)(2x-3)}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{4x(x+2)}=\sqrt{(3x+5)(2x-3)}\Leftrightarrow 4x(x+2)=(3x+5)(2x-3)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-7x-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=5 & (n)\\ x=\dfrac{-3}{2} & (l)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=5$.

2. Ta có $\begin{cases}xy-2x+y=6\\(x+1)^2+(y-2)^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(y-2)+y-2=4\\(x+1)^2+(y-2)^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)(y-2)=4\\(x+1)^2+(y-2)^2=8\end{cases}$ (*)

Đặt $a=x+1;b=y-2$ ta có hệ phương trình.

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}a.b=4\\a^2+b^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a.b=4\\(a+b)^2-2ab=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a.b=4\\(a+b)^2=16\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.b=4 \\ \left[\begin{array}{l} a+b=4 \\ a+b=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a.b=4 \\ a+b=4 \end{cases} \\ \begin{cases} a.b=4 \\ a+b=-4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1=2 \\ y-2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1=-2 \\ y-2=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Nghiệm của hệ phương trình $S=\{(1;4);(-3;0)\}$

3. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2=2x+m-1$ hay

$x^2-2x-m+1=0$ (1)

(d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=1-(-m+1)>0 \Leftrightarrow m>0$

Do A,B thuộc (P) nên $y_1=x_1^2; y_2=x_2^2$. Theo đề bài ta có

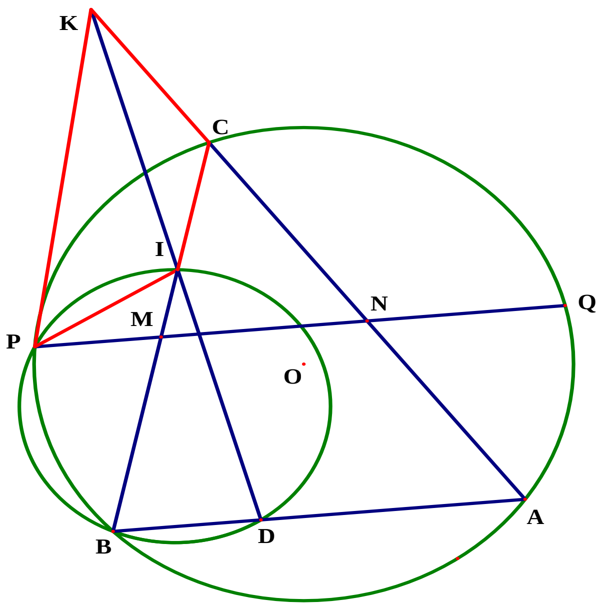
$$y_1.y_2-x_1.x_2=12 \Leftrightarrow (x_1.x_2)^2-x_1.x_2-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1.x_2=4 \\ x_1.x_2=-3 \end{array}\right.$$

Theo hệ thức Viet ta có : $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1.x_2=-m+1 \end{cases}$

Nếu $x_1.x_2=4$ thì $-m+1=4 \Rightarrow m=-3$ (loại).

Nếu $x_1.x_2=-3$ thì $-m+1=-3 \Rightarrow m=4$ (nhận). Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

Câu 3.



a) Tứ giác $BDIP$ nội tiếp. Suy ra $PIK=180^0-PID=PBA$

Mà tứ giác $CPBA$ nội tiếp. Suy ra $PCK=180^0-PCA=PBA$ $\Rightarrow PIK=PCK$. Suy ra tứ giác $CIPK$ nội tiếp.

b) Tứ giác $CIPK$ nội tiếp và tứ giác $PBDI$ nội tiếp. Suy ra $PKI=PCI$ và

$$PDI=PBI \Rightarrow \Delta PKD \sim \Delta PCB \ (g-g) \Rightarrow \frac{PK}{PC}=\frac{PD}{PB} \Rightarrow \frac{PK}{PD}=\frac{PC}{PB} \quad (1)$$

Mà tứ giác $CPBQ$ nội tiếp suy ra $QPB = BCQ$ hay $MPB = MCQ$ mặt khác $PMB = CMQ$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta MPB \sim \Delta MCQ \ (g-g) \Rightarrow \dfrac{PB}{QC} = \dfrac{MP}{MC} \quad (2)$

Chứng minh tương tự $\Rightarrow \Delta MCP \sim \Delta MQB \ (g-g) \Rightarrow \dfrac{PC}{QB} = \dfrac{MP}{MB} \quad (3)$

Từ (2) và (3) kết hợp $MB = MC \Rightarrow \dfrac{PB}{QC} = \dfrac{PC}{QB} \Rightarrow \dfrac{PC}{PB} = \dfrac{QB}{QC} \quad (4)$

Từ (1) và (4) $\Rightarrow \dfrac{PK}{PD} = \dfrac{QB}{QC} \Rightarrow PK.QC = QB.PD$

c) Do tứ giác $BDGI$ và tứ giác $CPBA$ nội tiếp. Suy ra $PGI = PBI$ và

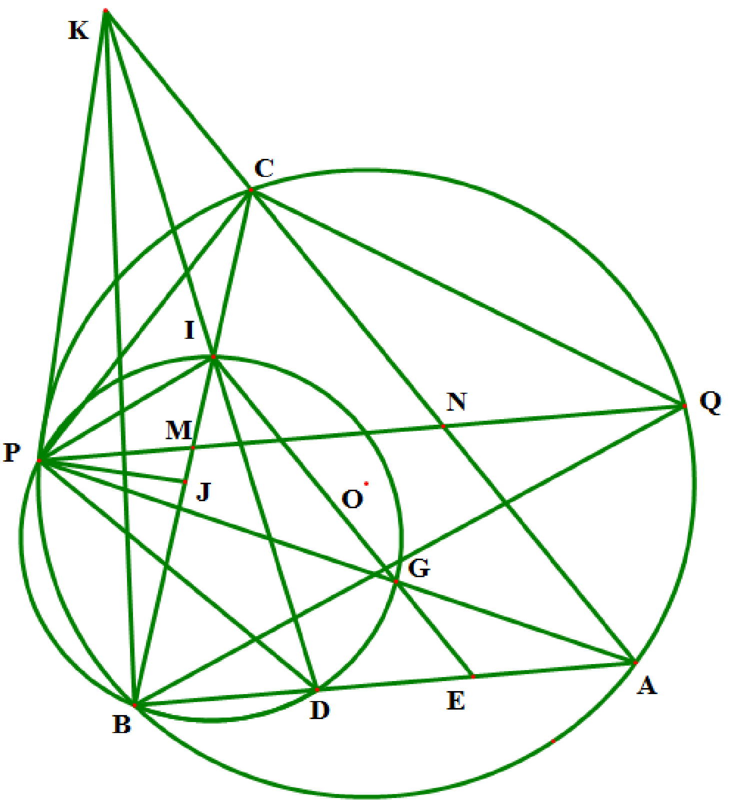
$PBC = PAC \Rightarrow PGI = PAC \Rightarrow IG // CA \Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{KD}{KI} \quad (5)$

Trên BC lấy J sao cho $KPI = CPJ$. Tứ giác $CIPK$ nội tiếp, có $IPK = 180^0 - KCI = BCA$ không đổi.

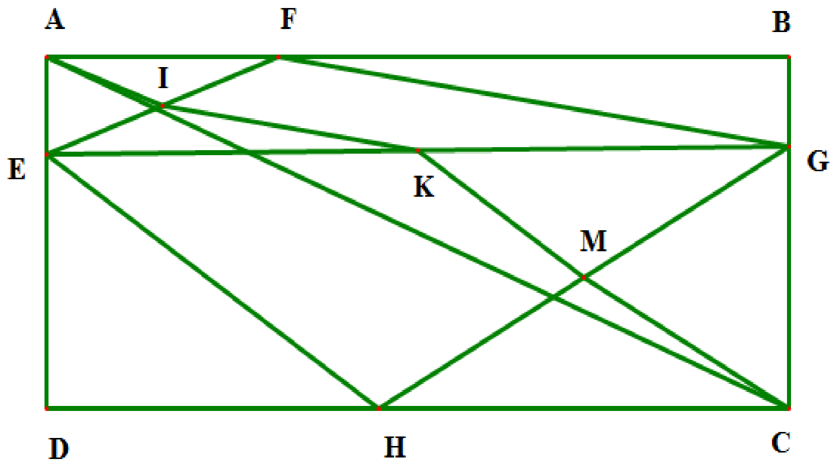
Suy ra J là điểm cố định $\Rightarrow \dfrac{CB}{CJ}$ không đổi (6).

Lại có $\Rightarrow \Delta PKI \sim \Delta PCJ \ (g-g)$ và $\Delta PKD \sim \Delta PCB \ (g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{KI}{CJ} = \dfrac{PK}{PC} = \dfrac{KD}{CB} \Rightarrow \dfrac{KD}{KI} = \dfrac{CB}{CJ}$ (7).Từ (5), (6) và (7) suy ra $\dfrac{AD}{AE}$ không đổi.



Câu 4.



Gọi I, K, M theo thứ tự là trung điểm của EF, EG, GH. ΔAEF vuông tại A và có AI là đường trung tuyến nên $AI = \frac{1}{2}EF$.

Tương tự $MC = \frac{1}{2}GH$. IK là đường trung bình của ΔAFG nên $IK = \frac{1}{2}FG$. Tương tự $KM = \frac{1}{2}EH$

$c = EF + FG + GH + HE = 2(AI + IK + KM + MC)$.

Ta có $AI + IK + KM + MC \geq AC$ (vì đường gấp khúc $AIKMC \geq AC$). Suy ra $c \geq 2AC = 2\sqrt{a^2 + b^2}$

Câu 5.

1. Đặt $\sqrt{x} = a, a > 0$, $y^2 = b, b > 0$.

$4y^4 + 6y^2 - 1 = x$

$\Leftrightarrow 4b^2 + 6b - 1 = a^2$

$\Leftrightarrow 16b^2 + 24b - 4 = 4a^2$

$\Leftrightarrow 16b^2 + 24b + 9 - 4a^2 = 13$

$\Leftrightarrow (4b+3)^2 - 4a^2 = 13$

$\Leftrightarrow (4b+3-2a)(4b+3+2a) = 13$

Lập bảng

$4b+3-2a$	1	13
$4b+3+2a$	13	1
a	3	-3
b	1	1
	Nhận	Loại
x	9	
y	1	

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x; y)$ là $(9;1)$.

2. Ta có n chẵn $\Rightarrow n=2k, k\in Z$. Suy ra

$$n^3+20n+96=(2k)^3+40k+96=8\left(k^3+5k\right)+96=8\left[\left(k^3-k\right)+6k\right]+96=8\left(k^3-k\right)+48k+48.2$$

Do $k-1;k;k+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên $(k-1).k.(k+1)$ chia hết cho 6

$$\Rightarrow k^3-k=(k-1).k.(k+1)\vdots 6\Rightarrow 8\left(k^3-k\right)\vdots 48, \forall k\in Z.$$

Vậy với mọi số nguyên n chẵn thì $n^3+20n+96$ chia hết cho 48.

Đề số 8

Câu 1.

Ta có: $3x+2\sqrt{3x}+4=\left(\sqrt{3x}+1\right)^2+3>0;\ \forall x\geq 0$

nên điều kiện để A có nghĩa là $\left(\sqrt{3x}\right)^3-8=\left(\sqrt{3x}-2\right)\left(3x+2\sqrt{3x}+4\right)\neq 0;\ \forall x\geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{3x}-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq x\neq \frac{4}{3}$$

$$A=\frac{6x+4}{\left(\sqrt{3x}\right)^3-8}-\frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4}$$

$$A=\frac{6x+4-\left(\sqrt{3x}-2\right)\sqrt{3x}}{\left(\sqrt{3x}-2\right)\left(3x+2\sqrt{3x}+4\right)}$$

$$A=\frac{3x+4+2\sqrt{3x}}{\left(\sqrt{3x}-2\right)\left(3x+2\sqrt{3x}+4\right)}=\frac{1}{\sqrt{3x}-2}$$ Với $0\leq x\neq \frac{4}{3}$

+ *Với x nguyên dương, để biểu thức* A *nhận giá trị nguyên.*

thì $\frac{1}{\sqrt{3x}-2}$ nguyên. Khi đó:

$$\sqrt{3x}-2=\pm 1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{3x}=3 \\ \sqrt{3x}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x=9 \\ 3x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3 \\ x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Vì x nguyên dương nên $x=3$ khi đó $A=1$.

Vậy $x=3$

Câu 2.

a) PT (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta'=m^2-5m+4>0$ (*)
$\left(hay\, m<1\vee m>4\right)$

Với ĐK (*) PT có hai nghiệm x_1, x_2.

Ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2(m-1) \\ x_1.x_2=3m-3 \end{cases}$

$$M = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + 5x_1x_2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 + 3x_1.x_2 = 4\left(m-1\right)^2 + 3\left(3m-3\right)$$

$$\Rightarrow M = 4m^2 + m - 5 = \left(2m + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{81}{16} \geq -\frac{81}{16}$$

Dấu "=" xảy ra khi $m = -\dfrac{1}{8}$ (thỏa mãn ĐK (*)).

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = -\dfrac{1}{8}$.

b) ĐK: $\Delta' = m^2 - 5m + 4 > 0$ (*)

Đặt $x - 1 = t \Rightarrow x = t + 1$ thay vào phương trình (1) ta được:

$$\left(t+1\right)^2 - 2\left(m-1\right)\left(t+1\right) + 3m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2\left(2-m\right)t + m = 0 \qquad (2)$$

PT (1) có hai nghiệm phân biệt x lớn hơn 1 khi PT (2) có hai nghiệm phân biệt t lớn hơn 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 4 > 0 \\ m > 0 \\ 2m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(m-1\right)\left(m-4\right) > 0 \\ m > 0 \\ 2m - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \vee m > 4 \\ m > 0 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4 \text{ thỏa mãn ĐK (*).}$$

Vậy $m > 4$.

Câu 3.

a) Với x = 0, phương trình (1) có dạng: 0 = 6 (vô lý).

Vậy x = 0 không là nghiệm của PT (1).

$x \neq 0$, ta có $(1) \Leftrightarrow \dfrac{2}{2x - 5 + \dfrac{3}{x}} + \dfrac{13}{2x + 1 + \dfrac{3}{x}} = 6$

Đặt $2x + \dfrac{3}{x} = t$, PT (1) trở thành $\dfrac{2}{t-5} + \dfrac{13}{t+1} = 6$

$$\Leftrightarrow 6t^2 - 39t + 33 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{11}{2} \end{array}\right.$$

+) Với $t = 1$ ta có PT $2x + \dfrac{3}{x} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 3 = 0$

Có $\Delta < 0$ nên PT vô nghiệm.

+) Với $t=\frac{11}{2}$ ta có PT $2x+\frac{3}{x}=\frac{11}{2}\Leftrightarrow 4x^2-11x+6=0$

PT có 2 nghiệm $x=2; x=\frac{3}{4}$ thỏa mãn bài toán.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 & (1)\\ 8y^2+x^2=12 & (2)\end{cases}$

Thế (2) vào PT(1) ta được $x^3+x^2y+2xy^2+8y^3=0$

Nếu $y=0$ thì từ (1) suy ra $x=0$ không thỏa mãn PT (2).

Xét $y\neq 0$ PT $(3)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^3+\left(\frac{x}{y}\right)^2+2.\frac{x}{y}+8=0$

Đặt $\frac{x}{y}=t$ ta được $t^3+t^2+2t+8=0$

$\Leftrightarrow(t+2)(t^2-t+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t+2=0\\ t^2-t+4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow t=-2$

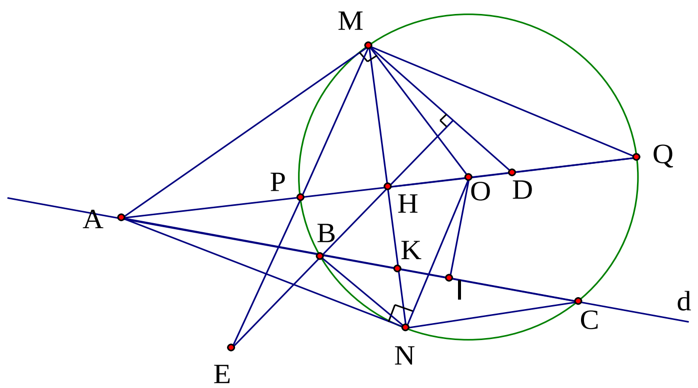
Với $t=-2\Rightarrow x=-2y$, thay vào (2) được $y^2=1\Leftrightarrow y=1\vee y=-1$

Với $y=1\Rightarrow x=-2$

$y=-1\Rightarrow x=2$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(-2;1);(2;-1)$.

Câu 4.



a) *Chứng minh 4 điểm O, M, N, I cùng nằm trên một đường tròn.*

I là trung điểm của BC (dây BC không đi qua O) $\Rightarrow OI\perp BC\Rightarrow OIA=90^0$. Ta có

$AMO=90^0$ (do AM là tiếp tuyến (O))

$ANO=90^0$ (do AN là hai tiếp tuyến (O))

Suy ra 4 điểm O, M, N, I cùng thuộc đường tròn đường kính OA

b) *Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.*

Ta có AM, AN là hai tiếp tuyến với (O) cắt nhau tại A nên OA là tia phân giác MON mà ΔOMN cân tại O nên $OA \perp MN$.

+) $\Delta ABN \backsim \Delta ANC$ (vì $ANB = ACN = \frac{1}{2}$ sđ NB và CAN chung) =>

$$\frac{AB}{AN} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AB.AC = AN^2 \ (1)$$

+) ΔANO vuông tại N đường cao NH nên ta có $AH.AO = AN^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AB.AC = AH.AO$ (3)

+) $\Delta AHK \backsim \Delta AIO$ (vì $AHK = AIO = 90^0$ và OAI chung)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AK}{AO} \Rightarrow AI.AK = AH.AO. \ (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra: $AI.AK = AB.AC \Rightarrow AK = \frac{AB.AC}{AI}$

Mà A,B,C cố định nên I cố định suy ra AK cố định, K là giao điểm của dây BC và dây MN nên K thuộc tia AB suy ra K cố định.

c) Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME.

Ta có $PMQ = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét ΔMHE và ΔQDM có $MEH = DMQ$ (cùng phụ với DMP), $EMH = MQD$ (cùng phụ với MPO)

Suy ra: $\Delta MHE \backsim \Delta QDM$ (g-g) $\Rightarrow \frac{ME}{MQ} = \frac{MH}{DQ}$ (*)

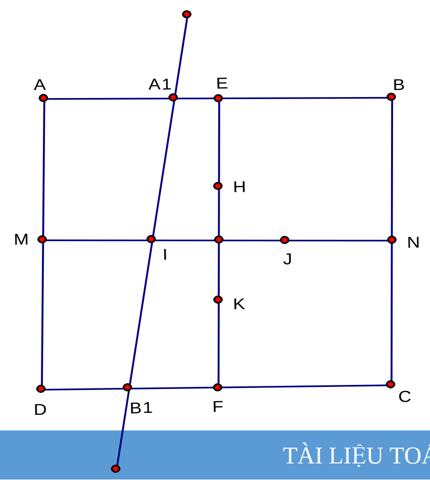
$\Delta PMH \backsim \Delta MQH$ (vì $MHP = QHM = 90^0$, $PMH = MQH$)

$$\Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{MH}{HQ} = \frac{MH}{2DQ} \ (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $\frac{MP}{MQ} = \frac{1}{2}\frac{ME}{MQ} \Rightarrow ME = 2\,MP$

$\Rightarrow$ P là trung điểm ME.

Câu 5.



Gọi MN; EF là đường nối trung điểm hai cạnh đối của hình vuông (hình vẽ)

Giả sử đường thẳng d1 cắt cạnh AB tại A_1 cắt MN tại I và cắt cạnh CD tại B_1. Ta có các tứ giác AA_1B_1D và BCB_1A_1 là hình thang và có MI, NI lần lượt là các đường trung bình của hai hình thang đó.

Khi đó

$$\frac{S_{AA_1B_1D}}{S_{A_1BCB_1}} = \frac{\frac{1}{2}AD(AA_1+DB_1)}{\frac{1}{2}BC(A_1B+B_1C)} = \frac{2IM}{2IN} = \frac{IM}{IN} = \frac{1}{2}$$

Suy ra $\frac{MI}{MN} = \frac{1}{3}$ nên $MI = \frac{1}{3}MN$ vậy điểm I cố định.

Lập luận tương tự ta tìm được các điểm H; J; K cố định.

(I, J, H, K chia các đoạn thẳng cố định MN, NM, EF, FE theo tỉ số 1:2)

Có 4 điểm cố định mà có 2019 đường thẳng đi qua nên theo nguyên lý Đirichle ít nhất phải có 505 đường thẳng đồng qui.

Đề số 9

Câu 1.

1) $x^3-5x^2+5x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+1=0 \ (*) \\ x=1 \end{array}\right.$$

Phương trình (*) có $\Delta'=3>0$ nên có 2 nghiệm phân biệt.

Không mất tổng quát coi $x_3=1$ thì $x_1,\ x_2$ là 2 nghiệm của (*).

Ta có $S=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}+\frac{1}{x_3^2}$.

Ta có $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$.

Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=1 \end{cases}$.

Thay số: $x_1^2+x_2^2=14$.

Thay số: $S=15$.

2) $$A=\left(1-\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}\right):\left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}+\frac{x-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\right) : \frac{\left(3-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+3\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)^2 + x - 9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}+3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\right) : \frac{9 - x + x - 4\sqrt{x} + 4 + x - 9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x}+3} : \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x}+3} : \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x}+3} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x}-2}.$$

Câu 2.

1. Ta có:

$$\begin{cases} (y-2x)(1-y-x) = 2x^2 - x & (1) \\ x(y-1) + \sqrt[3]{x^2 - y} = 2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (y-2x)(1-y) - x(y-2x) - x(2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2x)(1-y) - x(y-1) = 0 \Leftrightarrow (1-y)(y-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = x \end{array}\right..$$

Với $y = 1$, thay vào (2) được: $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Với $y = x$, thay vào (2) được: $x(x-1) + \sqrt[3]{x^2 - x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x + \sqrt[3]{x^2 - x} - 2 = 0.$

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2 - x}$, phương trình trở thành:

$$t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^2 + t + 2 = 0 \quad (3) \end{array}\right..$$

Phương trình (3) có $\Delta = -7 < 0$ nên vô nghiệm.

Do đó $t = 1 \Rightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Với $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Với $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$(x;y)\in\left\{(-3;1),(3;1),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

2. Phương trình xác định khi $-\frac{3}{2}\le x\le 12$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^2-2x\sqrt{2x+3}+2x+3\right)+\left(9-6\sqrt{12-x}+12-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{2x+3}\right)^2+\left(3-\sqrt{12-x}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\sqrt{2x+3}=0 & (1)\\ 3-\sqrt{12-x}=0 & (2)\end{cases}.$$

$$(1)\Leftrightarrow x=\sqrt{2x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x=-1\vee x=3\end{cases}\Leftrightarrow x=3.$$

$$(2)\Leftrightarrow\sqrt{12-x}=3\Leftrightarrow 12-x=9\Leftrightarrow x=3.$$

Vậy $\begin{cases}x-\sqrt{2x+3}=0\\ 3-\sqrt{12-x}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ x=3\end{cases}\Leftrightarrow x=3$ (tmđk).

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Câu 3.

1. Ta có:

$$x^2y^2-x^2+5y^2-22x-121=0\Leftrightarrow y^2(x^2+5)=x^2+22x+121$$

$$\Leftrightarrow y^2(x^2+5)=(x+11)^2.$$

Vì $y^2;(x+11)^2$ là các số chính phương nên x^2+5 cũng là số chính phương.

Do đó đặt $x^2+5=z^2\Leftrightarrow x^2-z^2=-5\Leftrightarrow(|x|-|z|)(|x|+|z|)=-5$

Ta có $|x|+|z|;|x|-|z|$ là các ước số của -5; $|x|+|z|$ không âm nên $|x|-|z|$ là số âm.

Suy ra $\begin{cases}|x|+|z|=5\\ |x|-|z|=-1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}|x|+|z|=1\\ |x|-|z|=-5\end{cases}$.

TH1: $\begin{cases}|x|+|z|=5\\ |x|-|z|=-1\end{cases}\Rightarrow|x|=2\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Với $x=2\Rightarrow y^2\times 9=13^2\Leftrightarrow y^2=\frac{169}{9}$ (loại).

Với $x=-2\Rightarrow y^2\times 9=9^2\Leftrightarrow y^2=9\Leftrightarrow y=\pm 3$.

TH2: $\begin{cases}|x|+|z|=1\\|x|-|z|=-5\end{cases}\Rightarrow |x|=-2$ (loại).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x;y)\in\{(-2;3);(-2;-3)\}$.

2. Ta có: $P=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}+\dfrac{1}{3xy}+\dfrac{1}{3yz}+\dfrac{1}{3zx}+\dfrac{5}{12}\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\right)$

$\geq\dfrac{16}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}+\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{9}{xy+yz+zx}$

$=\dfrac{16}{(x+y+z)^2+xy+yz+zx}+\dfrac{15}{4(xy+yz+zx)}$.

Học sinh chứng minh với $\forall x,y,z:(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$.

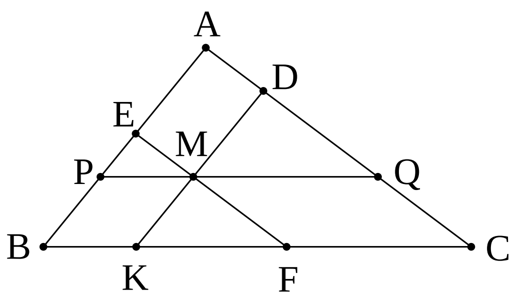
Suy ra $xy+yz+zx\leq\dfrac{(x+y+z)^2}{3}$.

$\Rightarrow P\geq\dfrac{16}{(x+y+z)^2+\dfrac{(x+y+z)^2}{3}}+\dfrac{15}{4\cdot\dfrac{(x+y+z)^2}{3}}=\dfrac{16}{2019^2+\dfrac{2019^2}{3}}+\dfrac{15}{4\cdot\dfrac{2019^2}{3}}$

$\Rightarrow P\geq\dfrac{31}{5435148}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{2019}{3}=673$.

Vậy $P_{min}=\dfrac{31}{5435148}$ khi $x=y=z=673$.

Câu 4.



1. Đặt $S_{ABC}=a^2$.

Tứ giác MQCF có MQ//FC; MF//QC (giả thiết) $\Rightarrow$ MQCF là hình bình hành $\Rightarrow MQ=FC$. Chứng minh tương tự ta có $PM=BK$.

Ta có ΔEPM đồng dạng với ΔABC nên $\dfrac{S_{EPM}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{PM}{BC}\right)^2$.

$\Rightarrow\dfrac{x^2}{a^2}=\left(\dfrac{PM}{BC}\right)^2\Rightarrow\dfrac{PM}{BC}=\dfrac{x}{a}$.

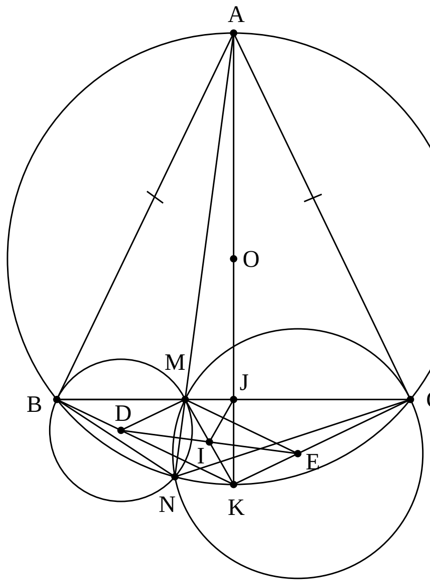
Chứng minh tương tự, ta có: + $\Delta\,DMQ$ đồng dạng với $\Delta\,ABC$ nên $\dfrac{MQ}{BC} = \dfrac{y}{a}$;

+ $\Delta\,MKF$ đồng dạng với $\Delta\,ABC$ nên $\dfrac{KF}{BC} = \dfrac{z}{a}$.

$$\Rightarrow \frac{x+y+z}{a} = \frac{PM+KF+MQ}{BC} = \frac{BK+KF+FC}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1.$$

$\Rightarrow x+y+z = a \Rightarrow S_{ABC} = (x+y+z)^2$.

2.



a) Trong (E) có $MCA = MNC$ (1) (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn MC).

Trong (D) có $MBA = BNM$ (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn MB).

$\Rightarrow MBA + MCA = BNM + MNC = BNC.$

Do đó $BNC + BAC = MBA + MCA + BAC$

$= 180°$ (tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABNC$ nội tiếp (O).

$\Rightarrow$ N thuộc đường tròn (O) do ΔABC nội tiếp đường tròn (O).

Tứ giác $ABNC$ nội tiếp (O) nên $ANC = ABC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AC).

Mà $ABC = ACB$ (do ΔABC cân tại A)

nên $ANC = ACB$ hay $ANC = ACM$ (2).

Từ $(1);(2)$ suy ra $MNC = ANC$

$\Rightarrow$ Ba điểm A, M, N thẳng hàng.

b) Vẽ đường kính AK của đường tròn tâm O. Gọi J là giao điểm của AK và BC.

$ABK = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O), $ABD = 90^\circ$ (vì đường tròn tâm D tiếp xúc với AB tại B) $\Rightarrow B, D, K$ thẳng hàng.

Chứng minh tương tự: C, E, K thẳng hàng.

Ta có: $AB = AC; OB = OC \Rightarrow A, O$ thuộc đường trung trực của BC

$\Rightarrow AO \perp BC \Rightarrow BK = CK \Rightarrow BK = CK \Rightarrow \Delta KBC$ cân tại K $\Rightarrow KBC = KCB$

ΔDBM cân tại D (vì $DB = DM$) $\Rightarrow DBM = DMB$

ΔEMC cân tại E (vì $EC = EM$) $\Rightarrow ECM = EMC$

$\Rightarrow KBC = EMC;\ KCB = DMB \Rightarrow KB // EM;\ KC // DM$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $DMEK$ là hình bình hành.

Mà I là trung điểm của DE nên I là trung điểm của MK.

ΔJMK vuông tại J có JI là đường trung tuyến $\Rightarrow JI = KI$.

JK cố định nên I thuộc đường thẳng cố định là đường trung trực của đoạn JK.

Câu 5.

1. Không mất tổng quát giả sử $p \le q \le r$.

Với $p = 2$: $2qr = q + r + 162 \Leftrightarrow 4qr - 2q - 2r = 324$

$\Leftrightarrow 2q(2r-1) - (2r-1) = 325 \Leftrightarrow (2q-1)(2r-1) = 325 = 5^2 \cdot 13$.

$3 \le 2q-1 \le 2r-1 \Rightarrow 9 \le (2q-1)^2 \le (2r-1)(2q-1) \Leftrightarrow 9 \le (2q-1)^2 \le 325 \Leftrightarrow 3 \le 2q-1 \le 18$.

Do $2q-1$ là ước của $5^2 \cdot 13$ nên $2q-1 \in \{5;13\}$.

Nếu $2q-1 = 5 \Leftrightarrow q = 3 \Rightarrow r = 33$ (loại).

Nếu $2q-1 = 13 \Leftrightarrow q = 7 \Rightarrow r = 13$ (thỏa mãn).

$pqr = p + q + r + 160 \Leftrightarrow p(qr-1) - q - r = 160$

$\Leftrightarrow (qr-1)(p-1) + qr - 1 - q - r = 160 \Leftrightarrow (qr-1)(p-1) + q(r-1) - (r-1) - 2 = 160$

$\Leftrightarrow (qr-1)(p-1) + (q-1)(r-1) = 162$.

Nếu p lẻ $\Rightarrow q;r$ lẻ $\Rightarrow (qr-1)(p-1) + (q-1)(r-1) \vdots 4$ mà 162 không chia hết cho $4 \Rightarrow$ Vô lý.

Vậy bộ ba số nguyên tố cần tìm là $(2;7;13)$ và các hoán vị.

2. Ta xếp các đoạn thẳng theo thứ tự có độ dài tăng dần $a_1 \le a_2 \le .... \le a_8$.

Nếu tồn tại 3 đoạn thẳng $a_k; a_{k+1}; a_{k+2}$ thoả mãn $a_k + a_{k+1} > a_{k+2}$ thì ba đoạn thẳng này có thể ghép thành tam giác.

Giả sử ngược lại

$$a_1 + a_2 \le a_3$$
$$a_2 + a_3 \le a_4$$
$$a_3 + a_4 \le a_5$$
$$a_4 + a_5 \le a_6$$
$$a_5 + a_6 \le a_7$$
$$a_6 + a_7 \le a_8$$

Khi đó, theo giả thiết:

$$a_1 > 10; a_2 > 10 \Rightarrow a_3 > 20 \Rightarrow a_4 > 30 \Rightarrow a_5 > 50 \Rightarrow a_6 > 80 \Rightarrow a_7 > 130 \Rightarrow a_8 > 210$$

, mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy tồn tại 3 đoạn thẳng $a_k; a_{k+1}; a_{k+2}$ mà $a_k + a_{k+1} > a_{k+2}$.

Do đó tồn tại 3 đoạn thẳng để có thể ghép thành tam giác.

Đề số 10

Câu 1.

1. Ta có $7 - 2\sqrt{10} = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^2$; $\quad 9 + 4\sqrt{2} = \left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2$

và $89 - 28\sqrt{10} = \left(7 - 2\sqrt{10}\right)^2$

Do đó $P = \dfrac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^2}} - \dfrac{1 - \sqrt{\left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2}}{7 - \sqrt{\left(7 - 2\sqrt{10}\right)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2}} - \dfrac{1 - \left(1 + 2\sqrt{2}\right)}{7 - \left(7 - 2\sqrt{10}\right)}$

$= \dfrac{4}{\sqrt{5}} + \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{10}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$ $\quad$ Vậy $P = \sqrt{5}.$

2. Ta có:

$$\frac{xz}{z + \sqrt{z^2 + 1}} + \frac{z}{y} = \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{y} \Leftrightarrow \frac{xz}{z + \sqrt{z^2 + 1}} = \frac{\sqrt{z^2 + 1} - z}{y} \Leftrightarrow xyz = \left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)\left(\sqrt{z^2 + 1} - z\right) \Leftrightarrow xyz = 1.$$

Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{xy} + x\sqrt{yz} + 1} = \dfrac{1}{\sqrt{xy} + \sqrt{x}\sqrt{xyz} + 1} = \dfrac{1}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1}$

$$\frac{1}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1\right)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xyz} + \sqrt{xy} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{xy} + \sqrt{x}}$$

Và $\dfrac{1}{\sqrt{zx} + \sqrt{z} + 1} = \dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{zx} + \sqrt{z} + 1\right)} = \dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x^2yz} + \sqrt{xyz} + \sqrt{xy}} = \dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + 1 + \sqrt{xy}}$

Do đó $\dfrac{1}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{zx} + \sqrt{z} + 1} = \dfrac{1}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1} + \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{xy} + \sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + 1 + \sqrt{xy}} = 1$

Vậy $\frac{1}{\sqrt{xy}+x\sqrt{yz}+1}+\frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}+\frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1}=1$ khi $x,y,z>0$ thỏa mãn $\frac{xz}{z+\sqrt{z^2+1}}+\frac{z}{y}=\frac{\sqrt{z^2+1}}{y}$.

Câu 2.

1. Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.

+) Nhận xét $x^2+2>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$; $\sqrt{x^4+4}>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$, $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó từ (1) suy ra $x>0$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x+1+\frac{2}{x}=\frac{4\sqrt{5}}{15}\left(x+\frac{2}{x}\right)\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}$

$$\Leftrightarrow x+\frac{2}{x}+1=\frac{4\sqrt{5}}{15}\left(x+\frac{2}{x}\right)\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}\Leftrightarrow x+\frac{2}{x}+1=\frac{4\sqrt{5}}{15}\left(x+\frac{2}{x}\right)\sqrt{\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-4}$$

Đặt $a=x+\frac{2}{x}$ (điều kiện $a\ge 2\sqrt{2}$)

Khi đó ta có phương trình $\Leftrightarrow 15(a+1)=4\sqrt{5}a\sqrt{a^2-4}\Leftrightarrow 45(a+1)^2=16a^2\left(a^2-4\right)$

$\Leftrightarrow 16a^4-109a^2-90a-45=0\Leftrightarrow (a-3)\left(16a^3+48a^2+35a+15\right)=0$

$\Leftrightarrow a=3$ (vì $16a^3+48a^2+35a+15>0\quad \forall a\ge 2\sqrt{2}$)

+) Với $a=3$ ta có $x+\frac{2}{x}=3\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.$ (thỏa mãn đk).

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=1;\ x=2$.

2. Điều kiện: $\begin{cases}xy\ne 0\\ x+y\ge 1\\ x\ge 0\end{cases}$ $(*)$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2-1}{xy}+4-\frac{2(x+y-1)}{x+y}=0\Leftrightarrow \frac{(x+y)^2-1}{xy}-\frac{2(x+y-1)}{x+y}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y-1)(x+y+1)}{xy}-\frac{2(x+y-1)}{x+y}=0\Leftrightarrow (x+y-1)\frac{\left(x^2+y^2+x+y\right)}{xy(x+y)}=0$$

$\Leftrightarrow x+y-1=0\Leftrightarrow y=1-x$ (vì với $x,\ y$ thỏa mãn đk (*) ta có $x^2+y^2+x+y>0$)

Thay $y=1-x$ vào phương trình thứ (2) của hệ pt ta thu được pt

$$4x^2+5(1-x)-13+6\sqrt{x}=0\Leftrightarrow 4x^2-5x-8+6\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=x-6\sqrt{x}+9\Leftrightarrow (2x-1)^2=\left(\sqrt{x}-3\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=\sqrt{x}-3\\ 2x-1=3-\sqrt{x}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+2=\sqrt{x}\\ 4-2x=\sqrt{x}\end{array}\right.$$

+) $2x+2=\sqrt{x}\Leftrightarrow x+\frac{7}{4}+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2=0$ (phương trình vô nghiệm vì $x\ge 0$).

+) $4-2x=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-2x \ge 0 \\ (4-2x)^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ 4x^2 - 17x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{17+\sqrt{33}}{8} \\ x = \dfrac{17-\sqrt{33}}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{17-\sqrt{33}}{8}$.

Với $x = \dfrac{17-\sqrt{33}}{8} \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{33}-9}{8}$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy hệ pt đã cho có nghiệm $(x;y)$ là: $\left(\dfrac{17-\sqrt{33}}{8};\dfrac{\sqrt{33}-9}{8}\right)$.

Câu 3.

1. Từ giả thiết ta có $P(0)=\frac{1}{2}\big(Q(0)+Q(1)\big)=0$ (1) và $P(1)=\frac{1}{2}\big(Q(1)+Q(0)\big)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $P(1)=0$.

Giả sử $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, trong đó $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ là các số nguyên không âm.

Ta có $P(1)=a_0+a_1+a_2+...+a_n=0$ vì $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ là các số nguyên không âm suy ra $a_0=a_1=a_2=...=a_n=0$ do đó $P(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vì $P(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow P(2)=0, P(3)=0$ do đó $3P(3)-P(2)=0 \Rightarrow P\big(3P(3)-P(2)\big)=0$.

2. Ta có $(x-y-1)(x+1-y)+6xy+y^2(2-x-y)=2(x+1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (x-y)^2-1+6xy-y^2(x+y-2)=2(x+y+xy+1) \Leftrightarrow (x+y)^2-y^2(x+y-2)=2(x+y)+3$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+y-2)-y^2(x+y-2)=3 \Leftrightarrow (x+y-2)(x+y-y^2)=3$

Vì $x, y\in\mathbb{Z}$ nên $x+y-2;\ x+y-y^2$ là các ước của 3

+) $\begin{cases} x+y-2=1 \\ x+y-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=0 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$.

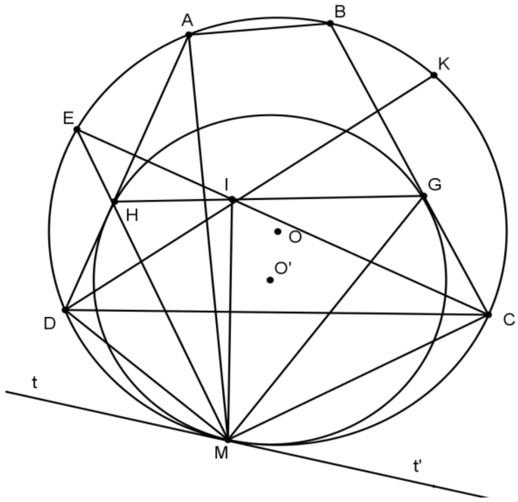
+) $\begin{cases} x+y-2=-1 \\ x+y-y^2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$.

+) $\begin{cases} x+y-2=3 \\ x+y-y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=7 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$.

+) $\begin{cases} x+y-2=-3 \\ x+y-y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=0 \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ là $(3;0);\ (3;-2);\ (-1;2);\ (7;-2);\ (3;2);\ (-1;0)$.

Câu 4.



1. Xét DHAM ta có $DHM = DAM + AMH$ (1).

Xét đường tròn (O) ta có $DAM = DMt$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $DHM = DMt + AMH$.

Vì Mt và DH là các tiếp tuyến của (O') nên $DHM = HMt$ (3) .

và $HMt = HMD + DMt$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $AMH = HMD$ suy ra MH là phân giác của góc AMD

Chứng minh tương tự ta có MG là phân giác của góc BMC .

2. Xét (O') có $HGM = HMt\left(=\frac{1}{2}sd\,HM\right)$.

Xét (O) có $ECM = EMt\left(=\frac{1}{2}sd\,EM\right)$.

Suy ra $HGM = ECM$ hay $IGM = ICM \Rightarrow$ tứ giác $IMCG$ nội tiếp.

Ta có $EHI = EHA + AHG$ (4).

và $EIM = 180^0 - MIC = 180^0 - MGC = MGB = MGH + BGH$ (5).

Lại có $AHG = BGH$ (6) (vì AH và BG đều là tiếp tuyến của (O'))

và $EHA = DHM = MGH$ (7).

Từ (4), (5), (6), (7) suy ra $EIM = MGH + BGH = EHA + AHG \Rightarrow EHI = EIM$.

3. Ta có CE là tia phân giác của góc ACD $(*)$ (vì EM là tia phân giác trong của góc $AMD \Rightarrow sd\,EA = sd\,ED$)

Ta có $EHI = EIM$ (chứng minh ở câu 4.2); ΔEHI và ΔEIM có $HEI = MEI$ và $EHI = EIM$

$\Rightarrow \Delta EHI \sim \Delta EIM\,(g-g) \Rightarrow \frac{EI}{EM} = \frac{EH}{EI} \Rightarrow EI^2 = EH.EM$ (8)

Lại có $EDH = DMH$ (vì EM là tia phân giác của góc $AMD \Rightarrow sd\,EA = sd\,ED$);

ΔEHD và ΔEDM có $HED = MED$ và $EDH = DMH$ $\Rightarrow \Delta EHD \sim \Delta EDM\,(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{ED}{EM} = \dfrac{EH}{ED} \Rightarrow ED^2 = EH.EM$ (9)

Từ (8), (9) suy ra $EI = ED$ nên tam giác EID cân tại E $\Rightarrow EDI = EID$ (10)

DI cắt (O) tại K, ta có $EDI = \dfrac{1}{2}(sd\,EA + sd\,AK)$ (11)

và $EID = \dfrac{1}{2}(sd\,ED + sd\,KC)$ (12)

Từ (10), (11), (12) và do $sd\,EA = sd\,ED$ suy ra $sd\,AK = sd\,KC \Rightarrow DK$ là tia phân giác góc ADC $(**)$.

Từ $(*)$ $(**)$ suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD.

Rõ ràng, HG đi qua I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD.

Câu 5.

1. Áp dụng BĐT $(x+y+x)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) \ge 9 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+y+z} \le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$ $x,y,z>0.$

Và $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2} \ge \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}$ $x,y,z>0.$

Vì $a,b,c>0$ ta có $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} \ge \dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}$, bất đẳng thức (1) đúng ta cần chứng minh

$$\frac{1}{ac+3bc+2c^2}+\frac{1}{ab+3ac+2a^2}+\frac{1}{bc+3ab+2b^2} \le \frac{1}{6}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right) \ (2).$$

Ta có $(2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{ac+3bc+2c^2}+\dfrac{1}{ab+3ac+2a^2}+\dfrac{1}{bc+3ab+2b^2} \le \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{a+b+c}{abc}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ac}{c+3a+2b} \le \frac{a+b+c}{6}.$$

Ta có $\dfrac{ab}{a+3b+2c} = \dfrac{ab}{(a+c)+(b+c)+2b} \le \dfrac{ab}{9}\left(\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{2b}\right) = \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{ab}{a+c}+\dfrac{ab}{b+c}+\dfrac{a}{2}\right)$

Vậy $\dfrac{ab}{a+3b+2c} \le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{ab}{a+c}+\dfrac{ab}{b+c}+\dfrac{a}{2}\right)$ (3)

Tương tự ta có $\dfrac{bc}{b+3c+2a} \le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{bc}{b+a}+\dfrac{bc}{c+a}+\dfrac{b}{2}\right)$ (4);

$\dfrac{ac}{c+3a+2b} \le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{ac}{c+b}+\dfrac{ac}{a+b}+\dfrac{c}{2}\right)$ (5)

Cộng theo vế (3), (4) và (5) ta có

$$\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ac}{c+3a+2b} \le \frac{1}{9}\left(\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ab+ac}{c+b}+\frac{ac+bc}{a+b}+\frac{a+b+c}{2}\right) = \frac{a+b+c}{6}.$$

Vậy BĐT (2) đúng do đó BĐT (1) đúng.

2. Gọi $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$ là các số phân biệt được đánh liên tiếp cho 10 điểm phân biệt thuộc đường tròn (O), $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10} \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Giả sử ngược lại là không tìm được 4 đỉnh nào thoả mãn khẳng định của bài toán. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 21 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 21 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 21 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{10} + x_1 + x_2 + x_3 \le 21 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $4\left(x_1+x_2+x_3+...+x_{10}\right)\le 10.21=210$

Mặt khác ta lại có $x_1+x_2+x_3+...+x_{10}=1+2+3+...+10=\dfrac{10.11}{2}=55$

Suy ra: $4.55<210 \Leftrightarrow 220<210$ (vô lý), do đó điều giả là sai.

Vậy ta luôn tìm được 4 điểm liên tiếp được đánh số mà tổng các số đó lớn hơn 21.

Đề số 11

Câu 1.

1. Ta có $\sqrt{a^3}-2\sqrt{2b^3}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{2b}\right)^3=\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(a+\sqrt{2ab}+2b\right)$.

Suy ra

$$\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3}-2\sqrt{2b^3}}-\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{2ab}+2b}=\frac{2(a+b)-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(a+\sqrt{2ab}+2b\right)}$$

$$=\frac{a+\sqrt{2ab}+2b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(a+\sqrt{2ab}+2b\right)}=\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}.$$

$$\frac{\sqrt{a^3}+2\sqrt{2b^3}}{2b+\sqrt{2ab}}-\sqrt{a}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)\left(a-\sqrt{2ab}+2b\right)}{\sqrt{2b}\left(\sqrt{2b}+\sqrt{a}\right)}-\sqrt{a}$$

$$=\frac{a-\sqrt{2ab}+2b}{\sqrt{2b}}-\sqrt{a}=\frac{a-2\sqrt{2ab}+2b}{\sqrt{2b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)^2}{\sqrt{2b}}.$$

Từ đó suy ra $P=\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}.\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)^2}{\sqrt{2b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}{\sqrt{2b}}$.

Cách 2: Đặt $x=\sqrt{a};y=\sqrt{2b}$ ta được

$$P=\left(\frac{2x^2+y^2}{x^3-y^3}-\frac{x}{x^2+xy+y^2}\right).\left(\frac{x^3+y^3}{y^2+xy}-x\right)$$ với $x\ge 0;y>0,x\ne y$.

2. Vì ba điểm O,A,B tạo thành một tam giác nên $m^2-4m-4\ne 0$ và $3m-2\ne 0$.

Tọa độ giao điểm A của d và Ox là $A\left(\dfrac{2-3m}{m^2-4m-4};0\right)\Rightarrow OA=\left|\dfrac{2-3m}{m^2-4m-4}\right|$.

Tọa độ giao điểm B của d và Oy là $B\left(0;3m-2\right)\Rightarrow OB=\left|3m-2\right|$.

Do tam giác ABO vuông tại O nên $S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}\left|\frac{2-3m}{m^2-4m-4}\right||3m-2|=1$

Do đó, $\frac{(3m-2)^2}{|m^2-4m-4|}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9m^2-12m+4=2(m^2-4m-4)\\9m^2-12m+4=-2(m^2-4m-4)\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7m^2-4m+12=0\\11m^2-20m-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-\frac{2}{11}\end{array}\right.\text{ (thỏa mãn)}$$

Câu 2.

1. $\Delta=(3m-2)^2-4(2m^2-5m-3)=m^2+8m+16=(m+4)^2\geq 0,\forall m$. Do đó, phương trình luôn có nghiệm, các nghiệm là $x_1=2m+1;x_2=m-3$.

Phương trình có ít nhất một nghiệm dương khi và chỉ khi

$\left[\begin{array}{l}x_1>0\\x_2>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m+1>0\\m-3>0\end{array}\right.\Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}$.

Cách 2: Do $\Delta\geq 0,\forall m$ nên PT luôn có hai nghiệm. Ta có thể giải bài toán ngược: "Tìm *m* để PT có hai nghiệm không dương" ĐK này tương đương với $\begin{cases}S\leq 0\\P\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow m\leq-\frac{1}{2}$.

Cách 3: Do $\Delta\geq 0,\forall m$ nên PT luôn có hai nghiệm. Yêu cầu bài toán tương đương với PT có nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\left[\begin{array}{l}x_2\geq x_1>0\\x_2>x_1\geq 0\\x_2>0\geq x_1\end{array}\right.$

2. $\begin{cases}\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}\\x^3-3x+2=2y^3-y^2\ (*)\end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases}2x-y-1\geq 0\\x+2y\geq 0\\x\geq 0\\y\geq-\frac{1}{3}\end{cases}$

Nhận xét:

$\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$. Không thỏa mãn điều kiện.

$\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\y=-\frac{1}{3}\end{cases}$. Không thỏa mãn phương trình $(*)$.

Do đó, ta có $\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-y-1}-\sqrt{x}+\sqrt{3y+1}-\sqrt{x+2y}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-1}{\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}}-\frac{x-y-1}{\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y} \end{array}\right.$$

Với $y=x-1$ thay vào phương trình $(*)$ ta có

$$(x-1)^2(x+2)=2(x-1)^3-(x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$$

$x=1 \Rightarrow y=0; x=5 \Rightarrow y=4$

Với $\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}$

Ta có $\begin{cases} \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y} \\ \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y} \end{cases}$

Cộng vế với vế hai phương trình ta được $\sqrt{x}=\sqrt{3y+1} \Leftrightarrow y=\dfrac{x-1}{3}$

Thay vào $(*)$ ta được $(x-1)^2(x+2)=\dfrac{2}{27}(x-1)^3-\dfrac{1}{9}(x-1)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(25x+59)=0 \Leftrightarrow x=1$ do $(x \ge 0)$.

Vậy hệ có các nghiệm $(x;y)=(1;0);(5;4)$.

Cách 2: Bình phương hai vế PT thứ nhất

PT thứ nhất $\Leftrightarrow \sqrt{(2x-y-1)(3y+1)}=\sqrt{x(x+2y)}$

$$\Leftrightarrow x^2-4xy+3y^2-2x+4y+1=0 \Leftrightarrow (x-y-1)(x-3y-1)=0.$$

Câu 3.

1. Đặt $a=x.c, b=y.c, (x,y>0)$. Từ điều kiện suy ra $(x+1)(y+1)=4$.

Khi đó, $P=\dfrac{x}{y+3}+\dfrac{y}{x+3}+\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{x^2+y^2+3(x+y)}{xy+3(x+y)+9}+\dfrac{xy}{x+y}$

$$=\frac{(x+y)^2+3(x+y)-2xy}{xy+3(x+y)+9}+\frac{xy}{x+y}$$

Do $(x+1)(y+1)=4 \Rightarrow xy=3-(x+y)$.

Đặt $t=x+y, (0<t<3) \Rightarrow xy=3-t$ và

$$3-t=xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{t^2}{4} \Leftrightarrow t^2+4t-12 \ge 0 \Rightarrow t \ge 2 \quad (\text{do } t>0)$$

Khi đó, $P=\frac{t^2+3t-2(3-t)}{3-t+3t+9}+\frac{3-t}{t}=\frac{t}{2}+\frac{3}{t}-\frac{3}{2}$ với $2\le t<3$.

Ta có $P\ge 2\sqrt{\frac{t}{2}.\frac{3}{t}}-\frac{3}{2}=\sqrt{6}-\frac{3}{2}$.

Do đó, $P_{min}=\sqrt{6}-\frac{3}{2}$ đạt được khi $t=\sqrt{6}$ hay $(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y=\sqrt{6}\\ xy=3-\sqrt{6}\end{cases}$.

Ta lại có $P=\frac{t^2-3t+6}{2t}=\frac{t^2-5t+6+2t}{2t}=\frac{(t-2)(t-3)}{2t}+1\le 1$ (do $2\le t<3$).

Do đó, $P_{max}=1$ đạt được khi $t=2$ hay $(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y=2\\ xy=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$

2. Đặt $p^3-4p+9=t^2 (t\in N)$

Biến đổi thành $p(p^2-4)=(t-3)(t+3)$ $(1)\Rightarrow p\mid(t-3)\vee p\mid(t+3)$

Trường hợp 1: Nếu $p\mid t-3$

Đặt $t-3=pk(k\in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có:

$p(p^2-4)=pk(pk+6)\Leftrightarrow p^2-pk^2-6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta=k^4+4(6k+4)=k^4+24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $(k^2)^2<k^4+24k+16<(k^2+4)^2$

Suy ra các trường hợp:

$k^4+24k+16=(k^2+1)^2\Leftrightarrow 2k^2-24k-15=0$ (loại)

$k^4+24k+16=(k^2+2)^2\Leftrightarrow k^2-6k-3=0$ (loại)

$k^2+24k+16=(k^2+3)^2\Leftrightarrow 6k^2-24k-7=0$ (loại)

Do đó phải có $k\le 3$. Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.

Từ đó ta có $t=36;p=11$.

Lưu ý: HS có thể làm như sau khi thay vào (1)

$p(p^2-4)=pk(t+3)\Leftrightarrow k(t+3)=p^2-4\Rightarrow p^2=kt+3k+4$

Mặt khác ta có $(t-3)^2=p^2k^2\Rightarrow t^2-6t+9=k^2(kt+3k+4)$

$\Leftrightarrow t^2-t(6+k^3)+9-3k^3-4k^2=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn n điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta=\left(6+k^3\right)^2-4\left(9-3k^3-4k^2\right)=k^6+24k^3+16k^2=k^2\left(k^4+24k+16\right)$ là một số chính phương. Muốn vậy thì $k^4+24k+16$ phải là một số chính phương.

Sau đó cách làm giống như trên.

Trường hợp 2: Nếu $p\mid t+3$

Đặt $t+3=pk(k\in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có: $p\left(p^2-4\right)=pk(pk-6)\Leftrightarrow p^2-pk^2+6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là: $\Delta=k^4-4\left(6k-4\right)=k^4-24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $\left(k^2-4\right)^2<k^4-24k+16<\left(k^2\right)^2$ Suy ra các trường hợp:

$k^4-24k+16=\left(k^2-1\right)^2\Leftrightarrow 2k^2-24k+15=0$ (loại)

$k^4-24k+16=\left(k^2-2\right)^2\Leftrightarrow k^2-6k+3=0$ (loại)

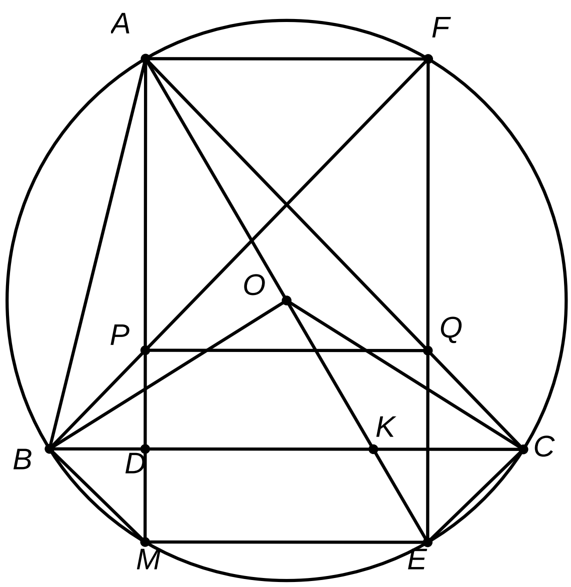
$k^2-24k+16=\left(k^2-3\right)^2\Leftrightarrow 6k^2-24k+7=0$ (loại)

Do đó phải có $k\le 3$ Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.

Từ đó suy ra $t=3;18$ tương ứng $p=2;7$.

Vậy tập tất cả giá trị p cần tìm là $\{2;7;11\}$

Câu 4.



1.

a. Xét hai tam giác ADB và ACE có $\hat{A}CE = 90^o$ (chắn $\frac{1}{2}$ đường tròn) nên

$\hat{A}CE = \hat{A}DB = 90^o$.

Hơn nữa $\widehat{ABD}=\widehat{AEC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$). Suy ra $\Delta ADB \backsim \Delta ACE$

Từ đây ta có tỉ lệ thức $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AB}{AE} \Rightarrow AD.AE = AB.AC$.

b. Ta có $\widehat{PFQ}=\widehat{BAE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

Mặt khác $\widehat{BAE}=\widehat{BAD}+\widehat{DAE}$ mà $\widehat{BAD}=\widehat{EAC}$ vì $\Delta ABD \backsim \Delta AEC$

Nên $\widehat{BAE}=\widehat{BAD}+\widehat{EAC}=\widehat{DAC}$.

Do đó $\widehat{PAQ}=\widehat{PFQ}$.

Suy ra tứ giác $APQF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FAQ}=\widehat{FPQ}$

Vì $\widehat{FAQ}=\widehat{FBC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{FC}$) nên $\widehat{FPQ}=\widehat{FBC}$ suy ra $PQ\,//\,BC$.

c. Ta có $AB.AC = AD.AE$.

Suy ra $AB.AC - AD.AK = AD.AE - AD.AK = AD.KE$.

Kéo dài AD cắt (O) tại M.

Xét ΔAKB và $\Delta CKE \Rightarrow \dfrac{AK}{CK}=\dfrac{KB}{KE} \Rightarrow AK.KE = KB.KC$

$\Delta ADC \backsim \Delta BDM \Rightarrow \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{CD}{MD} \Rightarrow AD.MD = BD.CD$.

Mặt khác $\widehat{AME}=90^o$ (chắn $\dfrac{1}{2}$ đường tròn)

Suy ra $ME \perp AD$ mà $DK \perp AD$ nên $DK\,//\,ME$.

Áp dụng định lý Talet trong ΔAME ta được $\dfrac{AD}{DM}=\dfrac{AK}{KE}$.

Do đó $AK.DM = AD.KE$.

$\Rightarrow BD.BK.CD.CK = (BD.CD).(CK.BK)$.

$= (AD.MD).(AK.KE) = (AD.KE).(AK.MD) = AD^2.KE^2$

$\Rightarrow \sqrt{BD.BK.CD.CK} = AD.KE$

Vậy $AB.AC - AD.AK = \sqrt{BD.BK.CD.CK}$.

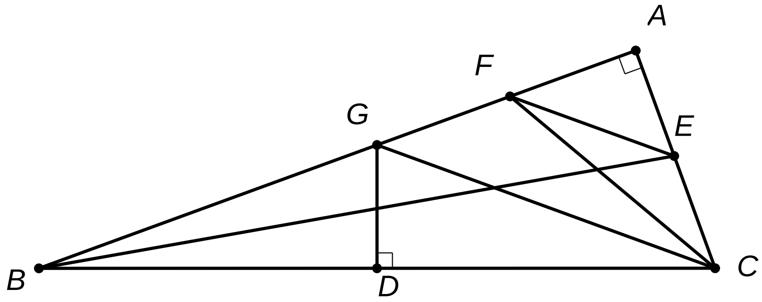
2. Xét ΔABC có $\widehat{BAC}=90^o, \widehat{ABC}=20^o \Rightarrow \widehat{ACB}=70^o$

ΔACF có $\widehat{CAF}=90^o$, $\widehat{ACF}=30^o \Rightarrow FC = 2.AF$

Gọi D là trung điểm của BC và G là điểm trên AB sao cho $GD \perp BC$.

Khi đó, $\Delta ABC \backsim \Delta DBG \Rightarrow \dfrac{BD}{BG}=\dfrac{BA}{BC}$

$\widehat{GCB}=\widehat{GBC}=20^o \Rightarrow \widehat{GCF}=20^o$.



Do đó CG và BE lần lượt là tia phân giác của $\widehat{BCF}$ và $\widehat{ABC}$ nên

$$\frac{FC}{FG}=\frac{BC}{BG};\frac{BA}{BC}=\frac{AE}{EC}$$

Do đó, $\dfrac{AF}{FG}=\dfrac{\frac{1}{2}FC}{FG}=\dfrac{\frac{1}{2}BC}{BG}=\dfrac{BD}{BG}=\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{AE}{EC}\Rightarrow\dfrac{AF}{FG}=\dfrac{AE}{EC}$

Từ đó suy ra $CG\,//\,EF$ (ĐL Talet đảo) $\Rightarrow\widehat{CFE}=\widehat{GCF}=20^{o}$.

Câu 5.

Với 5 số tự nhiên đôi một khác nhau tùy ý thì có hai trường hợp xảy ra:

+ TH1: Có ít nhất 3 số chia cho 3 có số dư giống nhau $\Rightarrow$ Tổng ba số tương ứng chia hết cho 3.

+ TH2: Có nhiều nhất 2 số chia cho 3 có số dư giống nhau $\Rightarrow$ Có ít nhất 1 số chia hết cho 3, 1 số chia cho 3 dư 1, 1 số chia cho 3 dư 2. Suy ra luôn chọn được 3 số có tổng chia hết cho 3.

Do đó ta chia 17 số là số báo danh của 17 học sinh thành 3 tập có lần lượt $5, 5, 7$ phần tử.

Trong mỗi tập, chọn được 3 số có tổng lần lượt là $3a_1, 3a_2, 3a_3\left(a_1,a_2,a_3\in\mathbb{N}\right)$.

Còn lại $17-9=8$ số, trong 8 số còn lại, chọn tiếp 3 số có tổng là $3a_4$.

Còn lại 5 số chọn tiếp 3 số có tổng là $3a_5$.

Trong 5 số a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 có 3 số a_{i1},a_{i2},a_{i3} có tổng chia hết cho 3.

Nên 9 học sinh tương ứng có tổng các số báo danh là $3\left(a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}\right)\vdots 9$

Đề số 12

Câu 1. a) Từ giả thiết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2018}\Rightarrow 2018=\dfrac{ab}{a+b}$

$$\Rightarrow\sqrt{a-2018}+\sqrt{b-2018}=\sqrt{a-\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{b-\frac{ab}{a+b}}=\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{a+b}}=\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}=\sqrt{a+b}$$

(Vì $a,b>0$).

b) Ta có a là nghiệm dương của phương trình $6x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$ nên

$6a^2+\sqrt{3}a-\sqrt{3}=0$

$$\Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}-6a^2}{\sqrt{3}}=1-2\sqrt{3}a^2>0\Rightarrow a<\frac{1}{2\sqrt{3}}\Leftrightarrow a^2<\frac{1}{12}<\sqrt{3}\Leftrightarrow a^2-\sqrt{3}<0$$

Do đó

$$A=\frac{(a+2)\left(\sqrt{a^4+a+2}+a^2\right)}{a^4+a+2-a^4}=\sqrt{a^4+a+2}+a^2=\sqrt{a^4+1-2\sqrt{3}a^2+2}+a^2=\sqrt{a^4-2\sqrt{3}a^2+3}+a^2$$

$$=\sqrt{\left(a^2-\sqrt{3}\right)^2}+a^2=\left|a^2-\sqrt{3}\right|+a^2=\sqrt{3}-a^2+a^2=\sqrt{3}.$$

Câu 2. a) ĐKXĐ: $x\le 1$

Ta có $\left(1-\sqrt{1-x}\right)\sqrt[3]{2-x}=x\Leftrightarrow x\sqrt[3]{2-x}=x\left(1+\sqrt{1-x}\right)$

Xét $x=0$ là một nghiệm của phương trình.

Xét $x\ne 0$ ta có phương trình

$\sqrt[3]{2-x}=1+\sqrt{1-x}\Leftrightarrow 2-x=1+(1-x)\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)$

$\Leftrightarrow 2(1-x)+(1-x)\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left[(1-x)+2\sqrt{1-x}+3\right]=0$

Vì $(1-x)+2\sqrt{1-x}+3>0$ nên $\sqrt{1-x}=0\Leftrightarrow x=1$

Đối chiếu điều kiện của phương trình ta có tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;1\}$.

b) Ta có

$(x-2018)^2+1=y^4+9y^2+1-6y^3-6y+2y^2=\left(y^2-3y+1\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(y^2-3y+1\right)^2-(x-2018)^2=1\Leftrightarrow\left(y^2-3y+1+x-2018\right)\left(y^2-3y+1-x+2018\right)=1$

$$\text{TH1}:\begin{cases}\left(y^2-3y+1+x-2018\right)=-1\\ \left(y^2-3y+1-x+2018\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2018\\ y^2-3y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2018\\ \left[\begin{array}{l}y=1\\ y=2\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\text{TH2}:\begin{cases}\left(y^2-3y+1+x-2018\right)=1\\ \left(y^2-3y+1-x+2018\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2018\\ y^2-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2018\\ \left[\begin{array}{l}y=0\\ y=3\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $(x;y)\in\{(2018;0);(2018;1);(2018;2);(2018;3)\}$.

Câu 3. a) ĐKXĐ $x,y\ge-\frac{1}{2}$

Ta có $(3x+2y)(y+1)=4-x^2$

$\Leftrightarrow 3xy+3x+2y^2+2y+x^2-4=0\Leftrightarrow x(x+y-1)+2y(x+y-1)+4(x+y-1)=0$

$\Leftrightarrow(x+2y+4)(x+y-1)=0.$

Vì $x, y \geq -\frac{1}{2}$ nên $x + 2y + 4 > 0$ và do đó phương trình $\Leftrightarrow x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x$

Thay vào phương trình đầu ta được

$\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = \frac{4x^2 - 4x + 1}{2}$

Với ĐKXĐ $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$. Đặt

$\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = t > 0 \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(2x+1)(3-2x)}$

$\Rightarrow \sqrt{-4x^2 + 4x + 3} = \frac{t^2 - 4}{2} \Rightarrow -4x^2 + 4x - 1 = \left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)^2 - 4 \Rightarrow \frac{4x^2 - 4x + 1}{2} = -\frac{t^4 - 8t^2}{8}$

Do đó ta có phương trình $t = \frac{t^4 - 8t^2}{8} \Leftrightarrow t\left(t^3 - 8t + 8\right) = 0 \Leftrightarrow t(t-2)\left(t^2 + 2t - 4\right) = 0$

Vì $t > 0$ nên $t = 2$ hoặc $t = \sqrt{5} - 1$

Xét $t = 2$ ta có $\sqrt{-4x^2 + 4x + 3} = 0 \Leftrightarrow (2x-3)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \end{array}\right.$

Xét $t = \sqrt{5} - 1$ ta có $\sqrt{-4x^2 + 4x + 3} = \frac{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2 - 2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{-4x^2 + 4x + 3} = 1 - \sqrt{5} < 0$ (Vô lí)

Đối chiếu ĐKXĐ của hệ phương trình ta có hệ phương trình có 2 nghiệm

$\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

b) Áp dụng BĐT Cauchy ta có

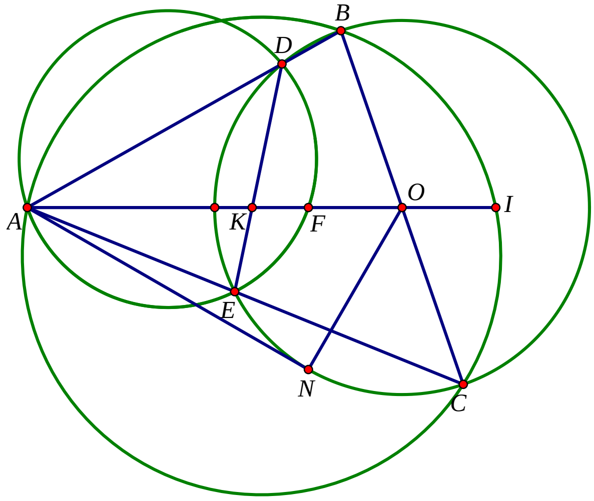
$\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} = \left(\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y}\right) + 2\left(\frac{yz}{x} + \frac{xy}{z}\right) + 3\left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right)$

$\geq 2z + 4y + 6x = 4(x+y) + 2(x+z) \geq 8\sqrt{xy} + 4\sqrt{xz} = 4\left(2\sqrt{xy} + \sqrt{xz}\right) = 4$

Vì $2\sqrt{y} + \sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} + \sqrt{zx} = 1.$

Dấu $" = "$ xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Câu 4.



a) Ta có tứ giác $BCED$ nội tiếp

$\Rightarrow ABC + DEC = 180^0$ mà

$AEK + DEC = 180^0$

$\Rightarrow AEK = ABC$. Lại có $AIC = ABC$

$\Rightarrow AEK = AIC,\ \ IAC$ chung

Nên $\Delta AEK \backsim \Delta AIC \Rightarrow \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{AE}{AI}$

$\Rightarrow AK.AI = AC.AE.$

b) Ta có $IBC = IAC,\ BOI = AOC$

Suy ra $\Delta BOI \backsim \Delta AOC \Rightarrow \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{OI}{OC}$

$\Rightarrow OI = \dfrac{OB.OC}{OA} = \dfrac{R.R}{2R} = \dfrac{R}{2}$

$\Rightarrow AI = OA + AI = 2R + \dfrac{R}{2} = \dfrac{5R}{2}.$

Kẻ tiếp tuyến AN của đường tròn tâm O. Áp dụng phương tích ta có $AN^2 = AE.AC$. Xét tam giác AON vuông tại N ta có : $AN^2 = OA^2 - ON^2 = 3R^2$

$\Rightarrow AE.AC = AN^2 = OA^2 - ON^2 = 3R^2$. Theo câu a) ta có $AK = \dfrac{AE.AC}{AI} = \dfrac{6R}{5}$.

c) Gọi F là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp ΔADE với AI

Ta có $AFD = AED$ theo câu a) thì $AED = ABC \Rightarrow AFD = ABC$ nên tứ giác $BDFO$ nội tiếp. Áp dụng phương tích của đường tròn ta có

$AF.AO = AD.AB$ & $AN^2 = AD.AB$

$\Rightarrow AF.AO = AN^2 \Rightarrow AF = \dfrac{AN^2}{AO} = \dfrac{3R^2}{2R} = \dfrac{3R}{2} = const$

Mà A cố định nên F cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp luôn thuộc đường trung trực của AF cố định.

Câu 5. Ta phân chia 625 số tự nhiên đã cho thành 311 nhóm như sau :

Các nhóm $n_1, n_2, ..., n_{310}$ mỗi nhóm gồm 2 số hạng $(k, 625 - k)$ tức là mỗi nhóm có hai số hạng có tổng bằng 625 sao cho $k \neq 49, k \neq 225$

Nhóm 311 gồm 5 số chính phương $\{49, 225, 400, 576; 625\}$

Nếu trong 311 số được chọn không có số nào thuộc nhóm n_{311}, như vậy 311 số này thuộc 310 nhóm còn lại thì theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất một trong hai số thuộc cùng một nhóm. Hai số này có tổng bằng 625. Mẫu thuẫn với giả thiết. Vậy chắc chắn trong 311 số được chọn phải có ít nhất một số thuộc nhóm n_{311}. Số này là số chính phương.

Đề số 13

Câu 1.

Điều kiện $x \ge 1$.

Phương trình đã cho được viết lại $10x-7+2.3\sqrt{x^2+x-2}=20+3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)^2-\left(3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)-20=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=5 \\ 3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=5$

$\Leftrightarrow 10x-7+6\sqrt{x^2+x-2}=25$

$\Leftrightarrow 6\sqrt{x^2+x-2}=32-10x \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+x-2}=16-5x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{16}{5} \\ 9\left(x^2+x-2\right)=256-160x+25x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{16}{5} \\ 16x^2-169x+274=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Vậy $x=2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 2.

a) Đặt $A=\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}$.

Ta có $A^3=140+3.\sqrt[3]{70^2-4901}.\left(\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}\right)$

$\Leftrightarrow A^3=140-3A$

$\Leftrightarrow A^3+3A-140=0 \Leftrightarrow (A-5)\left(A^2+5A+28\right)=0 \left(A^2+5A+28=\left(A+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{87}{4}>0, \forall A\right)$

$\Leftrightarrow A=5$ (đpcm).

b) Với mọi số nguyên dương k, ta có

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt[3]{k}}=\frac{\sqrt[3]{k^2}}{k(k+1)}=\frac{(k+1-k)\sqrt[3]{k^2}}{k(k+1)}=\sqrt[3]{k^2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\sqrt[3]{k^2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}-\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{k(k+1)}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}-\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right)\left(1+\frac{\sqrt[3]{k^2}}{\sqrt[3]{k(k+1)}}+\frac{\sqrt[3]{k^2}}{\sqrt[3]{(k+1)^2}}\right)$$

$$\le\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}-\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right)\left(1+\frac{\sqrt[3]{k^2}}{\sqrt[3]{k^2}}+\frac{\sqrt[3]{k^2}}{\sqrt[3]{k^2}}\right)=3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}-\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right).$$

Do đó

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$$

$< 3\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right) < 3$ (đpcm).

Câu 3.

Với mọi x, y ta luôn có

$$x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2+y^2+xy \geq 3xy \Leftrightarrow 1 \geq 3xy \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{3}.$$

Ta có $P = x^3y + y^3x = xy\left(x^2+y^2\right) = xy(1-xy) = -(xy)^2 + xy$

$= -\left(xy-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9} \leq 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

$P = \frac{2}{9}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y \\ xy = \frac{1}{3} \\ x^2+xy+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{2}{9}$ đạt được khi $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 4.

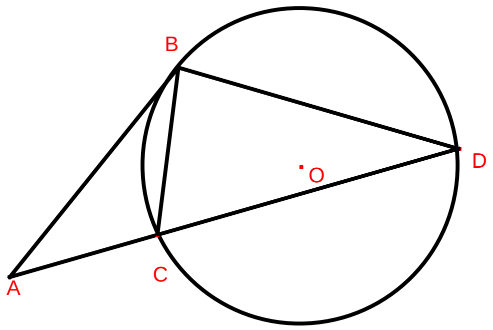
Ta có $p = a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

Vì a, b là các số nguyên dương nên, ta có $a^2+ab+b^2 > 1$.

Do p nguyên tố nên $a-b=1 \Rightarrow a=b+1 \Rightarrow p=3b^2+3b+1$

$$\Rightarrow 4p = 3\left(4b^2+4b+1\right)+1 = 3(2b+1)^2+1 \text{(đpcm)}.$$

Câu 5.



Trước hết ta chứng minh bổ đề: "Cho đường tròn tâm O và điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ một tiếp tuyến với (O) tại B và một đường thẳng d cắt (O) lần lượt tại 2 điểm phân biệt là C và D. Khi đó $AB^2 = AC.AD$".

Thật vậy, xét 2 tam giác ABC và ADB có góc A chung và $ABC = ADB$ (cùng bằng nửa số đo cung BC) nên hai tam giác này đồng dạng suy ra $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB^2 = AC.AD$.

Quay trở lại bài toán. Gọi U, V lần lượt là giao điểm của các đoạn BE, CF với (I). Khi đó, theo bổ đề trên ta có: $BD^2 = BU.BE$ và $CD^2 = CV.CF$ nên $\dfrac{DB^2}{DC^2} = \dfrac{BU}{CV}.\dfrac{BE}{CF}$.

Để chứng minh bài toán chỉ cần chứng tỏ $\dfrac{BU}{CV} = \dfrac{BF}{CE}$.

Từ đó xét hai tam giác BUF và CVE có $UBF = VCE$ (cùng phụ góc BAC),

$BUF = 180^0 - EUF = 180^0 - EVF = CVE$ nên hai tam giác đồng dạng với nhau,

suy ra $\dfrac{BU}{CV} = \dfrac{BF}{CE}$.

Vậy ta được điều phải chứng minh.

Câu 6.

+ Ta thấy rằng nếu n lẻ thì người đi trước luôn thắng, bằng cách ở nước đi đầu tiên, người đó chỉ lấy một viên bi, do đó ở những nước đi tiếp theo, mỗi người chỉ được lấy một viên bi.

+ Xét trường hợp n chẵn. Rõ ràng người nào lấy một số lẻ viên bi đầu tiên sẽ thua, vì để lại cho người đi nước tiếp theo một số lẻ viên bi, trở về trường hợp trên. Do đó, người chiến thắng phải luôn lấy một số chẵn viên bi. Như vậy, các viên bi gắn thành từng cặp và mỗi người đến lượt sẽ lấy một số cặp nào đó.

TH1: Nếu chỉ có một cặp $(n = 2)$: người đi trước thua vì chỉ được lấy một viên.

TH2: Nếu số cặp lẻ và lớn hơn 1 $(n \equiv 2 \bmod 4)$: ta sẽ trở về trường hợp n lẻ (vì các viên bi đã được gắn thành cặp) và người đi trước sẽ thắng.

TH3: Nếu số cặp chẵn $(n \equiv 0 \bmod 4)$: mỗi người muốn thắng thì luôn phải lấy một số chẵn cặp (nếu ngược lại thì trở về TH2). Khi đó các viên bi được gắn thành từng nhóm 4 viên. Tương tự TH1 và TH2 ta thấy nếu số nhóm là một $(n = 4)$; nếu $n > 4$ và số nhóm lẻ $(n \equiv 4 \bmod 8)$ thì người đi trước thắng. Nếu số nhóm là chẵn $(n \equiv 0 \bmod 8)$, ta lại gắn các viên bi thành từng nhóm 8 viên,…

+ Như vậy người đi trước có chiến lược thắng khi và chỉ khi n không phải là một lũy thừa của 2 $(n \neq 2^k)$.

Đề số 14

Câu 1.

1) Ta có: $n^2 + 4n + 5 = n^2 - 1 + 4n + 6$

$$= (n-1)(n+1) + 2(2n+3).$$

Do n lẻ nên $n-1$ và $n+1$ là 2 số chẵn liên tiếp.

$\Rightarrow (n-1)(n+1)$ chia hết cho 8.

Mà $2n+3$ lẻ $\Rightarrow$ $2n+3$ không chia hết cho 4.

$\Rightarrow\ 2(2n+3)$ không chia hết cho 8.

$\Rightarrow (n-1)(n+1)+2(2n+3)$ không chia hết cho 8.

$\Rightarrow$ đpcm.

2) Ta có: $x^2+\frac{1}{x^2}=7 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=3$ (do $x>0$).

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3=27 \Leftrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=27$$

$$\Leftrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=18$$

$$\Rightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=18.7=126$$

$$\Leftrightarrow x^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{x}=126$$

$$\Rightarrow x^5+\frac{1}{x^5}=123.$$

Câu 2.

❖ Tổng quát: $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{[n(n+1)]^2}}$

$$=\sqrt{\frac{[n(n+1)]^2+2n(n+1)+1}{[n(n+1)]^2}}=\sqrt{\frac{[n(n+1)+1]^2}{[n(n+1)]^2}}$$

$$=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=\frac{n(n+1)}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}$$

❖ Vậy:

$$X=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}}$$

$$=1+\underbrace{\frac{1}{1.2}+1+\frac{1}{2.3}+1+\frac{1}{3.4}+....+1+\frac{1}{2017.2018}}_{2017\ \text{số } 1}$$

$$=2017+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}$$

$$=2018-\frac{1}{2018}=\frac{4072323}{2018}.$$

❖ Vậy

$$X=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}}=\frac{4072323}{2018}.$$

Câu 3.

1) $3x+2\sqrt{27x^3+8}=9x^2+6$

$\Leftrightarrow 3x+2\sqrt{(3x+2)(9x^2-6x+4)}=9x^2+6$ (Điều kiện $x\ge\dfrac{-2}{3}$)

$\Leftrightarrow 9x^2+6-2\sqrt{(3x-2)(9x^2-6x+4)}-3x=0$

$\Leftrightarrow 9x^2-6x+4-2\sqrt{(3x+2)(9x^2-6x+4)}+3x+2=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{9x^2-6x+4}-\sqrt{3x+2}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow 9x^2-6x+4=3x+2$

$\Leftrightarrow 9x^2-9x+2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là: $x\in\left\{\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right\}$.

2) Do m, n cùng dấu nên:

- Nếu $m>0;\ n>0$ thì: $|m|+2|n|=m+2n$.

- Nếu $m<0;\ n<0$ thì: $|m|+2|n|=-m-2n=-(m+2n)$.

+ Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình ta được:

$$\begin{cases} x_0^2+mx_0+2=0 \\ x_0^2+2nx_0+6=0\end{cases} \text{ có nghiệm chung}$$

$\Rightarrow 2x_0^2+(m+2n)x_0+8=0$ có nghiệm x_0.

$\Rightarrow \Delta=(m+2n)^2-4.2.8\ge 0$

$\Leftrightarrow (m+2n)^2\ge 64$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2n\ge 8 \\ m+2n\le -8\end{array}\right.$

$\Rightarrow |m|+2|n|\ge 8$

Vậy $|m|+2|n|$ đạt GTNN là 8 khi:

$\left[\begin{array}{l} m+2n=8 \\ m+2n=-8\end{array}\right.$

+ TH1: $m+2n=8$, ta được: $2x_0^2+8x_0+8=0 \Leftrightarrow x_0^2+4x_0+4=0 \Leftrightarrow x_0=-2$. Ta có:

$\begin{cases} (-2)^2+m(-2)+2=0 \\ (-2)^2+2n(-2)+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=\dfrac{5}{2}\end{cases}$ (thỏa mãn)

+ TH2: $m+2n=-8$, ta được: $2x_0^2-8x_0+8=0 \Leftrightarrow 2(x_0-2)^2=0 \Leftrightarrow x_0=2$. Ta có:

$\begin{cases} 2^2+m.2+2=0 \\ 2^2+2n.2+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ n=\dfrac{-5}{2}\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy với $m=3$ và $n=\frac{5}{2}$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x_0=-2$.

Với $m=-3$ và $n=\frac{-5}{2}$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x_0=2$.

Câu 4.

1) Xét phương trình: $x^2+2(m-3)x-m-3=0$

Giả sử: $x_1<2<x_2$

Áp dụng Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1.x_2=-m-3 \\ x_1+x_2=-2(m-3) \end{cases}$

Để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 2 và một nghiệm lớn hơn 2 thì:

$$\begin{cases} \Delta'>0 \\ (x_1-2)(x_2-2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2+m+3>0 \\ x_1.x_2-2(x_1+x_2)+4<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m+9+m+3>0 \\ -m-3-2(-2(m-3))+4<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-5m+12>0 \\ 3m-11<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow m<\frac{11}{3}$ (do $m^2-5m+12$ luôn lớn hơn 0).

Vậy với $m<\frac{11}{3}$ thì phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 2 và một nghiệm lớn hơn 2.

2) Đặt:

$$A=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+t}+\frac{z}{t+x}+\frac{t}{x+y}$$

$$M=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+t}+\frac{t}{t+x}$$

$$N=\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z}+\frac{t}{z+t}+\frac{x}{t+x}$$

$$\Rightarrow M+N=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+t}+\frac{t}{t+x}+\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z}+\frac{t}{z+t}+\frac{x}{t+x}=4.$$

Ta có:

$$N+A=\frac{y+t}{x+y}+\frac{x+z}{y+z}+\frac{y+t}{z+t}+\frac{x+z}{t+x}$$

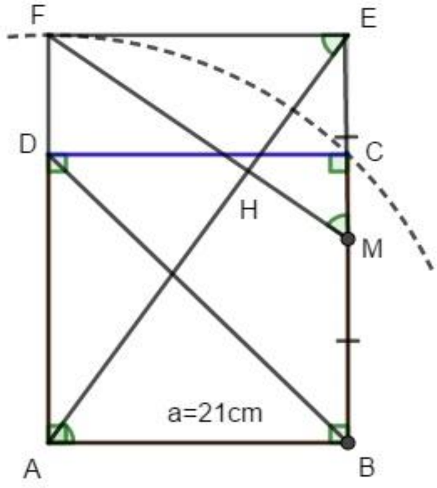
$$=(y+t)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z+t}\right)+(x+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{t+x}\right)\geq\frac{4(y+t)}{x+y+z+t}+\frac{4(x+z)}{x+y+z+t}=4.$$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $A+M\geq 4$.

$\Rightarrow A+M+A+N\geq 8 \Rightarrow A\geq 2.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=t>0$.

Câu 5.



Ta có: $AC = DB = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 21\sqrt{2}$ (cm).

Mà $AC = AF$ (C, F thuộc đường tròn tâm A)

$\Rightarrow AF = AC = 21\sqrt{2} = EB$.

Xét ΔABE vuông tại B.

Áp dụng định lý Pi – ta – go ta có:

$$AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{21^2 + \left(21\sqrt{2}\right)^2} = 21\sqrt{3}$$

Xét ΔFME vuông tại E có: $EM = \dfrac{1}{2}EB = \dfrac{21\sqrt{2}}{2}$

Áp dụng định lý Pi – ta – go ta có:

$$FM = \sqrt{FE^2 + ME^2} = \sqrt{21^2 + \left(\frac{21\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{21\sqrt{6}}{2}$$

Ta có: $\dfrac{AE}{EF} = \dfrac{21\sqrt{3}}{21} = \sqrt{3}$; $\dfrac{FM}{ME} = \dfrac{\frac{21\sqrt{6}}{2}}{\frac{21\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3}$

Xét ΔAEF và ΔFME ta có:

$AFE = FEM = 90^\circ$

$\dfrac{AE}{EF} = \dfrac{FM}{ME}$

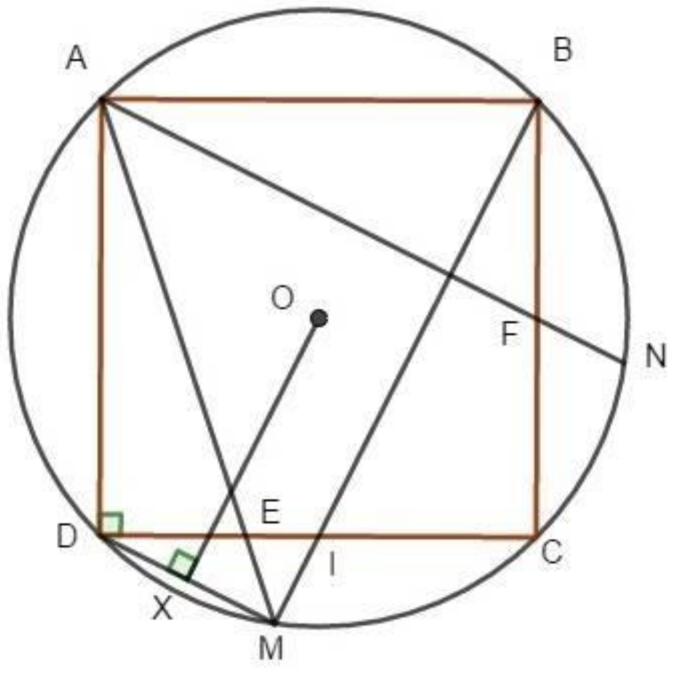
$\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta FME$ (c.g.c)

$\Rightarrow FEA = FME$

Mà $FEA + HEM = 90^\circ \Rightarrow FME + MEH = 90^\circ$

$\Rightarrow FM \perp AE$ (đpcm).

Câu 6.



Gọi I là giao điểm BM và CD:

$EI \parallel AB \Rightarrow \dfrac{EI}{AB} = \dfrac{ME}{AM}$

Kẻ OX vuông góc với DM $\Rightarrow \Delta OXD \backsim \Delta ADE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DX}{OD} = \dfrac{DE}{AE} = \dfrac{DE}{\sqrt{DE^2 + AD^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow DX = \dfrac{1}{\sqrt{10}}R$

$\Rightarrow DM = \dfrac{2}{\sqrt{10}}R$

Xét $\Delta DEM \backsim \Delta AEC \Rightarrow \dfrac{ME}{CE} = \dfrac{DE}{AE} = \dfrac{MD}{AC}$

$\Rightarrow \dfrac{ME}{AE}.\dfrac{DE}{CE} = \dfrac{MD^2}{AC^2} = \dfrac{1}{10}$

$\Rightarrow \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \dfrac{ME}{AM} = \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow EI = \dfrac{1}{6}AB = \dfrac{1}{6}CD \Rightarrow ID = EI + DE = \dfrac{1}{2}CD.$

$\Rightarrow \Delta CMI = \Delta BNF$ (g.c.g)

$\Rightarrow BF = CI = \dfrac{1}{2}BC$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đề số 15

Câu 1.

1. Với điều kiện $x>0, x\neq 1$, ta có:

$$P=\frac{x-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}+\frac{2x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+2x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}.$$

Ta có với điều kiện $x>0, x\neq 1 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1>\sqrt{x}+1>1$

$$\Rightarrow 0<P=\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}<\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}<2$$

Do P nguyên nên suy ra $P=1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}=1 \Leftrightarrow x=1$ (loại).

Vậy không có giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Chú ý: ***Có thể làm theo cách sau***

$P=\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow Px+\left(P-1\right)\sqrt{x}+P-2=0$, coi đây là phương trình bậc hai của $\sqrt{x}$.

Nếu $P=0 \Rightarrow -\sqrt{x}-2=0$ vô lí, suy ra $P\neq 0$ nên để tồn tại x thì phương trình trên có

$$\Delta=\left(P-1\right)^2-4P\left(P-2\right)\geq 0 \Leftrightarrow -3P^2+6P+1\geq 0 \Leftrightarrow P^2-2P+1\leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(P-1\right)^2\leq \frac{4}{3}$$

Do P nguyên nên $\left(P-1\right)^2$ bằng 0 hoặc 1

+) Nếu $\left(P-1\right)^2=0 \Leftrightarrow P=1 \Leftrightarrow x=1$ không thỏa mãn.

+) Nếu $\left(P-1\right)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}P=2\\P=0\end{array}\right. \Rightarrow P=2 \Leftrightarrow 2x+\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ không thỏa mãn

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn

2. Vì $x=\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{3}-2}-\dfrac{3}{2\sqrt{3}+2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

nên $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ là nghiệm của đa thức $2x^2+2x-1$.

Do đó $P=\dfrac{2x^{2017}\left(2x^2+2x-1\right)+2x+1}{\left(2x^2+2x-1\right)+x+1}=\dfrac{2x+1}{x+1}=3-\sqrt{3}.$

Câu 2.

1. Phương trình $(m-2)x^2-2(m-1)x+m=0 \Leftrightarrow (x-1)\big((m-2)x-m\big)=0$ có hai nghiệm khi và chỉ khi $m\neq 2$. Khi đó 2 nghiệm của phương trình là $a=1$ và $b=\dfrac{m}{m-2}$.

Hai nghiệm đó là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông suy ra $\dfrac{m}{m-2}>0 \Leftrightarrow m<0$ hoặc $m>2$.

Từ hệ thức $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{h^2}$ trong tam giác vuông ta có $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{(m-2)^2}{m^2}=\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow \dfrac{m-2}{m}=\pm\dfrac{1}{2}$

Với $\dfrac{m-2}{m}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2m-4=m \Rightarrow m=4$ (thỏa mãn)

Với $\dfrac{m-2}{m}=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2m-4=-m \Rightarrow m=\dfrac{4}{3}$ (loại)

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

2. ĐKXĐ: $x+y\neq 0$

Chia phương trình (1) cho $(x+y)^2$ ta được hệ $\begin{cases} 8(x^2+y^2)+4xy+\dfrac{5}{(x+y)^2}=13 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\left[(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]+3(x-y)^2=13 \\ \left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)+(x-y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)^2+3(x-y)^2=23 \\ \left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)+(x-y)=1 \end{cases}$$

Đặt $u=x+y+\dfrac{1}{x+y}, v=x-y$ (ĐK: $|u|\geq 2$), ta có hệ $\begin{cases} 5u^2+3v^2=23 & (3) \\ u+v=1 & (4) \end{cases}$

Từ (4) rút $u=1-v$, thế vào (3) ta được

$5u^2+3(1-u)^2=23 \Leftrightarrow 4u^2-3u-10=0 \Leftrightarrow u=2$ hoặc $u=-\dfrac{5}{4}$.

Trường hợp $u=-\dfrac{5}{4}$ loại vì $|u|<2$.

Với $u=2 \Rightarrow v=-1$ (thỏa mãn). Khi đó ta có hệ $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x+y}=2 \\ x-y=-1 \end{cases}$

Giải hệ trên bằng cách thế $x=-1+y$ vào phương trình đầu ta được

$2y-1+\dfrac{1}{2y-1}=2 \Leftrightarrow y=1$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(0;1)$.

Câu 3.

1. Ta có $(1) \Leftrightarrow (y-2)(y-3)+56=(y-2)x^2+(y-2)(y-4)x$

$\Leftrightarrow (y-2)\left[x^2+(y-4)x-(y-3)\right]=56$

$\Leftrightarrow (x-1)(y-2)(x+y-3)=56.$

Nhận thấy $(y-2)+(x-1)=x+y-3,$ nên ta phải phân tích số 56 thành tích của ba số nguyên mà tổng hai số đầu bằng số còn lại.

Như vậy ta có

+) $56=1.7.8 \Rightarrow (x;y)=(2;9).$

+) $56=7.1.8 \Rightarrow (x;y)=(8;3).$

+) $56=(-8).1.(-7) \Rightarrow (x;y)=(-7;3).$

+) $56=1.(-8).(-7) \Rightarrow (x;y)=(2;-6).$

+) $56=(-8).7.(-1) \Rightarrow (x;y)=(-7;9).$

+) $56=7.(-8).(-1) \Rightarrow (x;y)=(8;-6).$

Vậy phương trình có 6 nghiệm nguyên như trên.

2. Do $p-5 \vdots 8$ nên $p=8k+5$ ($k \in \mathbb{N}$)

Vì $(ax^2)^{4k+2}-(by^2)^{4k+2} \vdots (ax^2-by^2) \vdots p$ nên $a^{4k+2}\cdot x^{8k+4}-b^{4k+2}\cdot y^{8k+4} \vdots p$

Nhận thấy $a^{4k+2}\cdot x^{8k+4}-b^{4k+2}\cdot y^{8k+4}=(a^{4k+2}+b^{4k+2})x^{8k+4}-b^{4k+2}(x^{8k+4}+y^{8k+4})$

Do $a^{4k+2}+b^{4k+2}=(a^2)^{2k+1}+(b^2)^{2k+1} \vdots (a^2+b^2)=p$ và $b<p$ nên $x^{8k+4}+y^{8k+4} \vdots p$ (*)

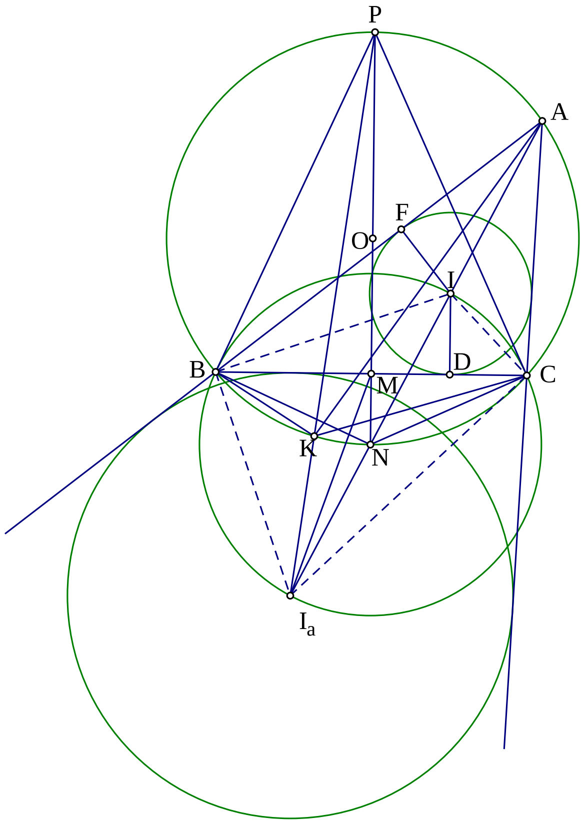
Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho p thì từ (*) suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p.

Nếu cả hai số x, y đều không chia hết cho p thì theo định lí Fecma ta có :

$x^{8k+4}=x^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p),\ \ y^{8k+4}=y^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p)$

$\Rightarrow x^{8k+4}+y^{8k+4}\equiv 2(\text{mod } p)$. Mâu thuẫn với (*).Vậy cả hai số x và y chia hết cho p.

Câu 4.



1. Chứng minh: IBI_aC **là tứ giác nội tiếp**

I_a là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , từ đó suy ra $BI_a \perp BI, CI_a \perp CI$

(Phân giác trong và phân giác ngoài cùng một góc thì vuông góc với nhau).

Xét tứ giác IBI_aC có $IBI_a + ICI_a = 180^0$

Từ đó suy ra tứ giác IBI_aC là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính II_a .

2. Chứng minh NI_a **là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác**

Nhận thấy bốn điểm A, I, N, I_a thẳng hàng (vì cùng thuộc tia phân giác của BAC).

Do NP là đường kính của (O) nên $NBP = 90^0$, M là trung điểm của BC nên $PN \perp BC$ tại M

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông PBN ta có $NB^2 = NM.NP$

Vì BIN là góc ngoài tại đỉnh I của tam giác ABI nên $BIN = \frac{1}{2}\left(ABC + BAC\right)$ (1)

Xét (O): $NBC = NAC = \frac{BAC}{2}$ (cùng chắn cung NC)

$\Rightarrow NBI = NBC + CBI = \frac{1}{2}\left(BAC + ABC\right)$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $BIN = NBI$ nên tam giác NIB cân tại N

Chứng minh tương tự tam giác NIC cân tại N

Từ đó suy ra N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC, cũng chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IBI_aC \Rightarrow NI_a^2 = NB^2 = NM.NP$

Vậy NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP

3. Chứng minh $DAI = KAI_a$

Gọi F là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB.

Xét hai tam giác ΔMNB và ΔFIA có: $NBM = \dfrac{1}{2}BAC = IAF$

$\Rightarrow \Delta MNB$ đồng dạng với ΔFIA.

Suy ra $\dfrac{NM}{FI} = \dfrac{NB}{IA}$ mà: ID = IF, NI = NB nên $\dfrac{NM}{ID} = \dfrac{NI_a}{IA}$

Ta có:

MN // ID nên $\angle MNI_a = DIA$ suy ra ΔNMI_a đồng dạng với ΔIDA

$\Rightarrow \angle NI_aM = \angle DAI$ (1).

Do NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP nên

$KAI_a = KAN = KPN = I_aPN = NI_aM$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $DAI = KAI_a$

Câu 5. Ta có $P = \dfrac{xz}{y^2+yz} + \dfrac{y^2}{xz+yz} + \dfrac{x+2z}{x+z} = \dfrac{\frac{xz}{yz}}{\frac{y^2}{yz}+1} + \dfrac{\frac{y^2}{yz}}{\frac{xz}{yz}+1} + \dfrac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}}$

$$= \frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{z}+1} + \frac{\frac{y}{z}}{\frac{x}{y}+1} + \frac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}} = \frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{a^2+1} + \frac{1+2c^2}{1+c^2},$$

trong đó $a^2 = \dfrac{x}{y}, b^2 = \dfrac{y}{z}, c^2 = \dfrac{z}{x}$ $(a,b,c>0)$

Nhận xét rằng $a^2.b^2 = \dfrac{x}{z} = \dfrac{1}{c^2} \ge 1$ $(do\ x \ge z)$.

Xét $\dfrac{a^2}{b^2+1} + \dfrac{b^2}{a^2+1} - \dfrac{2ab}{ab+1} = \dfrac{a^2(a^2+1)(ab+1)+b^2(b^2+1)(ab+1)-2aba^2(a^2+1)(b^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)}$

$$= \frac{ab(a^2-b^2)^2+(a-b)(a^3-b^3)+(a-b)^2}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} \ge 0$$

Do đó $\dfrac{a^2}{b^2+1} + \dfrac{b^2}{a^2+1} \ge \dfrac{2ab}{ab+1} = \dfrac{\frac{2}{c}}{\frac{1}{c}+1} = \dfrac{2}{1+c}$ (1). Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

Khi đó $\dfrac{2}{1+c}+\dfrac{1+2c^2}{c^2+1}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{2\left(2\left(1+c^2\right)+\left(1+c\right)\left(1+2c^2\right)\right)-5\left(1+c\right)\left(1+c^2\right)}{2\left(1+c\right)\left(1+c^2\right)}$

$$=\frac{1-3c+3c^2-c^3}{2\left(1+c\right)\left(1+c^2\right)}=\frac{\left(1-c\right)^3}{2\left(1+c\right)\left(1+c^2\right)}\geq 0\quad \left(do\ c\leq 1\right)\ \left(2\right)$$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra điều phải chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi $a=b,\ c=1\Leftrightarrow x=y=z.$

Đề số 16

Câu 1.

Điều kiện: $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$

Khi đó: $P=\left[\dfrac{\sqrt{a}+2018}{(\sqrt{a}+1)^2}-\dfrac{\sqrt{a}-2018}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}\right]\dfrac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$

$$=\frac{(\sqrt{a}+2018)(\sqrt{a}-1)-(\sqrt{a}-2018)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)}.\frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$$

$$=\frac{2.2017\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)}.\frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}=\frac{2017}{a-1}$$

Câu 2.

Ta có: $\dfrac{x+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{y+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2-y+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2-x+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)\left(2\sqrt{x}+2\sqrt{y}-2\sqrt{z}\right)}{\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(2\sqrt{x}+2\sqrt{y}-2\sqrt{z}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}.$$

Câu 3.

Ta có: $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321\Leftrightarrow 1111a+111b+11c+d=4321\qquad (1)$

Vì $a,b,c,d\in \mathbb{N}$ và $1\leq a\leq 9,0\leq b,c,d\leq 9$ nên $3214\leq 1111a\leq 4321$

$\Rightarrow a=3$. Thay vào (1) ta được: $111b+11c+d=988\ \ (2)$

Lập luận tương tự ta có: $880\leq 111b\leq 988$

$\Rightarrow b=8$. Thay vào (2) ta được: $11c+d=100$

Mà $91 \le 11c \le 100 \Rightarrow c = 9$ và $d = 1$.

Vậy $\overline{abcd} = 3891$.

Câu 4.

Từ phương trình thứ hai ta có: $x = 2 - 2y$ thế vào phương trình thứ nhất được:

$(m-1)(2-2y) + y = 2$

$\Leftrightarrow (2m-3)y = 2m-4$ (3)

Hệ có nghiệm x, y là các số nguyên $\Leftrightarrow (3)$ có nghiệm y là số nguyên.

Với $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2m-3 \ne 0 \Rightarrow (3)$ có nghiệm $y = \dfrac{2m-4}{2m-3}$

$= 1 - \dfrac{1}{2m-3}$

$y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m-3 = 1 \\ 2m-3 = -1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 1 \end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị m thoả mãn là $1; 2$.

Câu 5.

Điều kiện xác định $\begin{cases} 1 - x \ge 0 \\ 4 + x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le x \le 1 \quad (*)$

Với điều kiện (*), phương trình đã cho tương đương với: $5 + 2\sqrt{1-x}.\sqrt{4+x} = 9$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(4+x)} = 2$

$\Leftrightarrow (1-x)(4+x) = 4$

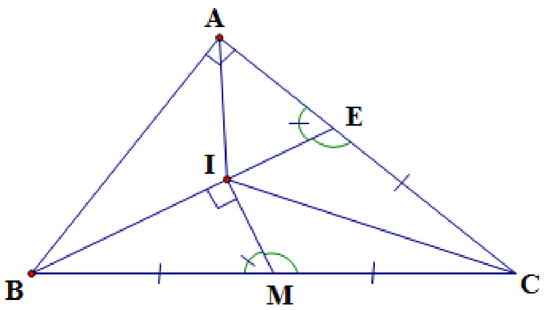
$\Leftrightarrow x^2 + 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta được $x = 0; x = -3$.

Câu 6.



Ta có $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=20cm$. Gọi E là giao điểm của BI với AC.

Theo tính chất đường phân giác ta có: $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{EC}{BC}=\dfrac{AE+EC}{AB+BC}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow EC=\dfrac{BC}{2}=10cm$

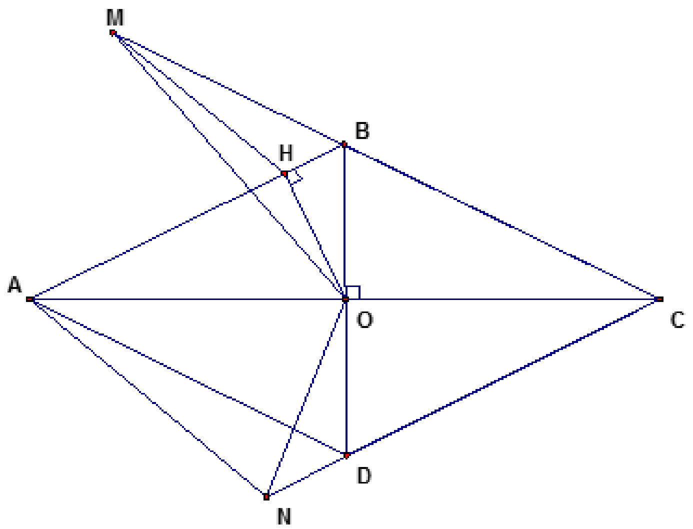
Ta có $\Delta ICE=\Delta ICM\,(c-g-c)$ do: $EC=MC=10;\ ICE=ICM$; IC chung.

Suy ra: $IEC=IMC\Rightarrow IEA=IMB$

Mặt khác $IBM=IBA\Rightarrow$ hai tam giác $IBM\,,ABE$ đồng dạng

$\Rightarrow BIM=BAE=90^0\Rightarrow BI\perp MI$

Câu 7.



a)Ta có $MBH=ADN\,,MHB=AND$

$\Delta MBH\backsim\Delta ADN$

$\Rightarrow\dfrac{MB}{AD}=\dfrac{BH}{DN}$

$\Rightarrow MB.DN=BH.AD\quad(1)$

b) Ta có: $\Delta OHB\backsim\Delta AOD\Rightarrow\dfrac{BH}{DO}=\dfrac{OB}{AD}\Rightarrow DO.OB=BH.AD\,(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $MB.DN=DO.OB\Rightarrow\dfrac{MB}{DO}=\dfrac{OB}{DN}$

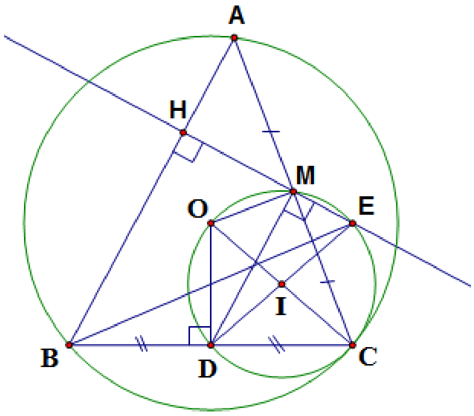
Ta lại có: $MBO=180^0-CBD=180^0-CDB=ODN$

nên $\Delta MBO\backsim\Delta ODN\Rightarrow OMB=NOD.$

Từ đó suy ra: $MON=180^0-\left(MOB+NOD\right)=180^0-\left(MOB+OMB\right)$

$=180^0-OBC=115^0$

Câu 8.



Gọi D là trung điểm của đoạn BC, vì tam giác BOC, AOC là các tam giác cân tại O nên $OD \perp BC, OM \perp AC$.

Ta có: $ODC = OMC = 90^0 \Rightarrow$ Bốn điểm O, D, C, M cùng nằm trên đường tròn (I) có tâm I cố định, đường kính OC cố định.

Gọi E là điểm đối xứng với D qua tâm I, khi đó E cố định và DE là đường kính của đường tròn (I).

Nếu $H \neq E, H \neq B$

- Với $M \equiv E \Rightarrow BHE = 90^0$

- Với $M \neq E$, do $DM \parallel BH \Rightarrow DMH = 90^0$.

Khi đó $DME = DMH = 90^0 \Rightarrow H, M, E$ thẳng hàng. Suy ra $BHE = 90^0$

Vậy ta luôn có: $BHE = 90^0$ hoặc $H \equiv E$ hoặc $H \equiv B$ do đó H thuộc đường tròn đường kính BE cố định.

Câu 9.

Với $\forall x, y, z > 0$ ta có : $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$

$$\Rightarrow (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x + y + z} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$

Ta có: $5a^2 + 2ab + 2b^2 = (2a + b)^2 + (a - b)^2 \geq (2a + b)^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} \leq \frac{1}{2a + b} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$

Tương tự: $\frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} \leq \frac{1}{2b + c} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Đẳng thức xảy ra khi $b = c$

$$\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}} \le \frac{1}{2c+a} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

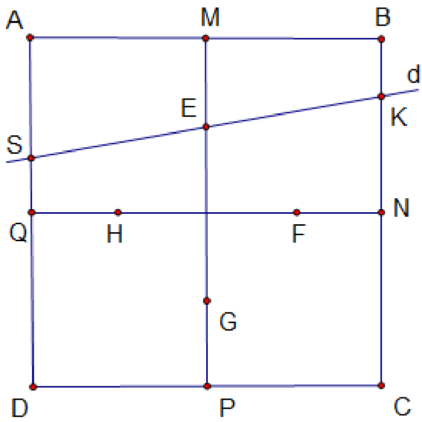
Đẳng thức xảy ra khi $c=a$

Vậy $\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}} \le \frac{1}{9}\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}\right)$

$\le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le \frac{2}{3}$

Đẳng thức xảy rakhi $a=b=c=\frac{3}{2}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 10.



Giả sử hình vuông *ABCD* có cạnh là *a* (*a*>0). Gọi *M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, CD, DA*. Gọi *d* là một đường thẳng bất kỳ trong *2018* đường thẳng đã cho thỏa mãn yêu cầu bài toán. Không mất tính tổng quát, giả sử *d* cắt các đoạn thẳng *AD, MP, BC* lần lượt tại *S, E, K* sao cho $S_{CDSK}=3S_{ABKS}$

Từ $S_{CDSK}=3S_{ABKS}$ ta suy ra được: $DS+CK=3(AS+BK)$

$\Leftrightarrow a-AS+a-BK=3(AS+BK) \Leftrightarrow AS+BK=\frac{1}{2}a$

$\Leftrightarrow EM=\frac{1}{4}a$ suy ra *E* cố định và *d* đi qua *E*.

Lấy *F, H* trên đoạn *NQ* và *G* trên đoạn *MP* sao cho $FN=GP=HQ=\frac{a}{4}$.

Lập luận tương tự như trên ta có các đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải đi qua một trong bốn điểm cố định *E, F, G, H*.

Theo nguyên lý Dirichlet từ *2018* đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải có ít nhất $\left[\frac{2018}{4}\right]+1=505$ đường thẳng đi qua một trong bốn điểm *E, F, G, H*cố định, nghĩa là *505* đường thẳng đó đồng quy.

Đề số 17

Câu 1. a) Ta có $A=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)=2x.$

Do đó $B=1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}=1-\left|2\sqrt{x}-1\right|=1-\left(1-2\sqrt{x}\right)=2\sqrt{x}.$

b) Từ giả thiết $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0\Rightarrow xy+yz+zx=0$

$\Rightarrow x^2+2yz=x^2+yz-xy-zx=(x-y)(x-z)$

Tương tự: $y^2+2zx=(y-x)(y-z);z^2+2xy=(z-x)(z-y)$

$$\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2zx}+\frac{1}{z^2+2xy}=\frac{1}{(x-y)(x-z)}+\frac{1}{(y-x)(y-z)}+\frac{1}{(z-x)(z-y)}$$

$$=\frac{y-x+x-z+z-y}{(x-y)(x-z)(y-z)}=0$$

Suy ra đpcm

Câu 2.

a) ĐKXĐ: $x\geq 2$

Đặt $\sqrt{x+5}=a>0;\sqrt{x-2}=b\geq 0\Rightarrow a^2-b^2=7.$

Ta có phương trình $(a-b)(1+ab)=a^2-b^2\Leftrightarrow(a-b)(a-1)(b-1)=0$

Do $a\neq b$ nên

+) $a=1\Rightarrow\sqrt{x+5}=1\Rightarrow x=-4(ktm)$

+) $b=1\Rightarrow\sqrt{x-2}=1\Rightarrow x=3(tm)$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$

b) Ta có:

$x^3=x+y\Rightarrow 2x^3=2(x+y)\Rightarrow 2x^3=\left(x^2+y^2-xy\right)(x+y)$

$2x^3=x^3+y^3\Rightarrow x^3=y^3\Rightarrow x=y$

Thế vào phương trình $x^2+y^2-xy=2\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x,y)=\left\{\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right);\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\right\}$

Câu 3.

a) ĐKXĐ: $x\neq 0$

Đặt $a=x+\sqrt{2018};\ b=\dfrac{7}{x}-\sqrt{2018}\left(a,b\in\mathbb{Z}\right)$

$\Rightarrow b=\dfrac{7}{a-\sqrt{2018}}-\sqrt{2018}\Leftrightarrow ab-2025=(b-a)\sqrt{2018}$

Nếu $a\neq b$ thì vế phải là số vô tỉ còn vế trái là số nguyên, vô lí.

Nếu $a\neq b\Rightarrow ab-2025=0\Rightarrow a=b=\pm 45$

Với $a = 45 \Rightarrow x = \dfrac{7}{45 + \sqrt{2018}} = 45 - \sqrt{2018}$

Với $a = -45 \Rightarrow x = \dfrac{7}{-45 + \sqrt{2018}} = -45 - \sqrt{2018}$

b) Ta có $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = (10a + b)^2 - (10b + a)^2 = 99\left(a^2 - b^2\right)$

Vì $3267 = 99.33$

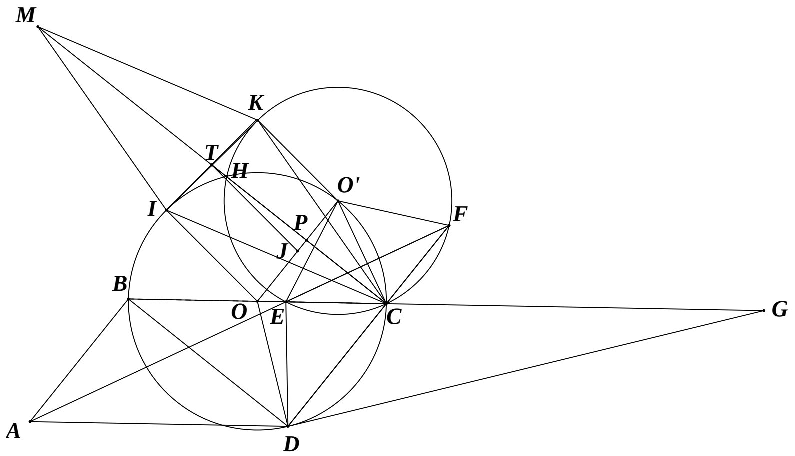
Nên $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 \vdots 3267 \Rightarrow a^2 - b^2 \vdots 33$ hay $(a - b)(a + b)$ chia hết cho 3 và 11.

Nếu $a = b$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Nếu $a \neq b$ vì $1 \leq a; b \leq 9$ nên ta được hai số 47 và 74.

Vậy các số cần tìm là 11; 22; 33; 44; 47; 55; 66; 74; 77; 88; 99.

Câu 4.



a) Ta có $BAE = DAE\left(gt\right); BAE = EFC; DAE = FEC \Rightarrow EFC = FEC \Rightarrow \Delta EFC$ cân tại C

$\Rightarrow CE = CF$.

Lại có $BEA = FEC \Rightarrow BEA = BAE \Rightarrow \Delta ABE$ cân tại $BA = CD \Rightarrow BE = CD$

mà $B \Rightarrow BA = BE$

Do đó $BC = DF\,(1)$

Mặt khác, $\Delta O'CF$ cân $O'CF = O'FC$ vì $CE = CF$

nên $O'CE = O'CF \Rightarrow O'CE = O'FC\,(2)$

Và $O'C = O'F\,(3)$

Từ (1) (2) (3) suy ra $\Delta BO'C = \Delta DO'F$

Do đó $O'BC = O'CF$ suy ra tứ giác $BDCO'$ nội tiếp đường tròn hay $O' \in (O)$.

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông BCD và phương tích của đường tròn ta có:

$$\begin{cases} DG^2 = CG.BG \\ DE^2 = BE.CE \end{cases} \Rightarrow DG^2 - DE^2 = CG.BG - CG.BG \Rightarrow GE^2 = CG.BG - CG.BG$$

$$\Rightarrow (CE + CG)^2 = CG.BG - CG.BG \Leftrightarrow CE^2 + 2CE.CG + CG^2 = CG.BG - CG.BG$$

$$\Rightarrow CE^2 + CE.CG + BE.CE = CG.BG - CG^2 - CE.CG$$

$$\Leftrightarrow CE(CE + CG + BE) = CG.(BG - CG - CG) \Leftrightarrow CE.BG = CG.BE$$

c) Tia CH cắt IK tại N. Áp dụng phương tích của đường tròn ta có

$NK^2 = NH.NC = NI^2 \Rightarrow NK = NI$

Mà $CIMK$ là hình bình hành, do đó M, N, H, C thẳng hàng.

Gọi J là trung điểm của OO' thì NJ là đường trung bình của hình thang vuông $OIKO'$.

Suy ra $OB + O'C = OI + O'K = 2NJ$.

Gọi T là điểm đối xứng của H qua N, P là giao điểm của CH và OO'. Ta có $PH = PC$, $OO' \perp CH$

Suy ra $NJ > NP \Rightarrow 2NJ > 2NP = NH + PH + NP = NT + PC + NP = TC = HM$

Vậy $OB + O'C > HM$.

Câu 5.

Từ giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 \le 3xyz \Rightarrow \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} \le 3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchay ta có: $x^4 + yz \ge 2x^2\sqrt{yz} \Rightarrow \dfrac{x^2}{x^4 + yz} \le \dfrac{1}{2\sqrt{yz}}$

Tương tự ta có $P \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{xy}} + \dfrac{1}{\sqrt{yz}} + \dfrac{1}{\sqrt{zx}}\right)$

Mặt khác

$ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2$

$\Rightarrow P \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{xy + yz + zx}{xyz} \le \dfrac{1}{2}.\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} \le \dfrac{3}{2}$

Vậy GTLN của $P = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Đề số 18

Câu 1.

1. Điều kiện để P xác định là : $x \ge 0$; $y \ge 0$; $y \ne 1$; $x + y \ne 0$.

$$P = \frac{x(1 + \sqrt{x}) - y(1 - \sqrt{y}) - xy\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)\left(1 - \sqrt{y}\right)} = \frac{(x - y) + \left(x\sqrt{x} + y\sqrt{y}\right) - xy\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)\left(1 - \sqrt{y}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y} + x - \sqrt{xy} + y - xy\right)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)\left(1 - \sqrt{y}\right)} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 1\right) - \sqrt{y}\left(\sqrt{x} + 1\right) + y\left(1 + \sqrt{x}\right)\left(1 - \sqrt{x}\right)}{\left(1 + \sqrt{x}\right)\left(1 - \sqrt{y}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + y - y\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{y}\right)} = \frac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{y}\right) - \sqrt{y}\left(1-\sqrt{y}\right)}{\left(1-\sqrt{y}\right)}$$

$$= \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}$$

2. P = 2 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y} = 2$ với $x \ge 0$; $y \ge 0$; $y \ne 1$; $x + y \ne 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1+\sqrt{y}\right) - \left(\sqrt{y}+1\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(1+\sqrt{y}\right) = 1$$

Ta cã: 1 + $\sqrt{y} \ge 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 4 \Rightarrow$ x = 0; 1; 2; 3 ; 4

Thay vào P ta có các cặp giá trị (4; 0) và (2 ; 2) thỏa mãn

Câu 2.

1. Ta có :

$$(x^2-1)(x+3)(x+5) = m \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+3)(x-1)(x+5) = m$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4x+3)(x^2+4x-5) = m \qquad (2)$$

Đặt $y = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \ge 0 \quad (\forall x \in R)$. Khi đó (2) có dạng :

$(y-1)(y-9) = m$ hay $y^2 - 10y + 9 - m = 0 \qquad (3)$

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt tương đương với phương trình (3) có hai nghiệm dương phân biệt $y_1 > y_2 > 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 16 + m > 0 \\ S = y_1 + y_2 = 10 > 0 \\ P = y_1.y_2 = 9 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -16 < m < 9 \qquad (4)$$

Khi y_1, y_2 là hai nghiệm dương phân biệt của phương trình (3) thì phương trình (2) tương đương với :

$x^2 + 4x + 4 - y_1 = 0$ hoặc $x^2 + 4x + 4 - y_2 = 0$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình : $x^2 + 4x + 4 - y_1 = 0$

Gọi x_3, x_4 là hai nghiệm phân biệt của phương trình : $x^2 + 4x + 4 - y_2 = 0$

Áp dụng định lý vi-et cho các phương trình (3), (5), (6) ta có :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} + \frac{x_3 + x_4}{x_3x_4} = \frac{-4}{4 - y_1} + \frac{-4}{4 - y_2} = \frac{4(y_1 + y_2) - 32}{16 - 4(y_1 + y_2) + y_1y_2}$$

$$= \frac{40 - 32}{16 - 40 + 9 - m} = \frac{8}{-15 - m} = -1$$

$\Leftrightarrow m = -7$ (thỏa mãn)

2. Giải hệ : $\begin{cases} x^2 = 2 + xy^2 & (1) \\ y^2 = 2 + x^2y & (2) \end{cases}$

- Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được ;

$$x^2 - y^2 = xy^2 - x^2y \Leftrightarrow (x-y)(xy+x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=y & (3) \\ xy+x+y=0 & (4) \end{array}\right.$$

- Thay y = x từ (3) vào (1) ta được phương trình :

$$x^2 = 2 + x^3 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-2x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1-\sqrt{2} \\ x=1+\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy ta được các nghiệm (x; y) là :

$(-1;-1)$; $(1-\sqrt{2};1-\sqrt{2})$; $(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2})$

- Từ (4) suy ra $y = \dfrac{-x}{x+1}$ (vì x = -1 không phải là nghiệm của (4)). Thay y vào (2), ta có : $\dfrac{x^2}{(x+1)^2} = 2 + \dfrac{-x^3}{x+1} \Leftrightarrow x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+2x+2)(x^2-x-1)=0 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$ (Vì $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{5} \\ x=1+\sqrt{5} \end{array}\right.$$

- Với $x=1-\sqrt{5} \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2-\sqrt{5}} = -3-\sqrt{5}$. Ta được $(x;y)=(1-\sqrt{5};-3-\sqrt{5})$ là nghiệm của hệ.

- Với $x=1+\sqrt{5} \Rightarrow y = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2+\sqrt{5}} = -3+\sqrt{5}$. Ta được $(x;y)=(1+\sqrt{5};-3+\sqrt{5})$ là nghiệm của hệ.

Vậy hệ đã cho có 5 nghiệm :

$(-1;-1)$; $(1-\sqrt{2};1-\sqrt{2})$; $(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2})$; $(1-\sqrt{5};-3-\sqrt{5})$;

$(1+\sqrt{5};-3+\sqrt{5})$

Câu 3.

1.Ta có :

$$p^{2016} - 1 = (p^4)^{504} - 1^{504} = (p^4-1).A = (p-1)(p+1)(p^2+1).A \quad (1) \quad (A \in N)$$

Vì P là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là số lẻ, suy ra p – 1, p +1 là hai số chẵn liên tiếp

$$\Rightarrow (p-1)(p+1) \vdots 4 \qquad (2)$$

Vì p – 1, p, p+1 là ba số tự nhiên liên tiếp nên $(p-1)p(p+1) \vdots 3$. Nhưng p không chia hết cho 3 nên $(p-1)(p+1) \vdots 3$ (3)

Vì p không chia hết cho 5 nên p có một trong các dạng $5k \pm 1$; $5k \pm 2$

- Nếu $p = 5k \pm 1$ thì $p^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5n + 1$

- Nếu $p = 5k \pm 2$ thì $p^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5l - 1$

Cả hai trường hợp trên đều cho ta $p^4 - 1 = 5q \vdots 5$ (4) ($(n, l, q \in N)$

Vì 3, 4, 5 là các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $p^{2016} - 1$ chia hết cho 4.3.5 tức là chia hết cho 60

2. Vì vai trò của x, y, z bình đẳng nhau, khác nhau đôi một nên ta có thể giả sử $x < y < z$. Khi đó , gọi t là thương của phép chia $x^3 + y^3 + z^3 : x^2y^2z^2$. Suy ra :

$$x^3 + y^3 + z^3 = tx^2y^2z^2 \Leftrightarrow z = tx^2y^2 - \frac{x^3 + y^3}{z^2} > tx^2y^2 - \frac{x^3 + y^3}{x^2y^2} = tx^2y^2 - x - y \quad (1)$$

- Nếu $tx^2y^2 - x - y < 0$ (*) thì $t < \frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2y} < 2 \Rightarrow t = 1$

Thay t = 1 vào (*), ta được $x^2y^2 - x - y < 0 \Rightarrow xy - x - y < 0 \Rightarrow (x-1)(y-1) < 1$

$\Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow y^2 - y < 0 \Leftrightarrow y(y-1) < 0$ (vô lý)

Vậy $tx^2y^2 - x - y \geq 0$ (2)

- Từ (1), (2) suy ra : $z^2 \geq (tx^2y^2 - x - y)^2$ (3)

- Mặt khác vì $x^3 + y^3 + z^3 = tx^2y^2z^2$ nên $x^3 + y^3 \vdots z^2 \Rightarrow x^3 + y^3 \geq z^2$ (4)

- Từ (3) và (4) suy ra :

$x^3 + y^3 \geq (tx^2y^2 - x - y)^2$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 \geq t^2x^4y^4 - 2tx^2y^2(x + y) + x^2 + 2xy + y^2$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + 2tx^2y^2(x + y) > t^2x^4y^4$

$$\Leftrightarrow txy < \frac{x^3 + y^3 + 2tx^2y^2(x + y)}{tx^3y^3}$$

$$\Leftrightarrow txy < 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{tx^3} + \frac{1}{ty^3} \quad (5)$$

- Nếu $x \geq 2$ thì $y \geq 3 \Rightarrow txy \geq 6 > 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{t.2^3} + \frac{1}{t.2^3} > 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{t.x^3} + \frac{1}{t.y^3}$

Điều này mâu thuẫn với (5).

Vậy x = 1. Khi đó (5) trở thành :

$$ty < 2 + \frac{2}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{ty^3} \quad (6)$$

- Nếu $y \geq 4$ thì $ty \geq 4 > 2 + \frac{2}{4} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t.4^3} \geq 2 + \frac{2}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{ty^3}$. Điều này mâu thuẫn với (6).

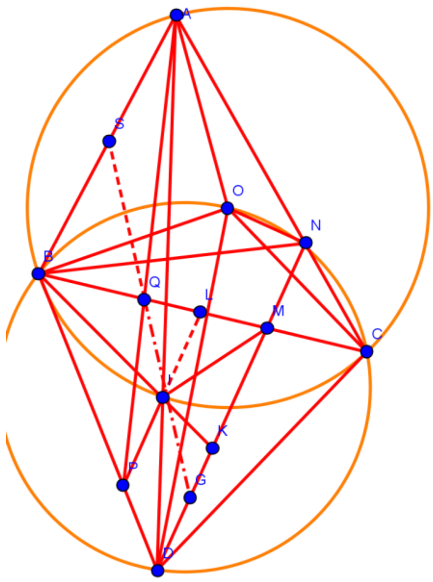
Vậy $y \in \{2;3\}$ (Vì y > x = 1)

+ Nếu y = 2 thì $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \vdots z^2 \\ x \leq y \leq z \\ x = 1; y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1;\ y = 2;\ z = 3$.

+ Nếu y = 3 thì $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28 \vdots z^2 \\ x \leq y \leq z \\ x = 1; y = 3 \end{cases}$.(Loại)

- Thử lại ta thấy (x, y, z) = (1, 2, 3) và các hoán vị của nó thỏa mãn.

Vậy thương của phép chia $x^3 + y^3 + z^3 : x^2y^2z^2$ là t = 1.



Câu 4.

a) + Chứng minh tứ giác BONC nội tiếp.

- Vì BD, DC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên ta có :

$OBD = OCD = 90^0$

$\Rightarrow OBD + OCD = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Suy ra, tứ giác OBDC nội tiếp (1)

Mặt khác :

$BAC = DBC$ (Cùng chắn cung BC)

$BAC = DNC$ (Vì DN // AB)

$\Rightarrow DBC = DNC$

Suy ra tứ giác BDCN nội tiếp (2)

- Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm B, O, N, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Vậy tứ giác BONC là tứ giác nội tiếp

+ Chứng minh tam giác ABN cân

Ta có :

$ANO = OBC$ (Vì cùng bù với góc ONC)

$OBC = OCB$ (Vì tam giác OBC cân tại O)

$OCB = ONB$ (Vì cùng chắn cung OB)

$\Rightarrow ANO = ONB$

Suy ra NO là tia phân giác của góc ANB. (3)

Mặt khác :

$ON \perp DN$ (Vì $\widehat{OND} = 90^0$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

DN // AB (giả thiết)

$\Rightarrow ON \perp AB$ (4)

Từ (3), (4) suy ra tam giác ANB có đường phân giác góc N đồng thời là đường cao.

Vậy tam giác ANB cân tại N.

b) - Xét tam giác DBM và tam giác DNB, ta có :

$\widehat{BDN}$ là góc chung

$\widehat{BND} = \widehat{MBD}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow \Delta DBM \backsim \Delta DNB \quad (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{DB}{DN} = \frac{DM}{DB} \Leftrightarrow DB^2 = DM.DN \quad (5)$$

- - Xét tam giác DIB và tam giác DBA, ta có :

$\widehat{ADB}$ là góc chung

$\widehat{DBI} = \widehat{BAD}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \Delta DIB \backsim \Delta DBA \quad (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{DB}{DA} = \frac{DI}{DB} \Leftrightarrow DB^2 = DI.DA \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra : $DI.DA = DM.DN \Leftrightarrow \dfrac{DM}{DI} = \dfrac{DA}{DN}$.

Từ đó kết hợp với ADN là góc chung suy ra :

$\Delta DIM \backsim DNA \quad (c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{DIM} = \widehat{DNA}$

Suy ra tứ giác ANMI nội tiếp

Ta có :

$\widehat{NAD} = \widehat{IMD}$ (cùng bù với góc IMN)

$\widehat{NAD} = \widehat{CBI}$ (cùng chắn cung CI)

$\Rightarrow \widehat{CBI} = \widehat{IMD}$

Kết hợp với góc KBM chung, suy ra :

$\Delta KMI \backsim \Delta KBM \quad (c.g.c)$

$$\Rightarrow \frac{KM}{KI} = \frac{KB}{KM}$$

$\Rightarrow KM^2 = KI.KB \quad (6)$

Mặt khác :

$KDI = BAI$ (Hai góc so le trong)

$DBI = BAI$ (Cùng chắn cung BI)

$\Rightarrow KDI = BDI$

Kết hợp với góc BKD chung, suy ra :

$\Delta KDI \backsim \Delta KBD \quad (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{KD}{KI} = \dfrac{KB}{KD}$

$\Rightarrow KD^2 = KI.KB \quad (7)$

Từ (6) và (7) suy ra : KM = KD

Vậy K là trung điểm của DM.

c) Giả sử PI cắt BC tại L, IQ cắt AB tại S.

Ta có :

$\dfrac{PI}{DK} = \dfrac{BI}{BK} = \dfrac{IL}{KM}$ (vì PI // MN ; định lí ta let) (8)

$\dfrac{PI}{AS} = \dfrac{QI}{QS} = \dfrac{IL}{BS}$ (vì AB // PL ; định lí ta let) (9)

Vì DK = KM nên từ (8) suy ra : PI = IL

Vì PI = IL nên từ (9) suy ra : AS = BS

Giả sử SI cắt DK tại T, suy ra : $\dfrac{AS}{DT} = \dfrac{SI}{TI} = \dfrac{BS}{KT}$ (Định lý Talets ; AB // DK) (10)

Vì AS = BS nên từ (10) suy ra : T là trung điểm của DK, hay G trùng với K.

Vậy ba điểm Q, I, G thẳng hàng.

Câu 5.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó :

$$5 = a + b + c \leq 3a \leq 6 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \leq a \leq 2 \Rightarrow (a-1)(2-a) \geq 0 \qquad (*)$$

Mặt khác, vì $0 \leq b, c \leq 2$ nên

$$(b-2)(c-2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow bc \geq 2(b+c) - 4$$
$$\Leftrightarrow bc \geq 2(5-a) - 4 = 6 - 2a \qquad (**)$$

Do đó

$A = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{a} + \sqrt{b + c + 2\sqrt{bc}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{5 - a + 2\sqrt{6-2a}}$ (Theo (**))

$\Leftrightarrow A \geq \sqrt{a} + \sqrt{3 - a + 2\sqrt{2}\sqrt{3-a} + 2} = \sqrt{a} + \sqrt{(\sqrt{3-a} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{3-a} + \sqrt{2}$

vì $\left(\sqrt{a} + \sqrt{3-a}\right)^2 = a + 2\sqrt{a(3-a)} + 3 - a = 3 + 2\sqrt{3a - a^2} = 3 + 2\sqrt{(a-1)(2-a) + 2}$

$\geq 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$ (vì $(a-1)(2-a) \geq 0$, theo (*))

Nên $\sqrt{a}+\sqrt{3-a}\ge\sqrt{2}+1$

Vậy $A\ge 2\sqrt{2}+1$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}0\le a,b,c\le 2\ ;\ a+b+c=5\\ (a-1)(2-a)=0\\ bc=6-2a\end{cases}\Leftrightarrow a=b=2\ ;\ c=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là $2\sqrt{2}+1$. Đạt được khi (a, b, c) = (2, 2, 1) và các hoán vị.

Đề số 19

Câu 1.

a) Ta có P(x) = $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}\ge c-\frac{b^2}{4}$

Suy ra $\begin{cases}c-\frac{b^2}{4}=-1\\ -\frac{b}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4\\ c=3.\end{cases}$

b) $\begin{cases}x^2+xy^2-xy-y^3=0(1)\\ 2\left(x^2+1\right)-3\sqrt{x}\left(y+1\right)-y=0(2)\end{cases}$ ĐK: $x\ge 0$

(1) $\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x+y^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y=0\\ x+y^2=0\end{array}\right.$

TH1: $x+y^2=0$, suy ra $x=y=0$ không thỏa mãn hệ.

TH2: x - y = 0 hay y = x thế vào (2) ta được : $2\left(x^2+1\right)-3\sqrt{x}\left(x+1\right)-x=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x\sqrt{x}-x-3\sqrt{x}+2=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=2\\ \sqrt{x}=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=\frac{1}{4}.\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm : $\left(x;y\right)=\left(4;4\right)$ và $\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Câu 2.

a) ĐK: $-1\le x\le 1$

Đặt a = $\sqrt{1+x}$, b = $\sqrt{1-x}$ ($a,b\ge 0$)

Ta có $2a^2+b^2-1=3ab+a\Leftrightarrow 2a^2-\left(3b+1\right)a+b^2-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b+1 \\ a = \dfrac{b-1}{2}. \end{array}\right.$$

Với a = b +1 ta có $\sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} + 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 2\sqrt{1-x}$

(ĐK $x \geq \frac{1}{2}$) $\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4 - 4x \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (thỏa mãn).

Với $a = \dfrac{b-1}{2}$ ta có $\sqrt{1+x} = \dfrac{\sqrt{1-x} - 1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{1+x} + 1 = \sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{1+x} = -5x - 4$ (ĐK $x \leq -\frac{4}{5}$)

$\Leftrightarrow 25x^2 + 24x = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{24}{25}$ (thỏa mãn).

Vậy $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $x = -\dfrac{24}{25}$ là nghiệm của phương trình.

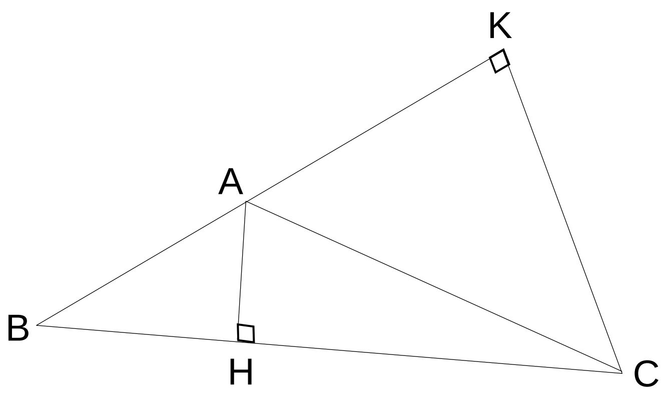
b) Ta có $P = \dfrac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \dfrac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \dfrac{c}{\sqrt{(c+b)(c+a)}}$

$$= a.2\sqrt{\frac{1}{(a+b)(a+c)}} + b.2\sqrt{\frac{1}{4(b+c)(b+a)}} + c.2\sqrt{\frac{1}{4(c+b)(c+a)}}$$

$$\leq a\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}\right) + b\left(\frac{1}{4(b+c)} + \frac{1}{b+a}\right) + c\left(\frac{1}{4(c+b)} + \frac{1}{c+a}\right) = \frac{9}{4}$$

Vậy GTLN của P bằng $\dfrac{9}{4}$ khi $b = c = \dfrac{a}{7} = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

Câu 3.



Kẻ $CK \perp AB\,(K \in AB)$ ta có $CAK = 45^0$ suy ra tam giác AKC vuông cân tại K.

Đặt AB = x, AK = y (x, y > 0) tao có: $BK^2 + KC^2 = BC^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + 2y^2 = 25$ (1)

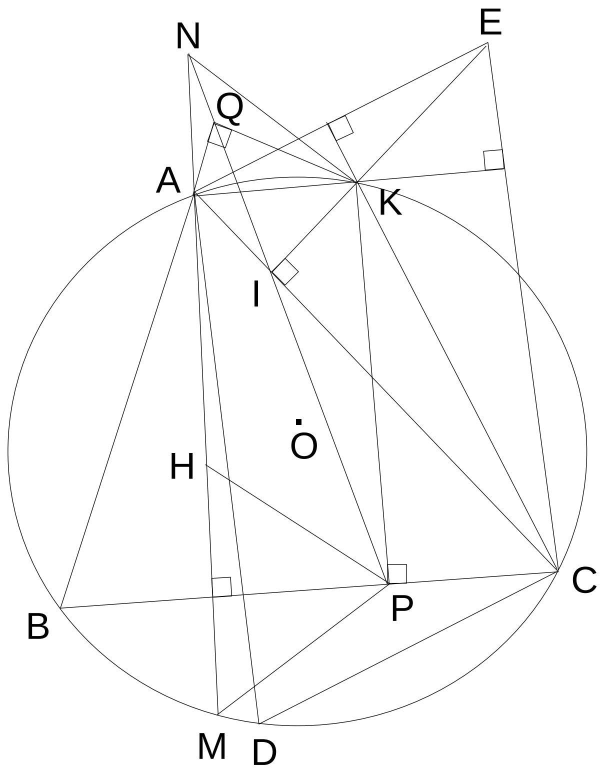
Ta có 2 tam giác BHA và BKC đồng dạng với nhau

$\Rightarrow \frac{AH}{CK} = \frac{AB}{CB} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x}{5} \Leftrightarrow xy = 5$ (2).

Từ (1), (2) ta tìm được $(x;y) = (\sqrt{5};\sqrt{5})$ hoặc $(x;y) = \left(\sqrt{10};\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

Vậy $AB = \sqrt{5}$ cm, $AC = \sqrt{10}$ cm hoặc $AB = \sqrt{10}$ cm, $AC = \sqrt{5}$ cm.

Câu 4.



a) Ta có $ADC = AEC$ K là trực tâm tam giác ACE nên $AKC + AEC = 180^0$.

Suy ra $AKC + ADK = 180^0$ do đó tứ giác ADCK nội tiếp. Vậy $K \in (O)$.

Các tứ giác KIPC, KIAQ nội tiếp suy ra $CIP = CKP$ và

$AIQ = AKQ$ (1)

Từ các tứ giác nội tiếp ABCK, BPKQ ta có $AKC = 180^0 - ABC = QKP$ suy ra

$CKP = AKQ$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $CIP = AIQ \Rightarrow P, I, Q$ thẳng hàng.

b) Gọi M là giao điểm của AH với (O) (M không trùng với A) và N là giao điểm của AH và PQ suy ra MN // KP.

Bốn điểm B, Q, K, P thuộc một đường tròn (vì $KQB = KPB = 90^0$) và A, B, M, K thuộc (O) $\Rightarrow QBK = AMK = QPK$.

Suy ra MNKP là tứ giác nội tiếp. Do đó MNKP là hình thang cân suy ra KN = PM.

Mặt khác PH = PM suy ra $PHM = PMH = KNM \Rightarrow KN // PH$ suy ra HPKN là hình bình hành.

Vậy PQ đi qua trung điểm của HK.

<u>Ghi chú:</u> Nếu thí sinh vẽ hình trong trường hợp trực tâm K của tam giác ACE nằm nằm ngoài tam giác ACE thì ở câu a vẫn chứng minh bốn điểm A, D, C, K thuộc một đường tròn.

Câu 5.

a) Không mất tính tổng quát giả sử $m < n < p < q$.

Nếu $m \ge 3$ thì $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{mnpq} \le \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{3.5.7.11} < 1.$

Vậy $m = 2$ và (1) trở thành $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2npq} = \frac{1}{2}$ (2).

Nếu $n \ge 5$ ta có $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2npq} \le \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{2.5.7.11} < \frac{1}{2}.$

Vậy $n = 3$ và (2) trở thành $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{6pq} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow (p-6)(q-6) = 37$

suy ra $p = 7$ và $q = 43$.

Vậy $(m;n;p;q)$ là $(2;3;7;43)$ và các hoán vị của nó.

b) Các số được viết trên bảng là 1; 5; 11;…

các số đầu tiên của bảng có dạng 3m + 2 (trừ số 1) với $m \in N$.

Nếu sử dụng số 1 để viết thì số mới có dạng

3m + 2 + 1 + (3m + 2).1 = 6m + 5 = 3k + 2 ($k \in N$).

Nếu không sử dụng số 1 để viết thì số mới có dạng

3m + 2 +3n + 2+(3m+2)(3n + 2) = 9mn +9m + 9n + 8 = 3k + 2

($k \in N$). Suy ra điều phải chứng minh.

Đề số 20

Câu 1.

a) Ta có:

$$P = \left[\frac{x-4}{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}\right]\left(\frac{2x^2+4\sqrt{x}+x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=\left[\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}-1}-\frac{2x-5\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}\right]\left[\frac{(2\sqrt{x}+1)(x\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}}\right]$$

$$=\left[\frac{2\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}\right]\left[\frac{(2\sqrt{x}+1)(x\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}}\right]$$

$$=\frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$$

+ Với $x>0$, ta có: $x\sqrt{x}+2=x\sqrt{x}+1+1\geq 3.\sqrt[3]{x\sqrt{x}.1.1}\Rightarrow x\sqrt{x}+2\geq 3\sqrt{x}$

Suy ra $P=\dfrac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}\geq\dfrac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ hay $P\geq\dfrac{3}{2}$ (dấu bằng xảy ra khi $x=1$).

Do đó, để $P\leq\dfrac{3}{2}$ thì $x=1$.

Cách khác:

+ Với $x>0$, ta có: $P\leq\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}\leq\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2\leq 0$ (*)

Đặt $t=\sqrt{x}$, $t>0$.

Khi đó (*) trở thành: $t^3-3t+2\leq 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(t+2)\leq 0$$

Vì $t+2>0,(t-1)^2\geq 0$ nên $(t-1)^2(t+2)\leq 0\Leftrightarrow t-1=0\Leftrightarrow t=1$ hay $x=1$.

b) Theo đề : $ab+bc+ca=3abc\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$

$$\frac{a^3}{c+a^2}=\frac{(a^3+ac)-ac}{c+a^2}=a-\frac{ac}{c+a^2}$$

$$c+a^2\geq 2a\sqrt{c}\Rightarrow\frac{ac}{c+a^2}\leq\frac{1}{2}\sqrt{c}\leq\frac{c+1}{4}$$

Suy ra $\dfrac{a^3}{c+a^2}\geq a-\dfrac{c+1}{4}$.

Tương tự : $\dfrac{b^3}{a+b^2}\geq b-\dfrac{a+1}{4}$, $\dfrac{c^3}{b+c^2}\geq c-\dfrac{b+1}{4}$.

Suy ra $A\geq\dfrac{3}{4}(a+b+c)-\dfrac{3}{4}$

Dùng BĐT Cô Si chứng minh được: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq 9$

$$\Rightarrow (a+b+c)3\geq 9\Rightarrow a+b+c\geq 3$$

Suy ra $A\geq\dfrac{3}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy $\min A=\dfrac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Cách khác :Ta có: $ab+bc+ca=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$

Đặt $x=\frac{1}{a},\ y=\frac{1}{b},\ z=\frac{1}{c}$, khi đó: $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x+y+z=3 \end{cases}$.

Biểu thức A được viết lại: $A=\frac{x}{y(x+y^2)}+\frac{y}{z(y+z^2)}+\frac{z}{x(z+x^2)}$

Ta có : $\frac{x}{y(x+y^2)}=\frac{(x+y^2)-y^2}{y(x+y^2)}=\frac{1}{y}-\frac{y}{x+y^2}$;

mà $x+y^2\geq 2y\sqrt{x} \Rightarrow \frac{y}{x+y^2}\leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ nên $\frac{x}{y(x+y^2)}\geq \frac{1}{y}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

mà $\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{4}.2\sqrt{1.\frac{1}{x}}\leq \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ nên $\frac{x}{y(x+y^2)}\geq \frac{1}{y}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)$

(dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$)

Tương tự : $\frac{y}{z(y+z^2)}\geq \frac{1}{z}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{y}\right)$, $\frac{z}{x(z+x^2)}\geq \frac{1}{x}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{z}\right)$

Suy ra $A=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{3}{4}$.

Dùng BĐT Cô Si chứng minh được: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$.

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3 \text{ (vì } z+y+z=3\text{)}.$$

Do đó $A\geq \frac{3}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$ hay $a=b=c=1$.

Vậy $\min A=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Câu 2.

a) Cách 1:

Điều kiện: $-1\leq x\leq 1$.

Khi đó ta có: $x^2+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2=(2-x^2)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2}+2=(2-x^2)^2 \ (1)$$

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}$, $t\geq 0$. Phương trình (1) trở thành:

$2t+2=(t^2+1)^2$

$\Leftrightarrow t^4+2t^2-2t-1=0$

$\Leftrightarrow (t-1)\left[(t+1)(t^2+1)+2t\right]=0 \ (2)$

Vì $t\geq 0$ nên $(t+1)(t^2+1)+2t>0$.

Do đó phương trình (2) có nghiệm duy nhất là $t=1$.

+ Với $t=1 \Rightarrow x=0$ (thỏa).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=0$.

Cách 2:

+ Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

$x^2+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2-x^2$ (*)

+ Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}, t\ge 0$. Suy ra $t^2=2+2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{t^2-2}{2}\right)^2+1=2-x^2$

Khi đó phương trình (*) trở thành:

$t^4-4t^2-4t+8=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3+2t^2-4)=0$ (*)

+ vì $t^2=2+2\sqrt{1-x^2}\ge 2$ và $t\ge 0$ nên $t\ge\sqrt{2}$.

Do đó $t^3+2t^2-4\ge 2\sqrt{2}+4-4>0$.

Suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất là $t=2$.

+ Với $t=2\Rightarrow x=0$(thỏa).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=0$.

Cách 3:

+ Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

Đặt $\sqrt{1+x}=a, \sqrt{1-x}=b$ $(a,b\ge 0)$. Suy ra: $a^2+b^2=2$ (1)

+ Hơn nữa: $\sqrt{1-x^2}=ab\Rightarrow 2-x^2=a^2b^2+1$.

+ Phương trình đã cho trở thành: $a+b=a^2b^2+1$ (2)

Từ (1) và (2) ta cố hệ: $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ a+b=a^2b^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=1 \\ a+b=2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

b)

$$\begin{cases} xy^2+2x-4y=-1 \\ x^2y^3+2xy^2-4x+3y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2+(2x+1)=4y \\ (x^2y^2+2xy+1)y-2(2x+1)=-2y \end{cases} \quad (*)$$

(lưu ý: không nhất thiết biến đối đưa vế phải của pt thứ hai về $-2y$, có thể $-3y$)

- Xét $y=0$ thay vào hệ (*) ta được: $\begin{cases} 2x+1=0 \\ -2(2x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

Suy ra $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$ là một nghiệm của hệ.

- Xét $y\ne 0$, hệ phương trình (*) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} xy + \dfrac{2x+1}{y} = 4 \\ x^2y^2 + 2xy + 1 - 2\left(\dfrac{2x+1}{y}\right) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy+1) + \dfrac{2x+1}{y} = 5 \\ (xy+1)^2 - 2\left(\dfrac{2x+1}{y}\right) = -2 \end{cases} \quad (**)$$

Đặt $a = xy+1, b = \dfrac{2x+1}{2}$; khi đó hệ phương trình (**) trở thành: $\begin{cases} a+b=5 \\ a^2 - 2b = -2 \end{cases}$ (***)

+ Giải hệ (***) tìm được: $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}, \begin{cases} a=-4 \\ b=9 \end{cases}$.

* Với $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} xy+1=2 \\ \dfrac{2x+1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\dfrac{2x+1}{3}\right) = 1 \\ y = \dfrac{2x+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

* Với $\begin{cases} a=-4 \\ b=9 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} xy+1=-4 \\ \dfrac{2x+1}{y} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\dfrac{2x+1}{9}\right) = -5 \\ y = \dfrac{2x+1}{9} \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Cách khác:

$$\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + (2x+1) = 4y \\ x^2y^3 + 2xy^2 - (4x+2) = -3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 + (4x+2) = 8y \\ x^2y^3 + 2xy^2 - (4x+2) = -3y \end{cases} \Rightarrow x^2y^3 + xy^2 - 5y = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ xy=1 \\ xy=-5 \end{array}\right.$$

+ Với $y=0$. Suy ra được $(x;y) = (-\dfrac{1}{2};0)$.

+ Với $xy=1$. Suy ra được $(x;y) = (1;1)$ hoặc $(x;y) = (-\dfrac{3}{2};-\dfrac{2}{3})$.

+ Với $xy=-5$. Trường hợp này không tồn tại cặp $(x;y)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Câu 3.

a) Ta có:

$a^3 - b^3 + 3(a^2 - b^2) + 3(a-b) = (a+1)(b+1) + 25$

$\Leftrightarrow (a^3 + 3a^2 + 3a + 1) - (b^3 + 3b^2 + 3b + 1) = (a+1)(b+1) + 25$

$\Leftrightarrow (a+1)^3 - (b+1)^3 = (a+1)(b+1) + 25$ (*)

Đặt $x = a+1, y = b+1 (x, y \in Z; x, y \geq 2)$.

Khi đó (*) trở thành: $x^3 - y^3 = xy + 25 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = xy + 25$ (**)

+ Từ (**) suy ra $x > y \Rightarrow x - y \geq 1$, mà $x^2 + xy + y^2 > 0$ nên:

$x^2 + xy + y^2 \leq xy + 25 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 25 \Rightarrow x \leq 4$ **(1)**.

+ Hơn nữa: $x > y$ và $x, y \geq 2$ nên $xy \geq 6$.

Suy ra $x^3 - y^3 = xy + 25 \geq 31 \Rightarrow x^3 > 31 \Rightarrow x > 3$ **(2)**

Từ (1) và (2) suy ra: $x = 4$. Do $x > y$ và $y \geq 2$ nên $y \in \{2; 3\}$.

+ Thử lại, chỉ có $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ thỏa (**). Suy ra $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$ là cặp số cần tìm.

b) Cách 1:

$24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \equiv 1 (\text{mod } 5)$ **(1)**

Ta có: $\begin{cases} a \equiv 0, \pm 1, \pm 2 (\text{mod } 5) \\ b \equiv 0, \pm 1, \pm 2 (\text{mod } 5) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 0, 1, 4 (\text{mod } 5) \\ b^2 \equiv 0, 1, 4 (\text{mod } 5) \end{cases}$ **(2)**

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} a^2 \equiv 0 (\text{mod } 5) \\ b^2 \equiv 1 (\text{mod } 5) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 \equiv 1 (\text{mod } 5) \\ b^2 \equiv 0 (\text{mod } 5) \end{cases}$.

Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.

Cách 2:

$24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5.k + 1$ **(1)**

$\forall n \in Z \Rightarrow n = 5l + r \left(l \in Z, r \in \{0; 1; 2; 3; 4\}\right)$

$\Rightarrow n^2 = 5l_1 + r_1^2 \left(l_1 \in Z, r_1^2 \in \{0; 1; 4\}\right)$ **(2)**

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} a^2 = 5k_1 + 1 \\ b^2 = 5k_2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 = 5k_1 \\ b^2 = 5k_2 + 1 \end{cases}$

Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.

Cách 3:

$24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 24a^2 - b^2 = -1$ không chia hết cho 5 nên a và b không đồng thời chia hết cho 5.

+ Giả sử a và b đều không chia hết cho 5.

Theo định lý Fermat ta có $\begin{cases} a^4 \equiv 1(\bmod 5) \\ b^4 \equiv 1(\bmod 5) \end{cases} \Rightarrow (a^2+b^2)(a^2-b^2) \equiv 0(\bmod 5)$

Nếu $a^2+b^2 \equiv 0(\bmod 5)$ thì $25a^2+1 = a^2+b^2 \equiv 0(\bmod 5)$ (vô lí).

Suy ra $a^2-b^2 \equiv 0(\bmod 5) \Rightarrow 23a^2+1 = b^2-a^2 \equiv 0(\bmod 5)$ (*)

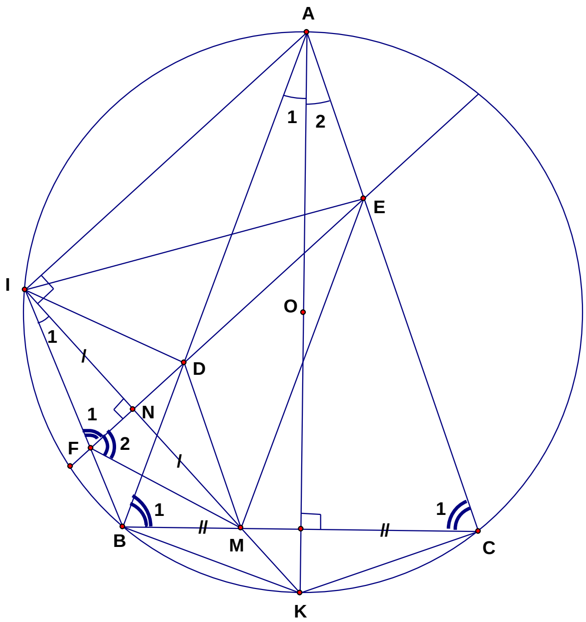
Vì a không chia hết cho 5 nên $a \equiv \pm 1, \pm 2(\bmod 5)$.

Với $a \equiv \pm 1(\bmod 5) \Rightarrow a^2 \equiv 1(\bmod 5) \Rightarrow 23a^2+1 \equiv -1(\bmod 5)$ (trái với (*))

Với $a \equiv \pm 2(\bmod 5) \Rightarrow a^2 \equiv 4(\bmod 5) \Rightarrow 23a^2+1 \equiv 3(\bmod 5)$ (trái với (*))

Vậy điều giả sử là sai. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Câu 4.



+ Gọi N là trung điểm của IM, F là giao điểm của DE và IB.

+ Ta có: $I_1 = A_1 = A_2 \Rightarrow F_1 = C_1 \Rightarrow F_2 = B_1$

Suy ra tứ giác $BFDM$ nội tiếp trong đường tròn.

$\Rightarrow DMB = F_1 = C_1$

Suy ra DM // AC hay DM // AE **(1)**

$AED = EDM = EDI$. Suy ra AEDI là hình thang cân.

(Hoặc tứ giác BFDM và BIAC nội tiếp nên $FDM = IAE$;

$FDM = FDI = DIA \Rightarrow DIA = IAE$. Suy ra AEDI là hình thang cân.)

Suy ra $ADE = IED = DEM$ nên $AD//EM$ **(2)**

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $ADME$ là hình bình hành.

Cách khác:

+ Gọi N là trung điểm của IM, F là giao điểm của DE và IB.

+ Ta có: $I_1 = A_1 = A_2 \Rightarrow F_1 = C_1 \Rightarrow$ tứ giác BFEC nội tiếp trong đường tròn.

Suy ra $FBC = AED$ (1).

+ Mặt khác $F_1 = C_1 \Rightarrow F_2 = B_1 \Rightarrow$ tứ giác BFDM nội tiếp trong đường tròn.

Suy ra $FBC = MDE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AED = MDE \Rightarrow AE//DM$ (*)

Hơn nữa $AED = MDE \Rightarrow AED = IDE$

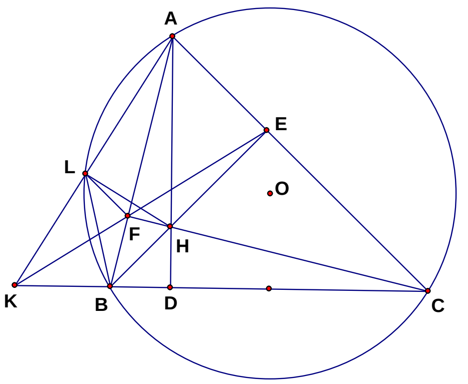
Mà $DE//IA$. Do đó tứ giác $AEDI$ là hình thang cân.

Suy ra $ADE = IED$; mà $IED = DEM$ nên $ADE = DEM \Rightarrow AD//EM$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra tứ giác $ADME$ là hình bình hành.

Câu 5.

a)



Cách 1:

+ Xét hai tam giác ΔKBF và ΔKEC có:

K chung, $KBF = KEC$ (vì cùng bù với FBC)

Suy ra ΔKBF và ΔKEC đồng dạng.

Suy ra: $\dfrac{KB}{KE} = \dfrac{KF}{KC} \Leftrightarrow KB.KC = KF.KE$ (1)

+ Tương tự: ΔKBL và ΔKAC đồng dạng.

Suy ra: $\dfrac{KB}{KA} = \dfrac{KL}{KC} \Leftrightarrow KB.KC = KL.KA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $KF.KE = KL.KA \Leftrightarrow \dfrac{KF}{KA} = \dfrac{KL}{KE}$; hơn nữa $FKL = AKE$.

Suy ra ΔKFL và ΔKAE đồng dạng.

Suy ra $KFL = KAE$.

Do đó 4 điểm A, L, F, E cùng nằm trên đường tròn.

Mà A, E, F nằm trên đường tròn đường kính AH nên L cũng nằm trên đường tròn đường kính AH. Vậy HL vuông góc với AK.

Cách 2:

+ Hạ HL' vuông góc AK tại L'. Ta đi chứng minh L' thuộc đường tròn (O).

+ 5 điểm A, L', F, H, E cùng nằm trên đường tròn đường kính AH.

+ Chứng minh được $\Delta KFL'$ và ΔKAE đồng dạng.

$\Rightarrow KL'.KA = KF.KE$.

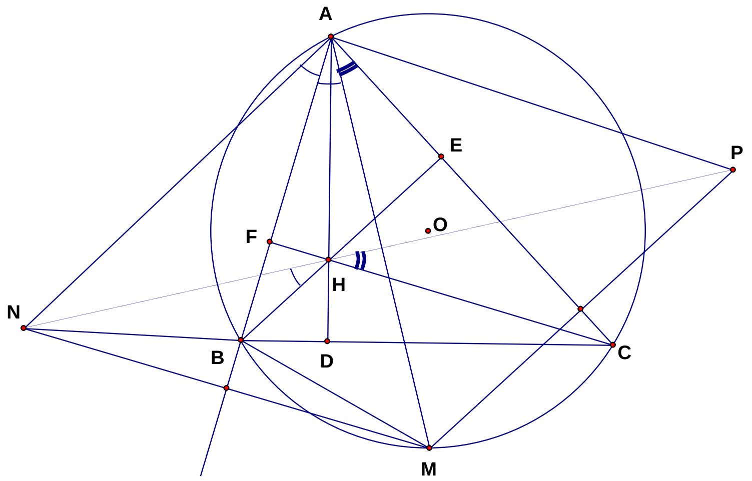
Tương tự chứng minh được: $KF.KE = KB.KC$

Suy ra $KL'.KA = KB.KC$.

Chứng minh được $AL'BC$ nội tiếp. Suy ra L' trùng L.

Vậy HL vuông góc với AK.

b)



+ Ta có: $\begin{cases} ANB = AMB \\ AMB = ACB \end{cases} \Rightarrow ANB = ACB$

+ Tứ giác $DHEC$ nội tiếp nên $ACB + AHB = 180^0$. Suy ra $ANB + AHB = 180^0$.

Do đó tứ giác $AHBN$ nội tiếp trong đường tròn.

Suy ra $NHB = NAB$. Mà $NAB = MAB$ nên $NHB = MAB$

+ Tương tự ta cũng chứng minh được: $CHP = MAC$.

+ Suy ra $NHB + BHC + CHP = MAB + BHC + MAC = (MAB + MAC) + BHC$

$$= BAC + BHC = BAC + FHE = 180^0$$

Suy ra N, H và P thẳng hàng.

Đề số 21

Câu 1.

a) Ta có:

$$P = \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\Rightarrow P^2 = (1-x)\left(2 + 2\sqrt{1-(1-x^2)}\right) = 2(1-x)(1+|x|)$$

Mà $P = \sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}} \geq 0 \Rightarrow P = \sqrt{2}(1-x)$

Với $x = -\dfrac{1}{2019} \Rightarrow P = \dfrac{2019}{2018}\sqrt{2}.$

b)

Đặt $x=\sqrt{a};y=\sqrt{b};z=\sqrt{c}\Rightarrow xy+yz+zx=1\Rightarrow a+1=(x+y)(x+z)$.

Tương tự: $b+1=(y+x)(y+z);c+1=(z+x)(z+y)$

Khi đó ta có:

$$\frac{\sqrt{a}}{1+a}+\frac{\sqrt{b}}{1+b}+\frac{\sqrt{c}}{1+c}=\frac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

Câu 2.

a) Ta có:

$$2x^2-2x+1=(2x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x+2)+(x^2-x-1)=(2x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)\quad (1)$$

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+2}-1\Rightarrow x^2-x+2=(t+1)^2$ thay vào phương trình (1) ta được $(t-x)(t-x+1)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=x\\t=x+1\end{array}\right.$.

Với $t=x\Rightarrow\begin{cases}x\ge -1\\x^2-x-2=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Với $t=x-1\Rightarrow\begin{cases}x\ge -1\\x^2-x-2=x\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm Với $x=\frac{1}{3};x=2$.

b)

$$\begin{cases}x^2+(y+1)^2=xy+x+1\\2x^3=x+y+1\end{cases}\ (I)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+(y+1)^2-x(y+1)=1\\2x^3=x+y+1\end{cases}\ (II)$$

Đặt $t=y+1$ ta có hệ

$$(II)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+t^2-xt=1\\2x^2=(x+t)(x^2+t^2-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+t^2-xt=1\\x=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t=1\\x=t=-1\end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(1;0);(-1;-2)$.

Câu 3.

a) Ta có $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7\Leftrightarrow(x-2y)(2x-y+3)=-7$

Xét các trường hợp ta có $(x;y)=(3;2);(-5;-6);(-7;-4);(1;4)$.

b) Do $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương nên $\sqrt{n^2+2n+18}$ là số tự nhiên.

Đặt $\sqrt{n^2+2n+18}=k\quad(k\in\mathbb{N})$

$\Leftrightarrow n^2+2n+18=k^2 \Leftrightarrow (k+n+1)(k-n-1)=17$

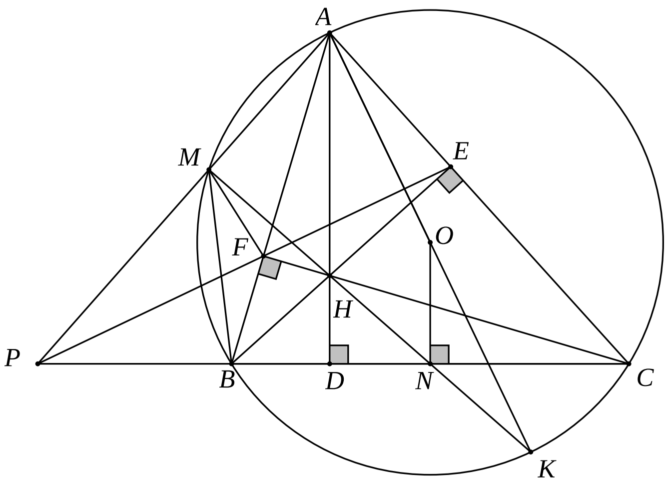
Do k,n đều là số tự nhiên nên $k+n+1>k-n-1$

Xét $\begin{cases} k+n+1=17 \\ k-n-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=9 \\ n=7 \end{cases} \Rightarrow n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9=81=9^2\,(tm)$

Vậy $n=7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 4.

1)



a) Do BE, CF là các đường cao của tam giác ABC

nên $BFC=BEC=90^0 \Rightarrow BFEC$ nội tiếp đường tròn$\Rightarrow PBF=PEC$.

Từ đó suy ra $\Delta PBF \# \Delta PEC(g-g) \Rightarrow \dfrac{PB}{PE}=\dfrac{PF}{PC} \Rightarrow PE.PF=PB.PC \quad (1)$

Tứ giác AMBC nội tiếp đường tròn $\Rightarrow PBM=PAC$.

Từ đó suy ra $\Delta PBM \# \Delta PAC(g-g) \Rightarrow \dfrac{PB}{PE}=\dfrac{PM}{PC} \Rightarrow PB.PC=PM.PA \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $PE.PF=PM.PA$.

Từ $PE.PF=PM.PA \Rightarrow \dfrac{PE}{PM}=\dfrac{PA}{PF}$

suy ra $\Delta PMF \# \Delta PEA(c-g-c) \Rightarrow PMF=PEA \Rightarrow AMFE$ nội tiếp (3)

Do $AEH=AFH=90^0 \Rightarrow AEHF$ nội tiếp (4)

Từ (3) và (4) suy ra 5 điểm A, M, F, H, E cùng thuộc một đường tròn đường kính $AH \Rightarrow AMH=90^0 \Rightarrow AM \perp HM$.

b) Kẻ đường kính AK của đường tròn (O).

Gọi N là trung điểm của cạnh BC.

Chứng minh được tứ giác BHCK là hình bình hành, có N là trung điểm của BC nên N là trung điểm của HK.

Suy ra ON là đường trung bình của tam giác $AHK \Rightarrow AH=2ON$.

Ta có tam giác OBC cân tại O suy ra ON là đường trung tuyến, cũng đồng thời là đường cao, đường phân giác.

Khi đó $NOC = \frac{1}{2}BOC = \alpha$ không đổi (vì ba điểm O, B, C cố định)

Do đó $S_{BHC} = \frac{1}{2}BC.HD = \frac{1}{2}BC\left(AD - AH\right) \le \frac{1}{2}BC\left(AN - 2ON\right)$

$S_{BHC} \le \frac{1}{2}BC\left(AO + ON - 2ON\right) = \frac{1}{2}BC\left(AO - ON\right)$

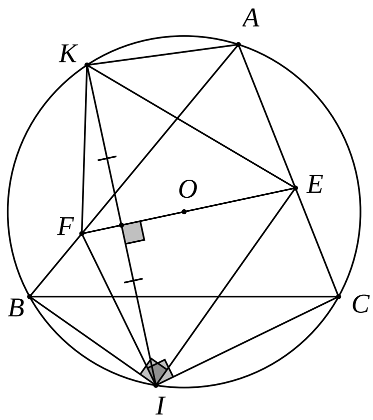
Mà $ON = \cos\alpha \Rightarrow S_{BHC} \le \frac{1}{2}BC\left(R - R\cos\alpha\right) = \frac{1}{2}BC.R\left(1 - \cos\alpha\right)$ không đổi.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow D \equiv N$ và ba điểm A, O, N thẳng hàng

Khi đó A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

Vậy khi A là điểm chính giữa của cung lớn BC thì diện tích tam giác BHC đạt giá trị lớn nhất là $MaxS_{BHC} = \frac{1}{2}BC.R\left(1 - \cos\alpha\right)$

2)



Gọi K là điểm đối xứng của I qua EF.

Xét trường hợp K trùng với điểm A.

Khi đó KI là dây cung của (O). Mà EF là đường trung trực của KI nên EF đi qua O.

Xét trường hợp điểm K không trùng với điểm A.

Ta có $CIF + BIE = 180^0 \Rightarrow EIF + BIC = 180^0 \quad (1)$

Lại có tứ giác $ABIC$ nội tiếp đường tròn (O) nên $BAC + BIC = 180^0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BAC = EIF \Rightarrow EAF = EIF$

Lại có $EIF = EKF \Rightarrow EAF = EKF \Rightarrow A, E, F, K$ cùng thuộc một đường tròn.

Giả sử tứ giác $AEFK$ nội tiếp (h.vẽ)$\Rightarrow KAF = KEF \Rightarrow KAB = KEF \quad (3)$

Mà $IEF = KEF \quad (4)$

Mặt khác $IEF = BIK$ (cùng phụ với KIE). (5)

Từ (3) ; (4) ; (5) suy ra $KAB = BIK \Rightarrow AKBI$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow K \in (O)$

Khi đó KI là dây cung của (O). Mà EF là đường trung trực của KI nên EF đi qua O.

Vậy EF luôn đi qua điểm O cố định.

Câu 5. Đặt $M = \dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}} + \dfrac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}} + \dfrac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}}$

Nhận thấy $6a^2+8ab+11b^2 = (2a+3b)^2 + 2(a-b)^2 \ge (2a+3b)^2$

$\Rightarrow \dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}} \le \dfrac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b}$

Mà $\dfrac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b} \le \dfrac{3a+2b}{5} \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$ luôn đúng

$\Rightarrow \dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}} \le \dfrac{3a+2b}{5} \quad (1)$

Chứng minh tương tự:

$\dfrac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}} \le \dfrac{3b+2c}{5} \quad (2); \dfrac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}} \le \dfrac{3c+2a}{5} \quad (3)$

Cộng theo vế của ba bất đẳng thức (1);(2);(3) ta được

$M \le \dfrac{3a+2b}{5} + \dfrac{3b+2c}{5} + \dfrac{3c+2a}{5} = a+b+c$

Mặt khác $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2) = 9 \Rightarrow a+b+c \le 3$

Suy ra $M = a+b+c \le 3.$

Dấu "="xảy ra $a=b=c=1.$

Vậy $MaxM = 3 \Leftrightarrow a=b=c=1.$

Đề số 22

Câu 1 .

1) Ta có

$$B = \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{8+2\sqrt{8}+1}}}$$
$$= \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{(\sqrt{8}+1)^2}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{8}+1}} = \sqrt{13+30\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}}$$
$$= \sqrt{13+30\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}} = \sqrt{18+2\sqrt{18}.5+25} = \sqrt{\left(\sqrt{18}+5\right)^2} = 3\sqrt{2}+5$$

2) Từ giả thiết $a+b+c=0$ ta được

$$P=\frac{a^2}{(b+c)^2-b^2-c^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2-c^2-a^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2-a^2-b^2}=\frac{a^2}{2bc}+\frac{b^2}{2ca}+\frac{c^2}{2ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}$$

Ta có $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$.

Từ đó suy ra $a^3+b^3+c^3=3abc$ do vậy ta được $P=\frac{3}{2}$

Câu 2.

1) Ta có $y^2-5y\sqrt{x}+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2\sqrt{x} \\ y=3\sqrt{x} \end{array}\right.$

+ Với $y=2\sqrt{x} \Rightarrow 2x+1=2\sqrt{x} \Leftrightarrow x+\left(\sqrt{x}-1\right)^2=0$, không có x thỏa mãn.

+ Với $y=3\sqrt{x} \Rightarrow 2x+1=3\sqrt{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{4} \end{array}\right.$

Từ đó tìm được các điểm thỏa mãn là $M(1;3)$hoặc $M\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right)$.

2) Ta xét các trường hợp sau

+ Với $a=0 \Rightarrow b=-\frac{5}{4}c$ ta được $\frac{5}{4}cx=c$.

Nếu $c=0$ thì phương trình có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Nếu $c \neq 0$ thì phương trình có nghiệm $x=\frac{4}{5}$.

+ Với $a \neq 0$, khi đó phương trình có bậc hai ẩn x. Từ $\frac{a}{6}+\frac{b}{5}+\frac{c}{4}=0$ ta được

$c=-\frac{4}{6}a-\frac{4}{5}b$. Từ đó

$$\Delta=b^2-4ac=b^2-4a\left(-\frac{4}{6}a-\frac{4}{5}b\right)=b^2+\frac{16}{5}ab+\frac{8}{3}a^2$$

$$=b^2+\frac{16}{5}ab+\frac{64}{25}a^2+\frac{8}{75}a^2=\left(b+\frac{8}{5}a\right)^2+\frac{8}{75}a^2>0$$

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Câu 3.

1) Ta có $4ab \le (a+b)^2$ nên ta suy ra được

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc} \ge \frac{8}{(a+b)^2+c(a+b)^2}=\frac{8}{(c+1)(a+b)^2}$$

Lại có $a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}$ nên

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{a^2+b^2}{2} \ge \frac{8}{(c+1)(a+b)^2}+\frac{(a+b)^2}{4} \ge \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}}$$

Mặt khác ta lại có $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}}=\frac{8}{2.\sqrt{2(c+1)}} \ge \frac{8}{c+3}$. Do đó $\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{a^2+b^2}{2} \ge \frac{8}{c+3}$

Tương tự $\frac{8}{(b+c)^2+4abc}+\frac{b^2+c^2}{2} \ge \frac{8}{a+3};\frac{8}{(c+a)^2+4abc}+\frac{a^2+c^2}{2} \ge \frac{8}{b+3}$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều trên ta được

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{8}{(b+c)^2+4abc}+\frac{8}{(a+c)^2+4abc}+a^2+b^2+c^2 \ge \frac{8}{a+3}+\frac{8}{b+3}+\frac{8}{c+3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

2) Vì $9k^2+1$ chia 3 có số dư là 1 nên $a^2+b^2+16c^2$ chia 3 có số dư là 1, từ đó ta suy ra được $a^2+b^2+c^2$ chia 3 có số dư là 1. Mà bình phương của số nguyên tố chia 3 thì có số dư là 0 hoặc 1 nên từ $a^2+b^2+c^2$ chia 3 có số dư là 1 ta suy ra được hai trong ba số a, b, c phải bằng 3.

+ Trường hợp 1. Khi $a=b=3$ ta có $18+16c^2=9k^2+1 \Rightarrow 17=9k^2-16c^2=(3k-4c)(3k+4c)$.

Do 17 là số nguyên tố và $3k+4c>3k-4c$ nên từ được $\begin{cases}3k-4c=1\\3k+4c=17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=3\\c=2\end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy ta được $(a;b;c;k)=(3;3;2;3)$.

+ Trường hợp 2. Khi $a=c=3$ hoặc $b=c=3$.

Với $a=3$ ta có $3^2+b^2+16.3^2=9k^2+1 \Rightarrow 152=9k^2-b^2=(3k-b)(3k+b)=2^3.19$.

Vì $3k-b;3k+b$ cùng tính chẵn lẻ mà tích là chẵn nên chúng cùng chẵn. Ta được các khả năng sau:

- Nếu $\begin{cases}3k-b=2\\3k+b=76\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=13\\b=37\end{cases}$ (thỏa mãn).

Ta được các bộ $(a;b;c;k)$ thỏa mãn là $(a;b;c;k)=(3;37;3;13)$

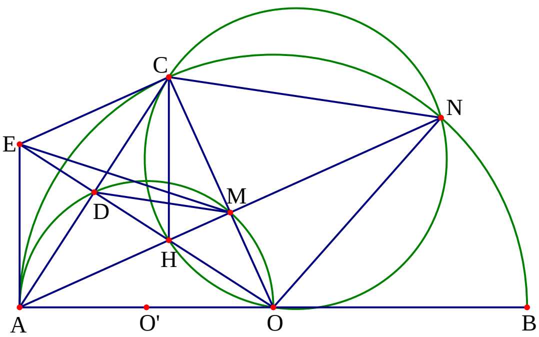
- Nếu $\begin{cases}3k-b=4\\3k+b=38\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=7\\b=17\end{cases}$ (thỏa mãn).

Ta được các bộ $(a;b;c;k)$ thỏa mãn là $(a;b;c;k)=(3;17;3;7)$

Tương tự ta có các bộ $(a;b;c;k)=(37;3;3;13),(17;3;3;7)$.

Câu 4.

1) Tam giác AOC cân tại O và có OD là đường cao nên là phân giác trong góc AOC, do đó $\widehat{AOD}=\widehat{COD}\Rightarrow AD=DM$ nên $DA=DM$. Vậy tam giác AMD cân tại D.



2) Dễ thấy $\Delta OEA=\Delta OEC(c.g.c)$, từ đó suy ra ta được $OAE=OCE=90^0$

Do đó $AE\perp AB$. Vậy AE là tiếp tuyến chung của (O) và (O')

3) Giả sử AM cắt đường tròn (O) tại N'. Ta có $\Delta OAN'$ cân tại O và $OM\perp AN'$ nên OM là đường trung trực của AN'. Từ đó ta được $CA=CN'$.

Ta có $CN'A=CAM$ mà $CAM=DOM$, do đó $CN'H=COH$. Suy ra bốn điểm C,N',O,H thuộc một đường tròn. Suy ra N' thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔCHO.
Do vậy N' trùng với N.
Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.
4) Vì ME song song với AB và $AB\perp AE$ nên $ME\perp AE$.

Ta có hai tam giác MAO,EMA đồng dạng nên $\dfrac{MO}{EA}=\dfrac{MA}{EM}=\dfrac{AO}{MA}\Rightarrow MA^2=AO.EM$.

Dễ thấy ΔMEO cân tại M nên $ME=MO.$ Thay vào hệ thức trên ta được
$MA^2=OA.MO$

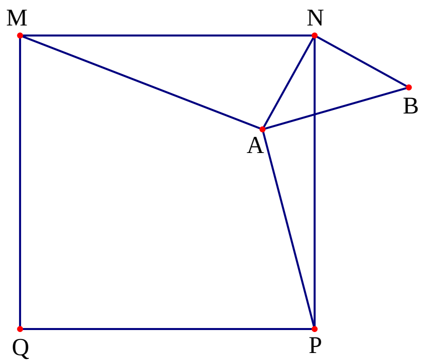
Đặt $MO=x>0$ ta có $MA^2=OA^2-MO^2=a^2-x^2$.

Từ $MA^2=OA.MO$ suy ra $a^2-x^2=ax\Leftrightarrow x^2+ax-a^2=0$.

Từ đó tìm được $OM=\dfrac{\left(\sqrt{5}-1\right)a}{2}$.

Câu 5.

1) Dựng tam giác ANB vuông cân tại N (A, B nằm khác phía đối với NP).



Ta có $AB^2=2AN^2$, $BAN=45^0$ và $\Delta AMN=\Delta BNP(c.g.c)\Rightarrow AM=BP$.

Do đó $AP^2+AB^2=AP^2+2AN^2=AM^2=BP^2$ nên suy ra $DABP$ vuông tại A.

Nên $PAN=PAB+BAN=90^0+45^0=135^0$

2) Gọi $x_1;x_2;x_3$ là ba nghiệm của $P(x)$ ta có $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Suy ra, $P(Q(x))=(Q(x)-x_1)(Q(x)-x_2)(Q(x)-x_3)$

Do $P(Q(x))=0$ vô nghiệm nên các phương trình $Q(x)-x_i=0\,(i=1,2,3)$ vô nghiệm.

Hay các phương trình $x^2+2016x+2017-x_i=0\,(i=1,2,3)$ vô nghiệm

Do đó, các biệt thức tương ứng $\Delta_i^{'}=1008^2-(2017-x_i)<0 \Leftrightarrow 2017-x_i>1008^2$

Suy ra $P(2017)=(2017-x_1)(2017-x_2)(2017-x_3)>1008^6$.

Đề số 23

Câu 1.

Theo bài ra: $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

Suy ra $a^2+2abc=1-b^2-c^2; b^2+2abc=1-c^2-a^2; c^2+2abc=1-b^2-a^2$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}P&=a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}+c\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}-abc\\&=a\sqrt{1-c^2-b^2+b^2c^2}+b\sqrt{1-c^2-a^2+a^2c^2}+c\sqrt{1-a^2-b^2+a^2b^2}-abc\\&=a\sqrt{a^2+2abc+b^2c^2}+b\sqrt{b^2+2abc+a^2c^2}+c\sqrt{c^2+2abc+a^2b^2}-abc\\&=a\sqrt{(a+bc)^2}+b\sqrt{(b+ac)^2}+c\sqrt{(c+ab)^2}-abc\\&=a(a+bc)+b(b+ac)+c(c+ab)-abc=a^2+b^2+c^2+2abc=1\end{aligned}$$

Câu 2.

a) Ta có:

$$(x^2-9)^2=12x+1 \Leftrightarrow x^4-18x^2+81=12x+1$$

$$\Leftrightarrow x^4+18x^2+81=36x^2+12x+1 \Leftrightarrow (x^2+9)^2=(6x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+9=6x+1\\x^2+9=-6x-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-6x+8=0\\x^2+6x+10=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=4\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\{2;4\}$.

b) Điều kiện: $x\ge -2$. Khi đó:

$$\sqrt{x+2}=x^2-2 \Leftrightarrow x+2+2.\sqrt{x+2}.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=x^2+x+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}+\frac{1}{2}=x+\frac{1}{2}\\\sqrt{x+2}+\frac{1}{2}=-x-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=x\\\sqrt{x+2}=-x-1\end{array}\right.$$

+ Với $\sqrt{x+2}=x \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\x^2=x+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\x^2-x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=2$

+ Với $\sqrt{x+2}=-x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}x+1\le 0\\x^2+2x+1=x+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le -1\\x^2+x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};2\right\}$.

Câu 3. a) Do $x>0;y>0$ nên biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh ta được

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}\Leftrightarrow\frac{a^2(x+y)}{x}+\frac{b^2(x+y)}{y}\ge(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+\frac{a^2y}{x}+\frac{b^2x}{y}\ge(a+b)^2\Leftrightarrow\frac{a^2y}{x}-2ab+\frac{b^2x}{y}\ge0\Leftrightarrow\left(\frac{a\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-\frac{b\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)^2\ge0$$

Do bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên ta được $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$.

b) Do $x+y=1$ nên ta được $x=1-y;y=1-x$. Khi đó ta có

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}=\frac{x}{(1-x)(1+x)}+\frac{y}{(1-y)(1+y)}=\frac{x}{y(1+x)}+\frac{y}{x(1+y)}$$

Do $x>0;y>0$ nên theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{x}{y(1+x)}+\frac{y}{x(1+y)}\ge2\sqrt{\frac{x}{y(1+x)}.\frac{y}{x(1+y)}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{y(1+x)}+\frac{y}{x(1+y)}\ge2\sqrt{\frac{1}{(1+x)(1+y)}}=2\sqrt{\frac{1}{1+x+y+xy}}=2\sqrt{\frac{1}{2+xy}}$$

Mặt khác ta lại có $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow2+xy\le\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{1}{2+xy}\ge\frac{4}{9}$

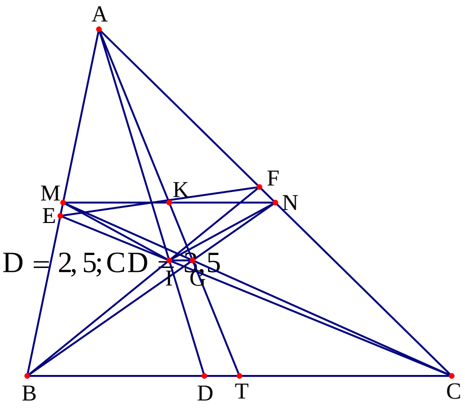
Do đó ta được $2.\sqrt{\frac{1}{2+xy}}\ge2.\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$. Kết hợp hai kết quả trên ta có

$$\frac{x}{y(1+x)}+\frac{y}{x(1+y)}\ge\frac{3}{4}$$

Hay ta được $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}\ge\frac{4}{3}$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 4.

a) Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường phân giác của tam giác ABC lần lượt hạ từ A, B, C. Gọi T là trung điểm của BC. Do AD là đường phân giác của tam giác ABC nên



$$\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{5}=\frac{CD}{7}=\frac{BD+CD}{5+7}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\Rightarrow BD=2,5;CD=3,5$$

Tam giác ABD có BI là đường phân giác

nên $\frac{AI}{ID}=\frac{BA}{BD}=\frac{5}{2,5}=2$

Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$\frac{AG}{GT}=2$

Từ các kết quả trên ta được $\frac{AI}{ID}=\frac{AG}{GT}=2$.

Suy ra theo định lý Talet thì IG//DT hay IG//BC.

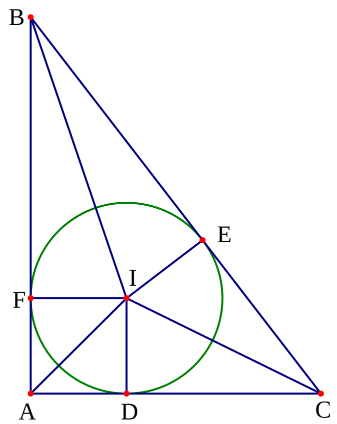
b) Ta có $\Delta BMI=\Delta BDI$ vì $BD=BM=2,5$; $DBI=MBI$ và BI là cạnh chung;

Suy ra $BMI=BDI$. Chứng minh tương tự $\Delta CNI=\Delta CDI$. Suy ra $CNI=CDI$

Mà $BDI+CDI=180^0$ nên $BMI+CNI=180^0$ suy ra $AMI+ANI=180^0$

Nên tứ giác AMIN nội tiếp.

Câu 5.



+ Gọi đường tròn (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I) với AC, CB, BA.

Theo tính chất đường tròn nội tiếp ta có $AD=AF=\frac{b+c-a}{2}$

Mà tứ giác ADIF là hình vuông nên

$$ID = AD = AF = \frac{b+c-a}{2} \Rightarrow r = \frac{b+c-a}{2}$$

Ta chỉ cần chứng minh $b+c-a$ chia hết cho 2. Thật vậy, theo định lý Pytago ta có

$$b^2+c^2=a^2 \Leftrightarrow (b+c)^2-2bc=a^2 \Leftrightarrow (b+c)^2-a^2=2bc \Leftrightarrow (b+c-a)(b+c+a)=2bc$$

Do $(b+c-a)+(b+c+a)=2b+2c$ nên $(b+c-a)$ và $(b+c+a)$ có cùng tính chẵn lẻ.

Mà $(b+c-a)(b+c+a)=2bc$ là số chẵn nên $(b+c-a)$ và $(b+c+a)$ có cùng tính chẵn.

Suy ra $r=\frac{b+c-a}{2} \in Z$

Cách khác. Gọi độ dài ba cạnh tam giác ABC là $a;b;c \in \mathbb{N}^+$ với $b<a; c<a$.

Dễ dàng chứng minh được $2r=b+c-a$. Theo định lý Pitago ta lại có $b^2+c^2=a^2$.

Ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu b và c cùng chẵn, khi đó từ $b^2+c^2=a^2$ ta suy ra được a chẵn nên $b+c-a$ là số chẵn. Từ đó dẫn đến r là số nguyên dương.

+ Trường hợp 2. Nếu b và c cùng lẻ, khi đó từ $b^2+c^2=a^2$ ta suy ra được a chẵn nên $b+c-a$ là số chẵn. Từ đó dẫn đến r là số nguyên dương.

+ Trường hợp 3. Nếu b và c khác tính chẵn lẻ, khi đó từ $b^2+c^2=a^2$ ta suy ra được a lẻ, điều này đãn đến $b+c-a$ là số chẵn. Từ đó ta được r là số nguyên.

Vậy bán kính đường tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán là một số nguyên.

Đề số 24

Câu 1. Từ giả thiết ta có $a+b=\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\frac{\sqrt{2}+1}{2}=\sqrt{2}; ab=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.\frac{\sqrt{2}+1}{2}=\frac{1}{4}$. Lại có

$$a^7+b^7=(a^4+b^4)(a^3+b^3)-a^3b^3(a+b)$$

$$=\left\{\left[(a+b)^2-2ab\right]^2-2a^2b^2\right\}\left[(a+b)^3-3ab(a+b)\right]-a^3b^3(a+b)$$

Từ đó ta được

$$a^7+b^7=\left[\left(2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}\right]\left[2\sqrt{2}-\frac{3}{4}.\sqrt{2}\right]-\frac{\sqrt{2}}{64}=\frac{17}{8}\left(\frac{5}{4}\sqrt{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{64}=\frac{170\sqrt{2}}{64}-\frac{\sqrt{2}}{64}=\frac{169\sqrt{2}}{64}$$

Vậy $a^7+b^7=\frac{169\sqrt{2}}{64}$.

Câu 2 a) + Do (d) **đi qua điểm** $A(1;2)$ **nên thay giá trị x, y vào ta được** $a+b=2$

+ Do (d) **cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương khi đó** $y=0$ **nên**

$OB=\frac{-b}{a}>0$

+ Do (d) cắt trục tung tại điểm C có tung độ dương khi đó $x=0$ nên $OC=b>0$

Vì $b>0$ và $\frac{-b}{a}>0$ nên $a<0$.

Ta có $OB+OC=-\frac{b}{a}+b=-\frac{2-a}{a}+2-a=\frac{3a-a^2-2}{a}=3+\left(-a+\frac{2}{-a}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $-a+\frac{2}{-a}\ge 2\sqrt{-a.\frac{2}{-a}}=2\sqrt{2}$ **nên** $3-\frac{2}{a}-a\ge 3+2\sqrt{2}$

Suy ra $OB+OC\ge 3+2\sqrt{2}$**. Theo bài ra thì dấu bằng xảy ra nên** $a=\frac{2}{a}\Leftrightarrow a^2-2=0\Leftrightarrow a=-\sqrt{2}$ **(vì a âm). Từ đó ta được** $a=-\sqrt{2}\Rightarrow b=2+\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đường thẳng (d) là $y=-\sqrt{2}x+2+\sqrt{2}$.

b) Để phương trình có nghiệm thì $9x^2+16x+32$ phải là một số chính phương.

Khi đó $9x^2+16x+32=t^2\ (t\in\mathbb{N})$. Phương trình trên tương đương với

$$81x^2+144x+288=9t^2\Leftrightarrow 81x^2+2.9.8+64+224=9t^2$$
$$\Leftrightarrow(9x+8-3t)(9x+8+3t)=-224=-2^4.14=-2^3.28=-2^2.56=-2.112$$
$$=2^4.(-14)=2^3.(-28)=2^2.(-56)=2.(-112)$$

Ta có $x\in Z; t\in N$ nên $9x+8+3t>9x+8-3t$ $9x+8-3t;9x+8+3t$ cùng tính chẵn lẻ.

Lại thấy $9x+8+3t$ và $9x+8-3t$ đều chia 3 dư 2 khi đó ta có các trường hợp sau.

$$\begin{cases}9x+8+3t=14\\9x+8-3t=-16\end{cases};\begin{cases}9x+8+3t=56\\9x+8-3t=-4\end{cases};\begin{cases}9x+8+3t=8\\9x+8-3t=-28\end{cases};\begin{cases}9x+8+3t=2\\9x+8-3t=-112\end{cases}$$

Giải các trường hợp trên ta được $x\in\{-7;-2;-1;2\}$

+ Với $x=-1\Rightarrow -27-16y=5\Rightarrow y=-2$ (thỏa mãn).

+ Với $x=-2\Rightarrow -30-16y=6\Rightarrow y=-\frac{9}{4}$ (loại).

+ Với $x=2\Rightarrow -18-16y=10\Rightarrow y=\frac{7}{4}$ (loại)

+ Với $x=-7\Rightarrow -45-16y=19\Rightarrow y=-4$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x;y)=(-1;-2),(-7;-4)$.

Câu 3. Phương trình tương đương với

$$4x^3+5x^2+3x+1-\sqrt{3x+1}=0\Leftrightarrow x\left(4x^2+5x+3\right)-\frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(4x^2+5x+3-\frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\4x^2+5x+3-\frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}=0\end{array}\right.$$

Khi đó $x=0$ là một nghiệm của phương trình.

Với $4x^2+5x+3-\frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}=0$, khi đó đó ta có

$$4x^2+5x+3-\frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}=0 \Leftrightarrow \left(4x^2+5x+3\right)\sqrt{3x+1}+4x^2+5x=0$$
$$\Leftrightarrow \left[(x+1)(4x+1)+2\right]\sqrt{3x+1}+4x^2+5x=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(4x+1)\sqrt{3x+1}+2\sqrt{3x+1}+4x^2+5x=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(4x+1)\sqrt{3x+1}+4x^2+x+4x+1+2\sqrt{3x+1}-1=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(4x+1)\sqrt{3x+1}+x(4x+1)+4x+1+\frac{12x+3}{2\sqrt{3x+1}+1}=0$$
$$\Leftrightarrow (4x+1)\left[(x+1)\sqrt{3x+1}+x+1+\frac{3}{2\sqrt{3x+1}+1}\right]=0$$

Vì $x\ge\frac{-1}{3}$ nên $x+1$ luôn lớn hơn không nên $(x+1)\sqrt{3x+1}+x+1+\frac{3}{2\sqrt{3x+1}+1}>0$

Suy ra từ phương trình trên ta được $x=\frac{-1}{4}$ là một nghiệm nữa của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{-1}{4}$ và $x=0$.

Câu 4. Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}$. Phương trình thứ hai tương đương với

$$2y^4(5x-2)(x-3)=3(2-5x)\Leftrightarrow(5x-2)\left[2y^4(x-3)+3\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{5}\\ 2y^4(x-3)+3=0\end{array}\right.$$

Với $2y^4(x-3)+3=0$ ta được $y^4=\frac{3}{6-2x}\Rightarrow y^2=\sqrt{\frac{3}{6-2x}}$, khi đó thế vào phương trình thứ nhất ta được $\sqrt{\frac{3}{6-2x}}.\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}=5\sqrt{\frac{3}{6-2x}}-\sqrt{6x-3}$ hay

$$\sqrt{6x-3}+\sqrt{3(6-2x)}=5\sqrt{3}-\sqrt{(6x-3)(6-2x)}$$

Với phương trình trên ta nhận thấy có các hướng xử lý như sau

+ Hướng 1. Đặt ẩn phụ $a=\sqrt{6x-3}\ge0; b=\sqrt{3(6-2x)}\ge0$. Khi đó ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2+b^2=15\\ a+b=5\sqrt{3}-\frac{ab}{\sqrt{3}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=15\\ \sqrt{3}(a+b)+ab=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(a+b)^2=45+6ab\\ \sqrt{3}(a+b)=15-ab\end{cases}$$

Từ hệ trên ta được $45+6ab=(15-ab)^2\Leftrightarrow(ab)^2-36ab+180=0$.

Chú ý là $ab\ge0$ nên từ phương trình trên ta được $ab=6$ và $ab=30$.

Với $ab = 30$ ta được $a + b = -5\sqrt{3}$, loại

Với $ab = 6$ ta được $a + b = 3\sqrt{3}$ suy ra $a = 2\sqrt{3}; b = \sqrt{3}$ hoặc $a = \sqrt{3}; b = 2\sqrt{3}$.

Từ $a = 2\sqrt{3}; b = \sqrt{3}$ ta được $\begin{cases} \sqrt{6x-3} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3(6-2x)} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

Từ $a = 2\sqrt{3}; b = \sqrt{3}$ ta được $\begin{cases} \sqrt{6x-3} = \sqrt{3} \\ \sqrt{3(6-2x)} = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x = 1$

Đây là hệ phương trình đối xứng nên ta có thể giải được hệ trên.

+ Hướng 2. Nhận thấy phương trình có một nghiệm $x = 1$ nên ta sử dụng đại lượng liên hợp

$$\sqrt{6x-3} + \sqrt{3(6-2x)} = 5\sqrt{3} - \sqrt{(6x-3)(6-2x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6x-3} - \sqrt{3} + \sqrt{3(6-2x)} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{-12x^2 + 42x - 18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x-6}{\sqrt{6x-3} + \sqrt{3}} + \frac{6-6x}{\sqrt{3(6-2x)} + 2\sqrt{3}} = \frac{12x^2 - 42x + 30}{2\sqrt{3} + \sqrt{-12x^2 + 42x - 18}}$$

$$\Leftrightarrow (6x-6)\left[\frac{1}{\sqrt{6x-3} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3(6-2x)} + 2\sqrt{3}} - \frac{2x-5}{2\sqrt{3} + \sqrt{-12x^2 + 42x - 18}}\right] = 0$$

Xét phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{6x-3} + \sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3(6-2x)} + 2\sqrt{3}} - \dfrac{2x-5}{2\sqrt{3} + \sqrt{-12x^2 + 42x - 18}} = 0$.

Phương trình trên được viết lại thành.

$$\frac{1}{\sqrt{2x-1} + 1} - \frac{1}{\sqrt{6-2x} + 2} - \frac{2x-5}{2 + \sqrt{-4x^2 + 14x - 6}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6-2x} + 2 - \sqrt{2x-1} - 1}{\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)} + \frac{5-2x}{2 + \sqrt{-4x^2 + 14x - 6}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6-2x} - 1 + 2 - \sqrt{2x-1}}{\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)} + \frac{5-2x}{2 + \sqrt{-4x^2 + 14x - 6}} = 0$$

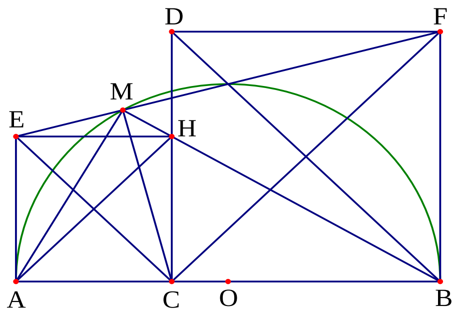
$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{5-2x}{\sqrt{6-2x} + 1} + \dfrac{5-2x}{2 + \sqrt{2x-1}}}{\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)} + \frac{5-2x}{2 + \sqrt{-4x^2 + 14x - 6}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (5-2x)\left[\frac{\dfrac{1}{\sqrt{6-2x} + 1} + \dfrac{1}{2 + \sqrt{2x-1}}}{\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)} + \frac{1}{2 + \sqrt{-4x^2 + 14x - 6}}\right] = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Từ các kết quả trên ta tìm được nghiệm của hệ phương trình là

$$\left(x;y\right)=\left(1;\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right),\left(1;-\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right),\left(\frac{5}{2};\sqrt[4]{3}\right),\left(\frac{5}{2};-\sqrt[4]{3}\right)$$

Câu 5.



a) Ta có AMB là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $AMB=90^0 \Rightarrow AMB=BCH$

đồng thời có góc MBA chung nên $\Delta AMB \backsim \Delta BCH \Rightarrow \frac{HC}{BC}=\frac{MA}{MB}$

Cũng có MC là phân giác của góc AMB nên $\frac{AC}{BC}=\frac{MA}{MB}$

Kết hợp hai kết quả trên ta có $\frac{HC}{BC}=\frac{AC}{BC}$ suy ra $CA=CH$.

b) Tứ giác EHCA có ba góc vuông nên là hình chữ nhật lại có hai cạnh kề nhau $HC = AC$ nên tứ giác EHCA là hình vuông.

Khi đó vì $AMB=AMH=90^0$ nên $MI=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}EC \Rightarrow EMC=90^0$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $FMC=90^0$ nên $EMC+FMC=180^0$ suy ra ba điểm M, E, F thẳng hàng

c) Ta có $S_1=\frac{CE^2}{2};S_2=\frac{CF^2}{2} \Rightarrow \sqrt{S_1.S_2}=\frac{CE.CF}{2}$

Vì E, M, F thẳng hàng nên CM là đường cao của tam giác vuông CEF.

Khi đó áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$\frac{1}{CM^2}=\frac{1}{EC^2}+\frac{1}{CF^2} \Rightarrow CM^2=\frac{CE^2.CF^2}{CE^2+CF^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{CE^2.CF^2}{CE^2+CF^2} \le \frac{CE.CF}{2}=\sqrt{S_1.S_2}$

Suy ra $CM^2 \le \sqrt{S_1.S_2}$, vì $AM < BM$ nên dấu bằng không xảy ra khi đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 5. Biến đổi giả thiết ta có

$$32abc=18\left(a+b+c\right)+27 \Leftrightarrow \frac{9}{16}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{27}{32}.\frac{1}{abc}=1$$

Đặt $\frac{1}{a}=x;\frac{1}{b}=y;\frac{1}{c}=z\left(x,y,z>0\right)$. Khi đó giả thiết trở thành

$\frac{9}{16}\left(xy+yz+zx\right)+\frac{27}{32}xyz=1$

Và P được viết lại là $P=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-z^2}$

Áp dụng bất đẳng thức dạng $xyz\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ và $xy+yz+zx\le\frac{\left(x+y+z\right)^2}{3}$

Ta được $1=\frac{9}{16}\left(xy+yz+zx\right)+\frac{27}{32}xyz\le\frac{3\left(x+y+z\right)^2}{16}+\frac{\left(x+y+z\right)^3}{32}$

Vì $x,y,z>0$ nên $x+y+z\ge2$ suy ra $x^2+y^2+z^2\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{3}\ge\frac{4}{3}(1)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản và (1) ta có

$$P=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-z^2}\le\sqrt{3\left[3-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]}\le\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{5}$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{3}{2}$.

Đề số 25

Câu 1. Nhìn vào tử số của P ta có biến đổi quen thuộc

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2}{2}$$

Từ đây phải biến đổi giả thiết để xuất hiện thêm $c-a$.

Ta có $c-a=-\left(b-c\right)-\left(a-b\right)=-3-7=-10$. Đặt T là tử của của P ta được $T = 79$.

Đặt M là mẫu của P, khi đó M cũng có thể phân tích thành tích được thành

$$M=\left(a-c\right)\left(a+c-2b\right)=\left(a-c\right)\left(a-b+c-b\right)=40$$

Vậy ta được $P=\frac{79}{40}$.

Câu 2. Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge\frac{1}{2}$. Phương trình có căn nên ta sẽ khử căn bằng cách bình phương 2 vế nhưng phương trình lúc này bậc 4, tuy nhiên nếu không nhẩm được hai nghiệm của phương trình bậc bốn thì ta không thể sử dụng phương pháp này.

Phương trình tương đương với $x^2+3-2x\sqrt{x+3}+\sqrt{x+3}=0$

Nhận thấy có hệ số 2 ở $2x\sqrt{x+3}$, có x^2 và 3 nên ta nghĩ đến phân tích thành bình phương.

Phương trình lại tương đương với

$$x^2-2x\sqrt{x+3}+x+3-x+\sqrt{x+3}=0\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{x+3}\right)^2-\left(x-\sqrt{x+3}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{x+3}\right)\left(x-\sqrt{x+3}-1\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{x+3}\\x-1=\sqrt{x+3}\end{cases}$$

Đến đây kết hợp với $x\geq\frac{1}{2}$ ta xét các trường hợp như trên

+ Với $x=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow x^2-x-3=0\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\quad x\geq\frac{1}{2}$

+ Với $x-1=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\(x-1)^2=x+3\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Câu 3. Cả hai phương trình đều có hạng tử xy nên ta sẽ tìm cách triệt tiêu, lúc này bài toán có thể giải được. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}2xy-x+y=6\\xy-y+x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2xy-x+y=6\\2xy-2y+2x=4\end{cases}\Rightarrow 3y-3x=2\Rightarrow y=\frac{2}{3}+x$$

Thế $y=\frac{2}{3}+x$ vào phương trình thứ nhất ta được $x^2+\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}=0\Rightarrow x\in\left\{-2;\frac{4}{3}\right\}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(-2;\frac{-4}{3}\right),\left(\frac{4}{3};2\right)$

Câu 4. 1) Cả giả thiết và kết luận đều không có liên hệ gì đến nhau. Thậm chí, giả thiết $\frac{x}{1+x}+\frac{2y}{1+y}=1$ ta cũng không biết nên áp dụng bđt nào phù hợp. Do đó để có đánh giá hợp lí ta đi biến đổi giả thiết trước

Ta có $\frac{x}{1+x}+\frac{2y}{1+y}=1\Leftrightarrow\frac{x+3xy+2y}{x+y+xy+1}=1\Leftrightarrow 2xy+y=1$

Đến đây quan sát để ý kĩ thì $xy^2=y.xy$ trong đó y và xy là hai hạng tử trong đẳng thức trên. Ta sẽ tìm cách biến đổi vế trái đẳng thức trên thành tích bằng sử dụng bất đẳng thức AM – GM.

Ta có $1=2xy+y\geq 2\sqrt{2xy.y}=2\sqrt{2}.\sqrt{xy^2}\Leftrightarrow 1\geq 8xy^2\Leftrightarrow xy^2\leq\frac{1}{8}$

Vậy giác trị lớn nhất của P là $\frac{1}{8}$, xẩy ra tại $2xy=y\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Cách khác :

1. Ta có :

$$\frac{1}{1+y}=1-\frac{y}{1+y}=\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}\geq 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}}\Rightarrow\frac{1}{(1+y)^2}\geq\frac{4xy}{(1+x)(1+y)}$$

2. Mặt khác : $\frac{1}{1+x}=1-\frac{x}{1+x}=\frac{2y}{1+y}\Leftrightarrow\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{4y^2}{(1+y)^2}$

Do đó : $\frac{1}{(x+1)(y+1)^2}\ge\frac{8xy^2}{(x+1)(y+1)^2}\Leftrightarrow xy^2\le\frac{1}{8}$.

2. Phương trình tương đương với $x^2+3xy+2y^2-x-5=0$. nhận thấy đây là phương trình có bậc là hai nên ta sẽ sử dụng delta để giải phương trình nghiệm nguyên này.

Phương trình tương đương với $x^2+3xy+2y^2-x-5=0\Leftrightarrow x^2+(3y-1)x+2y^2-5=0$

Xem phương trình là phương trình bậc 2 ẩn x ta được

$$\Delta=(3y-1)^2-4(2y^2-5)=y^2-6y+21=(y-3)^2+12$$

Để phương trình trên có nghiệm là nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương.

Đặt $\Delta=(y-3)^2+12=a^2\Leftrightarrow(a-y+3)(a+y-3)=12$ với a là số nguyên.

Vì $a-y+3$ và $a+y-3$ cùng tính chẵn lẻ nên ta có bảng sau

$a-y+3$	2	6	-2	-6
$a+y-3$	6	2	-6	-2
a	4	4	-4	-4
y	5 (TM)	1 (TM)	1 (TM)	5 (TM)

Thay $y=5$ vào phương trình đã cho ta được $x^2+14x+45=0\Leftrightarrow x\in\{-9;-5\}$

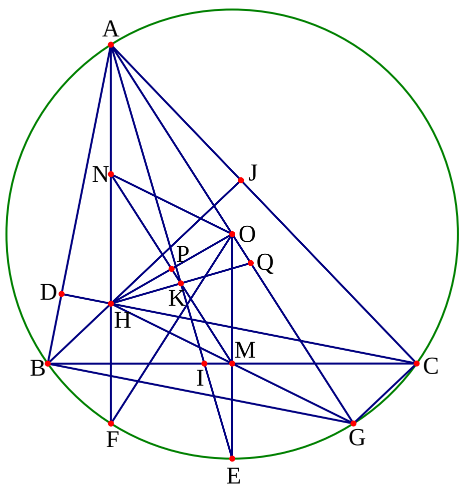
Thay $y=1$ vào phương trình đã cho ta được $x^2+2x-3=0\Leftrightarrow x\in\{-3;1\}$

Vậy phương trình có nghiệm là $(x;y)=(5;-5),(5;-9),(1;1),(1;-3)$

Câu 5.

1) Để chứng minh AK vuông góc với HK ta sẽ dựng một tam giác cân bên ngoại chứa đường cao AK và tìm cách chứng minh đó là tam giác cân bằng cách chứng minh AK là trung trực, trung tuyến, phân giác.

Thật vậy, gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Giả sử AH cắt đường tròn tại F và AK cắt đường tròn (O) tại E. Kẻ đường kính AG và . HK cắt AG tại Q. Dễ thấy OE là trung trực của BC suy ra OE song song với AH. Khi đó ta có



$EOG = FAG = \frac{1}{2}sdFG = \frac{1}{2}FOG = FOE$.	

Do đó ta được $FE = EG$ nên suy ra AK là phân giác HAQ. Mặt khác BJ và CD là đường cao tam giác ABC và MN cắt OH tại P. Dễ thấy BG vuông góc với AB và CH vuông góc với AB dẫn đến HC song song với BG, tương tự BH song song với CG nên suy ra HBGC là hình bình hành hay M là trung điểm của HC. Ngoài ra còn có N là trung điểm của AH nên MN là đường trung bình tam giác AHG và PK song song với OQ. Mặt khác vì N là trung điểm của AH nên ON là đường trung bình của tam giác AHC hay ON song song với HM, mà ta đã có OM song song với NH suy ra ONHM là hình bình hành. Do P là giao điểm hai đường chéo nên P là trung điểm của OH. Kết hợp với PK song song với OQ suy ra K là trung điểm của HQ. Đến đây là có được AK vuông góc với HK. Từ đó ta được

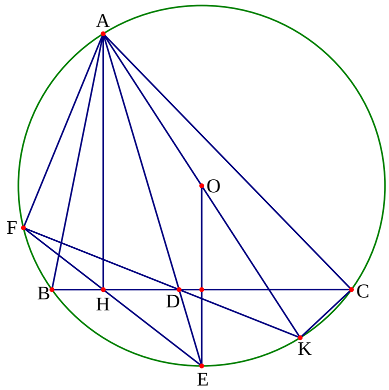
+ Cách khác : Để chứng minh AK vuông góc với HK hay tam giác AKH vuông ở K ta cần chứng minh

3. $AN = NH = NK$ hay $HNK = 2HAK$. Mà ta có $DNH = 2DAN$ nên ta sẽ phải chứng minh được $DNK = 2DAK$. Ta có $2DAK = BAC$ do đó ta đi chứng minh $DNK = BAC$.

4. Dễ thấy $DNK = KNE = \frac{1}{2}DNE$ và tứ giác AOHE nội tiếp nên

$BAC = \frac{1}{2}sdDE = \frac{1}{2}DNE = DNK$. Bài toán được chứng minh.

2) . Để chứng minh AK là đường kính đường tròn (O) ta cần chứng minh tam giác AFK vuông ở F hay $AFD = 90^o$. Nhận thấy $AHD = 90^o$ nên ta cũng cần tiếp tục phải chứng minh tứ giác AFHD nội tiếp. Thật vậy



$$HDE = \frac{1}{2}sdBE + \frac{1}{2}sdAC = \frac{1}{2}sdEC + \frac{1}{2}sdAC = \frac{1}{2}sdAE$$

Mà ta có $AFE = \frac{1}{2}sdAE$, do đó AK là đường kính của đường tròn (O).

Câu 6. Theo giả thiết thì Nam chơi bóng bàn vào thứ Hai và chơi bóng đá vào thứ Tư.

Thứ 2	Thứ 3	Thứ 4	Thứ 5	Thứ 6	Thứ 7	CN
Bóng bàn		Bóng đá				

Do Nam chạy 3 ngày mỗi tuần, trong đó không có 2 ngày nào liên tiếp nên Nam chỉ có thể chạy vào thứ 3, thứ 5, thứ 7 hoặc thứ 3, thứ 6, chủ nhật hoặc thứ 3, thứ 5, chủ nhật

+ Trường hợp 1. Nam chạy vào Thứ 3, Thứ 5, Thứ 7

Thứ 2	Thứ 3	Thứ 4	Thứ 5	Thứ 6	Thứ 7	CN
Bóng bàn	Chạy	Bóng đá	Chạy		Chạy	

Lúc này, Nam chỉ có thể chơi cầu lông vào thứ 7 hoặc chủ nhật, mà Nam không chơi cầu lông sau ngày Nam chạy nên Nam không thể chơi cầu lông. Trường hợp này loại

+ Trường hợp 2. Nam chạy vào thứ 3, thứ 6, chủ nhật

Thứ 2	Thứ 3	Thứ 4	Thứ 5	Thứ 6	Thứ 7	CN
Bóng bàn	Chạy	Bóng đá		Chạy		Chạy

Lúc này, Nam chỉ có thể chơi cầu lông vào thứ 5 hoặc thứ7, mà Nam không chơi cầu lông sau ngày Nam chạy nên Nam chơi cầu lông vào thứ 5. Khi đó Nam bơi vào thứ 7

Trường hợp 3. Nam chạy vào thứ 3, thứ 5, chủ nhật

Thứ 2	Thứ 3	Thứ 4	Thứ 5	Thứ 6	Thứ 7	CN
Bóng bàn	Chạy	Bóng đá	Chạy			Chạy

Lúc này, Nam chỉ có thể chơi cầu lông và bơi trong thứ 6 và thứ 7, mà Nam không chơi hai môn này trong hai ngày liên tiếp nên không thể thể được. Loại

Qua các trường hợp trên thì ta có thời gian biểu chính thức của Nam là:

Thứ 2	Thứ 3	Thứ 4	Thứ 5	Thứ 6	Thứ 7	CN
Bóng bàn	Chạy	Bóng đá	Cầu lông	Chạy	Bơi	Chạy

Vậy Nam bơi vào T7

- ***Nhận xét.*** *Ta có thể trình bài cách giải thích khác như sau.*

Nam chạy ba ngày một tuần nhưng không bao giờ chạy trong hai ngày liên tiếp, điều này dẫn đến Nam không thể chạy cả 3 trong bốn ngày từ thứ 5 đến chủ nhật. Do ngày thứ 2 Nam chơi bóng bàn và ngày thứ 4 M chơi bóng đá nên trong 3 ngày chạy thì có một ngày là thứ 3. Do Nam không chơi cầu lông sau ngày Nam bơi hoặc chạy nên Nam có thể chơi cầu luông vào ngày thứ 5 hoặc chủ nhật. Từ đó có thể chọn được ngày chơi cầu lông là thứ 5 vì ngày chủ nhật là không thể. Do vậy còn ba ngày còn lại thì Nam phải chạy vào hai ngày thứ 6 và chủ nhật vì Nam không thể chạy vào hai ngày liên tiếp. Do đó thứ bảy là ngày Nam bơi.

Đề số 26

Câu 1.

a) Ta có: $x = 3-\sqrt{5} \Leftrightarrow 3-x=\sqrt{5} \Rightarrow (3-x)^2 = 5 \Rightarrow x^2-6x+4=0$

$A = x^5-8x^4+17x^3+6x^2-116x+104$

$= (x^5-6x^4+4x^3)-2(x^4-6x^3+4x^2)+(x^3-6x^2+4x)+20(x^2-6x+4)+24$

$A = x^3(x^2-6x+4)-2x^2(x^2-6x+4)+x(x^2-6x+4)+20(x^2-6x+4)+24$

$A = 24$

b) Ta có: $2\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right) = 2\left[x^2+y^2-(x+y)\sqrt{x^2+y^2}+xy\right]$

$= (x^2+y^2+2xy)-2(x+y)\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$

$= (x+y)^2-2(x+y)\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2 = \left(x+y-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \quad (*)$

Do $x > 0, y > 0$ nên $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy > x^2 + y^2$

Suy ra : $x+y > \sqrt{x^2+y^2}$

Khai căn hai vế đẳng thức (*) ta được điều phải chứng minh.

Câu 2.

a) Điều kiện: $x \ge 1$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (x^2-8x+16)-(12x-12-8\sqrt{3x-3}+4)=0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 = (2\sqrt{3x-3}-2)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4 = 2\sqrt{3x-3}-2 \\ x-4 = 2-2\sqrt{3x-3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sqrt{3x-3} = x-2 & (2) \\ 2\sqrt{3x-3} = 6-x & (3) \end{array}\right.$

Giải (2): (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 4(3x-3) = x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2-16x+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8+4\sqrt{3}$

Giải (3): (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 6 \\ x^2-24x+48=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 12-4\sqrt{6}$

KL: Phương trình (1) có nghiệm: $x = 8+4\sqrt{3}$ và $x = 12-4\sqrt{6}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+4y^2+3=4x & (1) \\ x^3+12x+8y^3 = 6x^2+9 & (2) \end{cases}$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 9 = 12x-3x^2-12y^2$, thế vào phương trình (2) và thu gọn ta được:

$x^3+8y^3 = 3(x^2-4y^2) \Leftrightarrow (x+2y)(x^2-2xy+4y^2-3x+6y)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y=0 \\ x^2-2xy+4y^2-3x+6y=0 \end{array}\right.$.

*) TH1: $x+2y=0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-x}{2}$, thế vào phương trình (1) ta được

$2x^2+3=4x \Leftrightarrow 2x^2-4x+3=0$, phương trình vô nghiệm.

*) TH2: $x^2-2xy+4y^2-3x+6y=0$, trừ vế theo vế của phương này với phương trình (1) ta được:

$$-2xy-3x+6y-3=-4x \Leftrightarrow 2xy-x-6y+3=0 \Leftrightarrow (x-3)(2y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

+ Nếu x =3 thay vào phương trình (1) ta được: $4y^2=0 \Leftrightarrow y=0$, cặp (x;y) = (3;0) thoả mãn phương trình (2).

+ Nếu $y=\dfrac{1}{2}$, thay vào phương trình (1) ta được: $(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$, cặp (x;y) = $\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$ thoả mãn phương trình (2).

Vậy nghiệm của hệ đã cho là (x; y) = (3;0) và (x;y) = (2; 1).

Câu 3.

a) Ta có: (*) $\Leftrightarrow 5(x+y)^2-4xy-20(x+y)+24=0$.

Đặt x + y = a, xy = b thu được: $5a^2-4b-20a+24=0 \Rightarrow b=\dfrac{5a^2-20a+24}{4}$ (1)

Mặt khác: $(x-y)^2\ge 0 \Rightarrow (x+y)^2-4xy\ge 0 \Rightarrow a^2\ge 4b$ hay $b\le \dfrac{a^2}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) được:

$$\frac{5a^2-20a+24}{4}\le \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow a^2-5a+6\le 0 \Leftrightarrow (a-2)(a-3)\le 0 \Leftrightarrow 2\le a\le 3$$

Vì a nguyên nên $a = 2$ hoặc $a = 3$.

+) Với a = 2 $\Rightarrow$ b = 1 ta có: $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

+) Với a =3 $\Rightarrow$ $b=\dfrac{9}{4}$ (loại)

Vậy x = 1, y = 1 thoả mãn yêu cầu.

b) Đặt $A = n^4+n^3+1$

+) Nếu n = 1 thì A = 3, không là số chính phương.

+) Nếu n = 2 thì A = 25, là số chính phương.

+) Nếu n > 2 ta có: $4A=4n^4+4n^3+4=(2n^2+n)^2+4-n^2<(2n^2+n)^2$

$4A=4n^4+4n^3+4>4n^4+4n^3+4+n^2-8n^2-4n=(2n^2+n-2)^2$

$\Rightarrow (2n^2+n-2)^2<4A<(2n^2+n)^2$

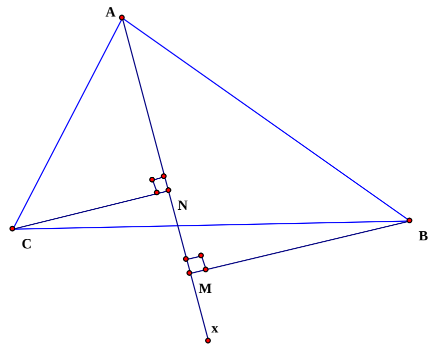
Vì A là số chính phương nên 4A cũng là số chính phương. Do đó ta được:

4A = $(2n^2+n-1)^2 \Leftrightarrow 4n^4+4n^3+4=(2n^2+n-1)^2 \Leftrightarrow 3n^2+2n+3=0$,

vô nghiệm. Vậy n = 2 là số cần tìm duy nhất.

Câu 4.

1)



Kẻ Ax là tia phân giác của góc BAC

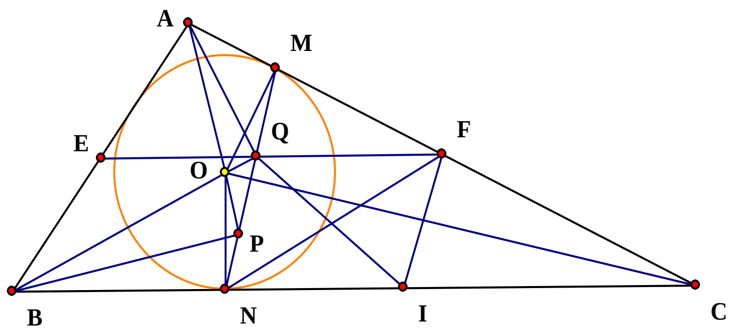
kẻ $BM \perp Ax$ tại M, $CN \perp Ax$ tại N.Từ hai tam giác vuông AMB và ANC có:

$\sin MAB = \sin\frac{A}{2} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow BM = c.\sin\frac{A}{2}$ và $\sin NAC = \sin\frac{A}{2} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow NC = b.\sin\frac{A}{2}$, do đó: $BM + NC = (b+c).\sin\frac{A}{2}$

Ta luôn có: $BM + NC \le BC = a \Rightarrow (b+c).\sin\frac{A}{2} \le a \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{b+c}$

Do $b+c \ge 2\sqrt{bc}$ nên $\frac{1}{b+c} \le \frac{1}{2\sqrt{bc}}$, do đó: $\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}$ (Dấu đẳng thức xảy ra khi b = c).

2)



a) Ta có (O) nội tiếp tam giác ABC nên AO và BO là phân giác

$\Rightarrow BOP = \frac{1}{2}\left(BAC + ABC\right)$; CM = CN $\Rightarrow \Delta CMN$ cân tại C.

$\Rightarrow BNP = 180^0 - MNC = 180^0 - \frac{180^0 - ACB}{2} = 180^0 - \frac{BAC + ABC}{2}$

$\Rightarrow BOP + BNP = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác BOPN nội tiếp.

$\Rightarrow OBN = OPM$ (cùng bù với OPN) hay $OBC = OPM$ (1)

Mặt khác: $OMC = ONC = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác OMCN nội tiếp

$\Rightarrow OMN = OCN$ hay $OMP = OCB$ (2).

Từ (1) và (2) ta được hai tam giác OBC và OPM đồng dạng.

$\Rightarrow \frac{PM}{BC} = \frac{OP}{OB} = \frac{OM}{OC}$.

Chứng minh tương tự ta được:

+) Hai tam giác OQN và OAC đồng dạng

$\Rightarrow \dfrac{QN}{AC} = \dfrac{ON}{AC} \Rightarrow \dfrac{QN}{AC} = \dfrac{OM}{OC}$ (do OM = ON)

+) Hai tam giác OPQ và OBA đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{PQ}{BA} = \dfrac{OP}{OB}$

Vậy ta được: $\dfrac{PM}{BC} = \dfrac{QN}{AC} = \dfrac{PQ}{AB} \Leftrightarrow \dfrac{MP}{a} = \dfrac{NQ}{b} = \dfrac{PQ}{c}$ (đpcm)

b) Ta có tứ giác AOQM nội tiếp $\Rightarrow AMO = AQO \Rightarrow AQO = 90^0 \Rightarrow \Delta AQB$ vuông tại Q

$\Rightarrow QE = BE = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta BEQ$ cân tại E $\Rightarrow EQB = EBQ \Rightarrow EQB = QBC$ (do $QBC = EBQ$)

$\Rightarrow EQ//BC$

Mặt khác: E, F lần lượt là trung điểm của AB và AC $\Rightarrow EF//BC$

$\Rightarrow E, Q, F$ thẳng hàng $\Rightarrow QF//NI$ (1)

Lại có: CM =CN, MF = NI (gt) $\Rightarrow \dfrac{MF}{CM} = \dfrac{NI}{CN} \Rightarrow FI//MN \Rightarrow FI//NQ$ (2)

Từ (1) và (2) ta được tứ giác FINQ là hình bình hành, do đó IQ đi qua trung điểm của NF.

Câu 5.

Chứng minh: Với hai số thực dương a, b ta có: $\dfrac{1}{a+b} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$ (*), dấu bằng xảy ra khi a = b.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt{\frac{x}{y+z+2x}.\frac{1}{4}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y+z+2x} + \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{y+z+2x}} \le \frac{x}{y+z+2x} + \frac{1}{4}$$

Áp dụng (*): $\dfrac{1}{y+z+2x} = \dfrac{1}{(x+y)+(x+z)} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x+z}\right)$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z+2x} \le \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z}\right) \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{y+z+2x}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} + 1\right)$$

Tương tự ta được: $\sqrt{\dfrac{y}{z+x+2y}} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{y}{y+z} + \dfrac{y}{y+x} + 1\right)$

$$\sqrt{\frac{z}{x+y+2z}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{z}{z+x} + \frac{z}{z+y} + 1\right)$$

$$\Rightarrow P \le \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+x} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} + \frac{z}{z+y} + 3\right) = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{3}{2}$ khi x = y = z

Đề số 27

Câu 1.

a) Điều kiện $\begin{cases} x \ge 0 \\ x-4 \ne 0 \\ 2-\dfrac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 4 \end{cases}$

Ta có $A = \dfrac{2\left(\sqrt{x}+3\right)}{x-4} : \dfrac{-\left(\sqrt{x}+3\right)}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{2}{2-\sqrt{x}}$.

b) Để x nguyên mà biểu thức A nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow 2-\sqrt{x}$ là ước của 2

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{x} \in \{\pm 1; \pm 2\}$.

Nếu $2-\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow A=2(tm)$

Nếu $2-\sqrt{x}=-1 \Leftrightarrow x=9 \Rightarrow A=-2(tm)$

Nếu $2-\sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow A=1(tm)$

Nếu $2-\sqrt{x}=-2 \Leftrightarrow x=16 \Rightarrow A=-1(tm)$

Vậy $x \in \{0;1;9;16\}$

Câu 2.

a) $(x+1)(x-2)(x+6)(x-3)=45x^2 \Leftrightarrow \left(x^2+7x+6\right)\left(x^2-5x+6\right)=45x^2$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình

Do đó phương trình tương đương với $\left(x+\dfrac{6}{x}+7\right)\left(x+\dfrac{6}{x}-5\right)=45$

Đặt $t=x+\dfrac{6}{x}+1$ ta được phương trình $t^2-81=0 \Leftrightarrow t=\pm 9$

Với $t=9 \Rightarrow x+\dfrac{6}{x}-8=0 \Leftrightarrow x^2-8x+6=0 \Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{10}$

Với $t=-9 \Rightarrow x+\dfrac{6}{x}+10=0 \Leftrightarrow x^2+10x+6=0 \Leftrightarrow x=-5\pm\sqrt{19}$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $x=4\pm\sqrt{10}; x=-5\pm\sqrt{19}$.

b) Ta có $x\left(x^2+x+1\right)=4^y-1 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2+1\right)=4^y$

Do $x, y \in \square \Rightarrow x, y \ge 0$

- Nếu $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (x;y)=(0;0)$ là nghiệm của phương trình đã cho.

- Nếu $x>0 \Rightarrow y>0 \Rightarrow x+1$ chẵn, đặt $x=2k+1\,(k \ge 0)$

Khi đó $(k+1)\left(2k^2+2k+1\right)=4^{y-1}$

Do $2k^2+2k+1$ là số lẻ nên suy ra $k=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (x;y)=(1;1)$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(0;0);(1;1)$

Câu 3. Do $x, y \in \square$ và $3x+2y=1 \Rightarrow x, y$ trái dấu

Từ $3x+2y=1 \Rightarrow y=-x+\dfrac{1-x}{2} \Rightarrow \dfrac{1-x}{2}=t\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=1-2t; y=3t-1$

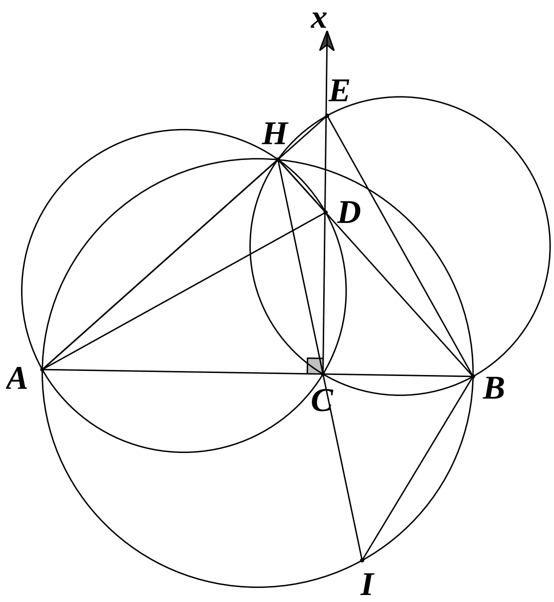
Khi đó $H=t^2-3t+|t|-1$

Nếu $t\ge 0 \Rightarrow H=t^2-2t-1=(t-1)^2-2\ge -2.$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t=1.$

Nếu $t<0 \Rightarrow H=t^2-4t-1>-1>-2.$

Vậy $MinH=-2 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}.$

Câu 4.



a) Từ giả thiết ta có $CE>CD; \dfrac{CE}{CB}=\dfrac{CA}{CD}=\sqrt{3} \Rightarrow DCA=BCE=90^0$

Suy ra $\Delta ADC \# \Delta EBC(g.g) \Rightarrow ADC=EBC \quad (1)$

Do tứ giác $AHDC$ nội tiếp suy ra $AHC=ADC \quad (2)$

Do tứ giác $BCHE$ nội tiếp suy ra $EBC+CHE=180^0 \quad (3)$

Từ (1);(2);(3) suy ra $AHC+CHE=180^0 \Rightarrow A, H, E$ là ba điểm thẳng hàng.

b) Ta có $\tan ADC=\dfrac{AC}{CD}=\sqrt{3} \Rightarrow ADC=60^0 \Rightarrow EDC=60^0$

Lại có $AD\perp HC \Rightarrow ACH=ADC=60^0$

Mặt khác tứ giác $BCHE$ nội tiếp suy ra $AEB=HCA=60^0$

Suy ra tam giác ABE đều $\Rightarrow C$ là trung điểm của AB

c) Do $AHB=90^0 \Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính AB cố định.

Kéo dài HC cắt đường tròn đường kính AB tại điểm thứ hai I (I khác H)

Suy ra $AHI=60^0 \Rightarrow I$ cố định

Vậy HC luôn đi qua điểm I cố định khi C thay đổi trên đoạn AB.

Câu 5.

Bất đẳng thức ta thấy có thể viết lại được thành $x+y+y+z \geq (y+z)(z+x)(x+y)$

Đặt $a=x+y; b=y+z; c=z+x$. Khi đó từ $x+y+z=2$ ta được $a+b+c=4$.

Bất đẳng thức được viết lại thành $a+b \geq abc$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $4=a+b+c \geq 2\sqrt{(a+b)c}$

Hay ta được $2 \geq \sqrt{(a+b)c} \Leftrightarrow 4 \geq (a+b)c$ nên $4(a+b) \geq (a+b)^2 c$.

Mà ta lại có $(a+b)^2 \geq 4ab$ nên suy ra $4(a+b) \geq 4abc$ hay $a+b \geq abc$.

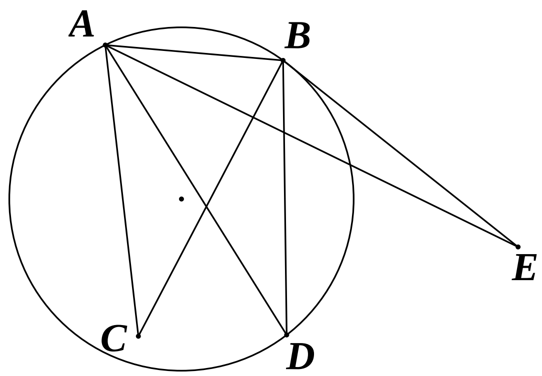
Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1; c=2$ hay $x=z=1; y=0$.

Câu 6.

Từ 5 điểm có 4+3+2+1=10 đoạn thẳng. Do đó có ít nhất một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất.

Giả sử 5 điểm đó là A, B, C, D, E và hai A, B có độ dài nhỏ nhất. Khi đó 3 điểm C, D, E có hai khả năng sau:

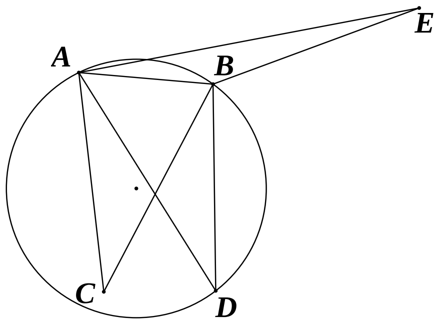
+ TH1: Cả ba điểm này nằm cùng phía nửa mặt phẳng bờ AB



Vì không có 4 điểm nào cùng thuộc một đường tròn nên C, D, E nhìn AB với các góc nhọn khác nhau.

Giả sử $ACB > ADB > AEB$, khi đó đường tròn đi qua ba điểm A, B, D chứa điểm C bên trong và điểm E nằm bên ngoài đường tròn.

+ TH2: Có một điểm khác phía hai điểm khác ở hai nửa mặt phẳng bờ AB.



Giả sử E khác phía hai điểm C,D

Vì không có bốn điểm nào cùng thuộc đường tròn nên C,D nhìn AB với các góc nhọn khác nhau.

Giả sử $ACB > ADB$, khi đó đường tròn đi qua ba điểm A,B,D chứa điểm C bên trong và điểm E nằm bên ngoài.

Vậy luôn có một đường tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đề số 28

Câu 1.

a) Nhận xét:

$n^2 + (n+5)^2 = 2n^2 + 10n + 25 = X + 25$

$(n+1)^2 + (n+4)^2 = 2n^2 + 10n + 17 = X + 17$

$(n+2)^2 + (n+3)^2 = 2n^2 + 10n + 13 = X + 13$

Lần thứ nhất, chia 6 vật có khối lượng 1999^2, ..., 2004^2 thành ba phần: A+25, A+17, A+13

Lần thứ hai, chia 6 vật có khối lượng 2005^2, ..., 2010^2 thành ba phần: B+25, B+17, B+13

Lần thứ ba, chia 6 vật có khối lượng 2011^2, ..., 2016^2 thành ba phần: C+25, C+17, C+13

Lúc này ta chia thành các nhóm như sau: Nhóm thứ nhất A+25, B+17, C+13; nhóm thứ hai B+25, C+17, A+13; nhóm thứ ba C+25, A+17, B+13. Khối lượng của mỗi nhóm đều bằng A + B + C + 55 gam.

b) Viết phương trình đã cho về dạng: $9.(3^{x-2}+19) = y^2$ $(x \geq 2)$. Để y là số nguyên thì điều kiện cần và đủ là $3^{x-2} + 19 = z^2$ là số chính phương (z là số nguyên dương)

Nếu $x - 2 = 2k + 1$ là số lẻ thì $3^{2k+1} + 19 = (3^{2k+1} + 1) + 18 = 4.B + 18$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không thể là số chính phương.

Do đó $x - 2 = 2k$ là số chẵn

Ta có $3^{x-2} + 19 = z^2 \Leftrightarrow \left(z-3^k\right)\left(z+3^k\right)=19$. Vì 19 là số nguyên tố và $z-3^k < z+3^k$ nên

$$\begin{cases} z-3^k=1 \\ z+3^k=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10 \\ 3^k=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10 \\ k=2 \end{cases}$$

Vậy $x = 6$ và $y = 30$.

Câu 2.

a) TXĐ: R.

Vì $x=\dfrac{-1}{2}$ không phải là nghiệm, nên phương trình đã cho tương đương với phương trình: $\dfrac{x^2+6x+1}{2x+1}=\sqrt{x^2+2x+3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+6x+1}{2x+1}-2=\sqrt{x^2+2x+3}-2$$

$$\frac{x^2+6x+1-2(2x+1)}{2x+1}=\frac{(\sqrt{x^2+2x+3}+2)(\sqrt{x^2+2x+3}-2)}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-1}{2x+1}=\frac{x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2x-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}-\frac{1}{2x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+2x-1=0 & (1) \\ \sqrt{x^2+2x+3}+2=2x+1 & (2) \end{array}\right.$$

PT (1) có hai nghiệm $x_{1;2}=-1\pm\sqrt{2}$

PT (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+3}+2=2x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2}=2x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ x^2+2x+3=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x_3=\frac{3+\sqrt{15}}{3}$$

Vậy phương đã cho có ba nghiệm: $x_{1;2}=-1\pm\sqrt{2}; x_3=\frac{3+\sqrt{15}}{3}$

b) Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)^2=y^2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 2x+1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$

Xét hệ: $\begin{cases} y=2x+1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ x^2+x(2x+1)+(2x+1)^2=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ 7x^2+5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{5}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x=-\frac{5}{7} \\ y=-\frac{3}{7} \end{cases}$$

Xét hệ: $\begin{cases} y=-2x-1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ x^2-x(2x+1)+(2x+1)^2=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ 3x^2+3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ là: (0;1), $\left(-\frac{5}{7};-\frac{3}{7}\right)$, (0;-1), (-1;1)

Câu 3.

Sử dụng bất đẳng thức Cô si

Ta có: $\frac{a+1}{b^2+1}=a+1-\frac{b^2(a+1)}{b^2+1}\ge a+1-\frac{b^2(a+1)}{2b}=a+1-\frac{b+ab}{2}$ **(1)**

Tương tự: $\frac{b+1}{c^2+1}\ge b+1-\frac{c+bc}{2}$ **(1)** và $\frac{c+1}{a^2+1}\ge c+1-\frac{a+ca}{2}$ **(3)**

Từ (1); (2) và (3) suy ra: $\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge\frac{a+b+c}{2}+3-\frac{ab+bc+ca}{2}$

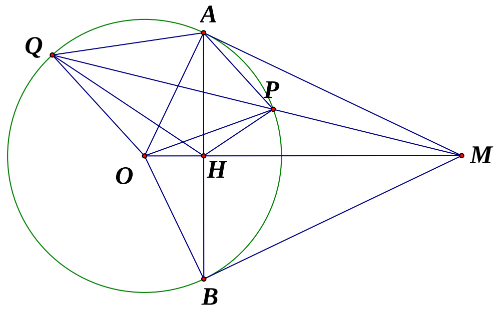
Mặt khác $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ hay $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2=9$

Do đó: $\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge\frac{a+b+c}{2}+3-\frac{ab+bc+ca}{2}=\frac{3}{2}+3-\frac{9}{6}=3$

Vậy $\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\geq 3$. Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 4.

a)



ΔMPA đồng dạng ΔMAQ (g.g), suy ra MA² = MP.MQ (1)

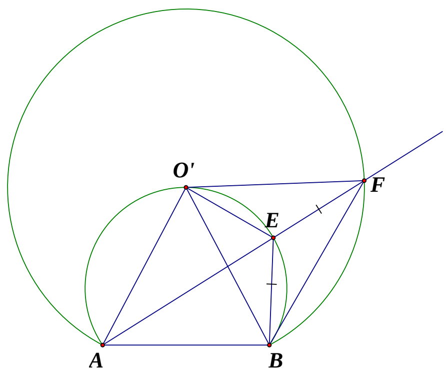
ΔMAO vuông tại A, có đường cao AH nên MA² = MH.MO (2)

Từ (1) và (2) suy ra MP.MQ = MH.MO hay $\frac{MP}{MH}=\frac{MO}{MQ}$ (*)

ΔMPH và ΔMOQ có góc M chung kết hợp với (*) ta suy ra ΔMPH đồng dạng Δ MOQ (c.g.c) suy ra $MHP = MQO$

Do đó tứ giác PQOH là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ $HPO = HQO = \frac{1}{2} sd\, OH$ (đpcm)

b)



Trên tia đối của tia EA lấy điểm F sao cho EB = EF hay ΔEBF cân tại E, suy ra $BFA=\frac{1}{2}BEA$. Đặt $AEB=\alpha$ khi đó $AFB=\frac{\alpha}{2}$ nên F di chuyển trên cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên BC.

Ta có: $\frac{1}{EA}+\frac{1}{EB}\geq\frac{4}{EA+EB}$. Như vậy $\frac{1}{EA}+\frac{1}{EB}$ nhỏ nhất khi EA + EB lớn nhất hay EA + EF lớn nhất $\Leftrightarrow$ AF lớn nhất (**)

Gọi O′ là điểm chính giữa của cung lớn AB, suy ra ΔO′AB cân tại O′ suy ra O′A=O′B (3)

ΔO′EB và ΔO′EF có EB = EF, O′E chung và $FEO' = BEO'$ (cùng bù với BAO' $\Rightarrow$ Δ O′EB = ΔO′EF (c.g.c) suy ra O′B = O′F (4)

Từ (3) và (4) suy ra O′ là tâm cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên đoạn thẳng BC. (cung đó và cung lớn AB cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB)

Do đó AF lớn nhất khi nó là đường kính của (O′) khi E ≡ O′ (***).

Từ (**) và (***) suy ra E là điểm chính giữa cung lớn AB thì $\frac{1}{EA}+\frac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.

Câu 5.

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD cạnh là a > 2 chứa 5 hình tròn bán kính bằng 1 sao cho không có hai hình tròn nào trong chúng có điểm trong chung. Suy ra tâm của các hình tròn này nằm trong hình vuông MNPQ tâm O cạnh là (a-2) và MN // AB. Các đường trung bình của hình vuông MNPQ chia hình vuông này thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau.

Theo nguyên lí Dirichle tồn tại một hình vuông nhỏ chứa ít nhất 2 trong 5 tâm của các hình tròn nói trên, chẳng hạn đó là O_1 và O_2.

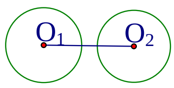
Do 5 hình tròn này không có hai hình tròn nào có điểm trong chung nên $O_1O_2 \geq 2$ (1)

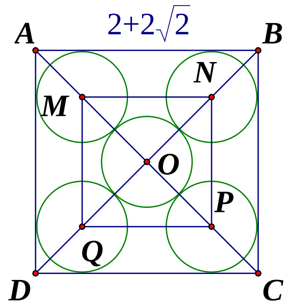
Mặt khác O_1O_2 cùng nằm trong một hình vuông nhỏ có cạnh là $\frac{a-2}{2}$ nên

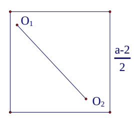
$O_1O_2 \leq \frac{a-2}{2}.\sqrt{2}$ (2) ($\frac{a-2}{2}.\sqrt{2}$ là đường chéo hình vuông nhỏ)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\frac{a-2}{2}\sqrt{2} \geq 2 \Leftrightarrow a \geq 2+2\sqrt{2}$. Do đó mọi hình vuông có cạnh lớn hơn hoặc bằng $(2+2\sqrt{2})$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy hình vuông ABCD có cạnh $(2+2\sqrt{2})$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.







Đề số 29

Câu 1.

$$a)\quad A=\left(\frac{a-3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}-\frac{a+3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}\right).\left(\sqrt{a}-\frac{9}{\sqrt{a}}\right)=\sqrt{a}\,\frac{\left(\sqrt{a}-3\right)^2-\left(\sqrt{a}+3\right)^2}{\left(\sqrt{a}-3\right).\left(\sqrt{a}+3\right)}.\frac{a-9}{\sqrt{a}}$$

$$=a-6\sqrt{a}+9-\left(a+6\sqrt{a}+9\right)=12\sqrt{a}.$$

b) Có $M=A+a=a-12\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}-6\right)^2-36\geq -36.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{a}-6=0 \Leftrightarrow a=36.$

Vậy $MinM=-36 \Leftrightarrow a=36.$

Câu 2.

a) Điều kiện $x \neq 0$

Ta có $\frac{9}{x^2}+\frac{2x}{\sqrt{2x^2+9}}=1 \Leftrightarrow \frac{2x^2+9}{x^2}+\frac{2x}{\sqrt{2x^2+9}}-3=0 \quad (*)$

Đặt $t=\frac{x}{\sqrt{2x^2+9}}\,(t \neq 0) \Rightarrow t^2=\frac{x^2}{2x^2+9} \Rightarrow \frac{1}{t^2}=\frac{2x^2+9}{x^2}$

Khi đó phương trình (*) có dạng

$$\frac{1}{t^2}+2t-3=0 \Leftrightarrow 2t^3-3t^2+1=0 \Leftrightarrow (t-1)^2(2t+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

- Với $t=1 \Rightarrow x=\sqrt{2x^2+9} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 2x^2+9=0 \end{cases}$ phương trình vô nghiệm

- Với $t=-\frac{1}{2} \Rightarrow -2x=\sqrt{2x^2+9} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ 4x^2=2x^2+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ 2x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

b) Thay (2) vào (1) ta được

$$x^3-y^3=\left(y^2-5y^2\right)(4x-y) \Leftrightarrow 21x^3-5x^2y-4xy^2=0$$

$$\Leftrightarrow x(7x-4y)(3x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{4}{7}y \\ x=-\frac{y}{3} \end{array}\right.$$

- Với $x=0$ thay vào (2) ta được $y=\pm 2$

- Với $x=\frac{4}{7}y$ thay vào (2) ta được $-\frac{31}{49}y^2=4$ phương trình vô nghiệm

- Với $x=-\frac{y}{3}$ thay vào (2) ta được $y^2=9 \Leftrightarrow y=\pm 3$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$(x;y)=(0;2);(0;-2);(-1;3);(1;-3)$

Câu 3.

a) Nếu $x=0 \Rightarrow y=1$ thỏa mãn

Nếu $y=0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ không thỏa mãn

Xét $x \neq 0; y \neq 0$ phương trình đã cho có dạng

$$4.54x^3\left(54x^3+1\right)=4.54x^3.y^3 \Leftrightarrow \left(4.27x^3+1\right)^2=(6xy)^3+1$$

Đặt $4.27x^3 = a; 6xy = b$ ta được phương trình

$(a+1)^2 = (b+1)(b^2-b+1)$ (*)

Từ (*) ta thấy $b+1>0.$ Gọi ƯCLN$(b+1;b^2-b+1)=d$

$\Rightarrow \begin{cases} b+1 \vdots d \\ b^2-b+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow b^2-b+1 = b(b+1)-2(b+1)+3 \vdots d \Rightarrow 3 \vdots d$

Mặt khác $(a+1)^2 = (4.27x^3+1)$ không chia hết cho 3 nên 3 không chia hết $d \Rightarrow d=1 \Rightarrow (b+1;b^2-b+1)=1$

Từ (*) nhận thấy tích hai số nguyên tố cùng nhau là một số chính phương nên phải có $\begin{cases} b+1=m^2 \\ b^2-b+1=n^2 \end{cases}$ $(m;n \in \mathbb{N}^*; m \ge 2; m^2 \ge 4)$

Ta có $n^2 = (m^2-1)^2 - (m^2-1)+1$

$\Leftrightarrow n^2 = (m^2-1)^2 - (m^2-2)$ (1); $n^2 = (m^2-2)^2 + (m^2-1)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (m^2-2)^2 < n^2 < (m^2-1)^2$ vô lý suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;1)$.

b) Giả sử phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương, xét $(x_0;y_0)$ là nghiệm mà (x_0+y_0) là nhỏ nhất.

Do vai trò của $x_0;y_0$ bình đẳng nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x_0 \le y_0$.

Ta có $x_0^2 - mx_0y + y_0^2 + 1 = 0 \Rightarrow y_0$ là một nghiệm của phương trình

$y^2 - mx_0y + x_0^2 + 1 = 0$ (1)

Suy ra phương trình còn một nghiệm y_1 thỏa mãn $\begin{cases} y_0 + y_1 = mx_0 & (2) \\ y_0.y_1 = x_0^2+1 & (3) \end{cases} \Rightarrow y_1$ nguyên dương $\Rightarrow x_0+y_0 \le x_0+y_1 \Rightarrow y_0 \le y_1$

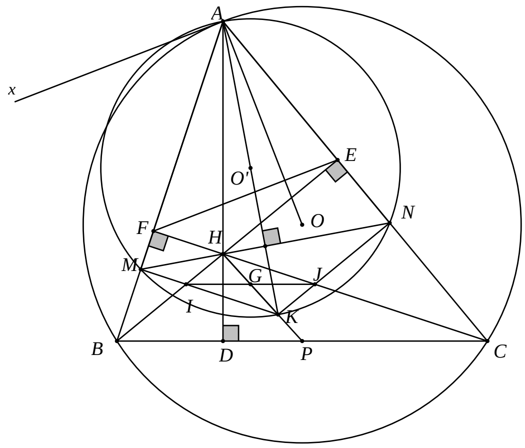
- Nếu $x_0 = y_0$ thay vào phương trình đã cho ta được $m = \dfrac{2y_0^2+1}{y_0^2} = 2 + \dfrac{1}{y_0^2} \Rightarrow y_0 = 1$ (do $m; y_0$ nguyên dương) suy ra $m=3$.

- Nếu $x_0 < y_0 = y_1$ thì từ (3) suy ra $y_0^2 = x_0^2+1 \Leftrightarrow (y_0-x_0)(y_0+x_0)=1$ (vô lí)

- Nếu $x_0 < y_0 < y_1$ thì $\begin{cases} y_0 \ge x_0+1 \\ y_1 \ge x_0+2 \end{cases}$ nên từ (3) suy ra $(x_0+1)(x_0+2) \le x_0^2+1 \Leftrightarrow 3x_0+1 \le 0$ vô lí

Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm.

Câu 4.



a) Ta có $AMN = MBH + MHB; ANM = NCH + NHC$

Mà $MBH = MCH; MHB = NHC$

Suy ra $AMN = ANM \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A.

b) Kẻ tiếp tuyến Ax của (O) $\Rightarrow xAB = ACB$

Mà $ACB = AFE$ (vì tứ giác $BFEC$ nội tiếp);

$\Rightarrow xAB = AFE \Rightarrow Ax // EF \Rightarrow OA \perp EF$.

Tương tự $OB \perp FD; OC \perp ED$.

Lại có

$$S_{ABC} = S_{AEOF} + S_{BDOF} + S_{CDOE} = \frac{1}{2}OA.EF + \frac{1}{2}OB.DF + \frac{1}{2}OC.DE$$

$$= \frac{1}{2}R\left(EF + DF + DE\right) = \frac{1}{2}AD.BC$$

Suy ra chu vi tam giác DEF là $\dfrac{AD.BC}{R}$.

Mà R, BC không đổi , suy ra chu vi tam giác DEF lớn nhất khi AD lớn nhất $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa của cung BC lớn.

c) Theo a) ΔAMN cân tại $A \Rightarrow AK$ là đường trung trực của MN.

Tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN là trung điểm của AK

$\Rightarrow AMK = ANK = 90^0$

Chứng minh được tứ giác $HIKJ$ là hình bình hành $\Rightarrow HK$ đi qua trung điểm G của IJ.

Nhận thấy $IMH = MHF = MHI \Rightarrow \Delta IMH$ cân tại $I \Rightarrow MI = IH$

Tương tự: $JN = JH$

Chứng minh được

ΔBIM đồng dạng với $\Delta CJN\left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{MI}{BI} = \dfrac{NJ}{JC} \Rightarrow \dfrac{IH}{BI} = \dfrac{JH}{JC} \Rightarrow IJ // BC$.

Mà HK đi qua trung điểm G của IJ nên cũng đi qua trung điểm P của BC.

Mà B, C định nên P cố định.

Câu 5.

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}+\frac{2b^5+3c^5}{bc}+\frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 15\left(a^3+b^3+c^3-2\right).$$

Ta chứng minh $\frac{2a^5+3b^5}{ab}\ge 5a^3-10ab^2+10b^3\ \forall a,b>0 \quad (1)$

Thật vậy

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}\ge 5a^3-10ab^2+10b^3 \Leftrightarrow 2a^5+3b^5-ab\left(5a^3-10ab^2+10b^3\right)\ge 0$$

$$2a^5-5a^4b+10a^2b^3-10ab^4+3b^5\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^4(2a+3b)\ge 0\ \forall a,b>0$$

Tương tự ta có: $\frac{2b^5+3c^5}{bc}\ge 5b^3-10bc^2+10c^3\ (2); \frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 5c^3-10ca^2+10a^3\ (3)$

Cộng theo các vế của bất đẳng thức (1); (2); (3) ta được

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}+\frac{2b^5+3c^5}{bc}+\frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 15\left(a^3+b^3+c^3\right)-10\left(ab^2+bc^2+ca^2\right).$$

Mà $ab^2+bc^2+ca^2=3$

$$\Rightarrow \frac{2a^5+3b^5}{ab}+\frac{2b^5+3c^5}{bc}+\frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 15\left(a^3+b^3+c^3\right)-30=15\left(a^3+b^3+c^3-2\right).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1.$

Đề số 30

Câu 1.

Có $x+1=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2=\sqrt[3]{2}\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)=\sqrt[3]{2}x.$

$\Rightarrow (x+1)^3=2x^3 \Leftrightarrow x^3-3x^2-3x=1 \Rightarrow A=2019$

Câu 2.

a) Đường thẳng (d) cắt trục Ox, Oy tại $A\left(\frac{m-1}{m};0\right); B(0;1-m)$

Xét $m=1,$ (d)đi qua điểm O nên khoảng cách từ O đến (d) bằng 0.

Xét $m\ne 1,$ gọi OH là đường cao tam giác OAB

Ta có $OA=\left|\frac{m-1}{m}\right|; OB=|1-m| \Rightarrow \frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2}=\frac{m^2+1}{(m-1)^2}=1+\frac{2}{m-1}+\frac{2}{(m-1)^2}=2\left(\frac{1}{m-1}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow OH\le\sqrt{2}.$ Dấu "=' xảy ra $m=-1.$

b) Ta có $\overline{ab}-\overline{ba}=k^2 \quad (k\in\mathbb{N}) \Rightarrow 9(a-b)=k^2$

Do đó $a-b$ là một số chính phương

Ta lại có $a-b\le 9, a\ne b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=1 \\ a-b=4 \\ a-b=9 \end{array}\right.$

Với $a-b=1 \Rightarrow a=b+1 \Rightarrow$ có 9 số thỏa mãn: 10; 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98

Với $a-b=4 \Rightarrow a=b+4 \Rightarrow$ có 6 số thỏa mãn: 40; 51; 62; 73; 84; 95.

Với $a-b=9 \Rightarrow a=b+9 \Rightarrow$ có 1 số thỏa mãn: 90

Vậy có tất cả 16 số thỏa mãn: 10; 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87;98; 40; 51; 62; 73; 84; 95; 90.

Câu 3.

$$x^2+3x\sqrt[3]{3x+2}-12+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+8}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{3x+2}+\frac{3x^2}{\sqrt[3]{(3x+2)}}-4=0\left(\text{Do } x>0 \Rightarrow 3x+2>0\right)$$

Đặt $t=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(3x+2)}}(t>0)$ phương trình trở thành

$$t^3+3t^2-4=0 \Leftrightarrow (t+2)^2(t-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2(ktm) \\ t=1(tm) \end{array}\right.$$

Với $t=1 \Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt[3]{(3x+2)}}=1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{(3x+2)}$

$$\Rightarrow x^2=3x-2 \Rightarrow x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1(ktm) \\ x=2(tm) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.

Câu 4.

$$\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy-4x+3y+2=0 & (1) \\ \sqrt{x^2-y+3}+\sqrt{y-x+1}=2 & (2) \end{cases} \quad \text{Điều kiện } \begin{cases} x^2-y+3\ge 0 \\ y-x+1\ge 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow y^2-3(x-1)y+2x^2-4x+2=0$$

Tính $\Delta=(x-1)^2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=2x-2 \end{array}\right.$

Với $y=x-1$ thay vào (2) ta được

$$\sqrt{x^2-x+4}=2 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1(tm) \\ x=0(tm) \end{array}\right.$$

Với $y=2x-2$ thay vào (2) ta được

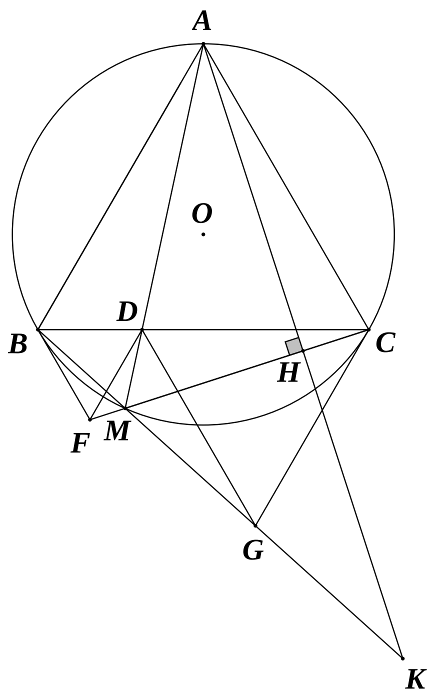
$$\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{x-1}=2$$

Ta có $\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{x-1}\ge 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=0(tm)$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(x;y)=(0;-1);(1;0)$

Câu 5.



a) Tam giác ABC đều nên $ABC = ACB = 60^0$

Do đó $AMB = ACB = 60^0, AMH = ABC = 60^0 \Rightarrow CMK = 60^0$

$\Rightarrow AMH = HMK$ mà $MH \perp AK$ nên tam giác AMK cân tại M

Suy ra H là trung điểm của AK.

b) Theo trên ta có CM là đường trung trực của $AK \Rightarrow CA = CK$

Mà A, C cố định nên K nằm trên đường tròn cố định $(C;CA)$

Lại có tam giác ABC đều nên O là trọng tâm của

$$\Delta ABC \Rightarrow OA = \frac{2}{3}.\frac{AC\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3\sqrt{3} = \frac{AC\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AC = 9$$

Vậy K thuộc đường tròn $(C;9)$

c) Gọi $R_1; R_2$ theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác $MBD, MCD.$

Dựng các tam giác đều BDF, CFG ra phía ngoài tam giác $ABC.$

Ta có $BFD = BMD = 60^0 \Rightarrow$ tứ giác $BDMF$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự tứ giác $CDMG$ nội tiếp

$\Rightarrow R_1; R_2$ lần lượt là các bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác BDF, $CDG.$

Ta có $\Delta BDF; \Delta CDG$ là các tam giác đều nên:

$$R_1 = \frac{BD\sqrt{3}}{3}; R_2 = \frac{CD\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R_1.R_2 = \frac{BD.CD}{3}$$

Lại có $BD.CD \le \dfrac{(BD+CD)^2}{4} = \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{3R^2}{4} \Rightarrow R_1.R_2 \le \dfrac{3R^2}{4}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow BD = CD \Leftrightarrow D$ là trung điểm của BC

$\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa của cung nhỏ BC

Vậy $MaxR_1.R_2 = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa của cung nhỏ BC

Câu 6.

Ta có: $a+b+c=3 \Rightarrow 3a-ab-ac+2bc=(a+b+c)a-ab-ac+2bc=a^2+2bc$

Tương tự: $3b-bc-bc+2ac=b^2+2ac; 3c-ca-ca+2ab=c^2+2ab$

Do đó $P=\frac{a^3}{a^2+2bc}+\frac{b^3}{b^2+2ac}+\frac{c^3}{c^2+2ab}+3abc$

$$P-3=\frac{a^3}{a^2+2bc}-a+\frac{b^3}{b^2+2ac}-b+\frac{c^3}{c^2+2ab}-c+3abc$$

$$=-\frac{2abc}{a^2+2bc}-\frac{2abc}{b^2+2ac}-\frac{2abc}{c^2+2ab}+3abc=-2abc\left(\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\right)+3abc$$

Mặt khác:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab} \geq \frac{(1+1+1)^2}{(a^2+2bc+b^2+2ac+c^2+2ab)}=\frac{9}{(a+b+c)^2}=1$$

Suy ra $P-3 \leq -2abc+3abc=abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2=1 \Rightarrow P \leq 4$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy $MaxP=4 \Leftrightarrow a=b=c=1.$

Đề số 31

Câu 1.

a) Ta có

$4S = 1.2.3.4+2.3.4.(5-1)+3.4.5.(6-2)+...+n(n+1)(n+2)[(n+3)-(n-1)]$

$=1.2.3.4+2.3.4.5-1.2.3.4+3.4.5.6-2.3.4.5+...+n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)$

$= n(n+1)(n+2)(n+3)$

Do đó $4S+1 = n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$

$= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1$

$= (n^2+3n+1)^2$. Vậy $4S+1$ là số chính phương.

b) Ta có

$x^2+2y^2+2xy=y+2 \Leftrightarrow (x+y)^2=-y^2+y+2 \Leftrightarrow (x+y)^2=(1+y)(2-y)$

Do $(x+y)^2 \geq 0, \forall x,y$ nên $(1+y)(2-y) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 2$. Suy ra $y \in \{-1;0;1;2\}$

Với $y=-1$, PT trở thành $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1 \in Z$

Với $y=0$, PT trở thành $x^2-2=0 \Rightarrow x \notin Z$

Với $y=1$, PT trở thành $x^2+2x-1=0 \Rightarrow x \notin Z$

Với $y=2$, PT trở thành $x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow x=-2 \in Z$.

Vậy có 2 cặp $(x;y)$ thỏa mãn đề bài $(1;-1);(-2;2)$.

Câu 2.

a) Ta có $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4x=x^2+x+1\Leftrightarrow x^2=3x-1$

Khi đó $x^3=x^2.x=(3x-1)x=3x^2-x=3(3x-1)-x=8x-3$

$x^4=x^3.x=(8x-3)x=8x^2-3x=8(3x-1)-3x=21x-8$

$x^5=x^4.x=(21x-8)x=21x^2-8x=21(3x-1)-8x=55x-21$

Suy ra P = $\frac{x^5-4x^3-17x+9}{x^4+3x^2+2x+11}=\frac{(55x-21)-4(8x-3)-17x+9}{(21x-8)+3(3x-1)+2x+11}$

$=\frac{6x}{32x}=\frac{3}{16}$ (do $x\neq 0$). Vậy P = $\frac{3}{16}$.

b) Ta có

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3\Leftrightarrow a+b+c+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)=9\Leftrightarrow\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=2$

Do đó $a+2=a+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)$

$b+2=b+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)$

$c+2=c+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{b}\right)$

Suy ra $\frac{\sqrt{a}}{a+2}+\frac{\sqrt{b}}{b+2}+\frac{\sqrt{c}}{c+2}=\frac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}+\frac{\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}+\frac{\sqrt{c}}{\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{b}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)+\sqrt{c}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$$

Vậy $\frac{\sqrt{a}}{a+2}+\frac{\sqrt{b}}{b+2}+\frac{\sqrt{c}}{c+2}=\frac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$.

Câu 3.

a) Điều kiện $|x|\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$

PT $\Leftrightarrow 2(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=10x^2+3x-6$

$\Leftrightarrow 4\left(2x^2-1\right)-2(3x+1)\sqrt{2x^2-1}+2x^2+3x-2=0$

Đặt $\sqrt{2x^2-1}=t$ $(t\geq 0)$, ta được $4t^2-2(3x+1)t+2x^2+3x-2=0$

Ta có $\Delta'=(3x+1)^2-4\left(2x^2+3x-2\right)=x^2-6x+9=(x-3)^2$

nên PT $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{3x+1-x+3}{4}\\ t=\frac{3x+1+x-3}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{x+2}{2}\\ t=\frac{2x-1}{2}\end{array}\right.$

Với $t=\frac{x+2}{2}$ thì $\sqrt{2x^2-1}=\frac{x+2}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\4\left(2x^2-1\right)=\left(x+2\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\7x^2-4x-8=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\x=\frac{2\pm\sqrt{60}}{7}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{60}}{7}.$$

Với $t=\frac{2x-1}{2}$ thì $\sqrt{2x^2-1}=\frac{2x-1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\4\left(2x^2-1\right)=\left(2x-1\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\4x^2+4x-5=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\x=\frac{-1\pm\sqrt{6}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{6}}{2}.$$

Kết hợp điều kiện $|x|\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ ta được nghiệm của PT là $x\in\left\{\frac{2\pm\sqrt{60}}{7};\frac{-1+\sqrt{6}}{2}\right\}$.

b) Xét hệ phương trình $\begin{cases}2x^2-y^2+xy+y-5x+2=0 & (1)\\x^2+y^2+x+y-4=0 & (2)\end{cases}$

PT $(1)\Leftrightarrow\ 2x^2-y^2+xy+y-5x+2=0\Leftrightarrow y^2-\left(x+1\right)y-2x^2+5x-2=0$

Ta có $\Delta'=\left(x+1\right)^2-4\left(-2x^2+5x-2\right)=9x^2-18x+9=9\left(x-1\right)^2$

Khi đó PT $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\frac{x+1-3\left(x-1\right)}{2}\\y=\frac{x+1+3\left(x-1\right)}{2}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-x+2\\y=2x-1\end{array}\right.$$

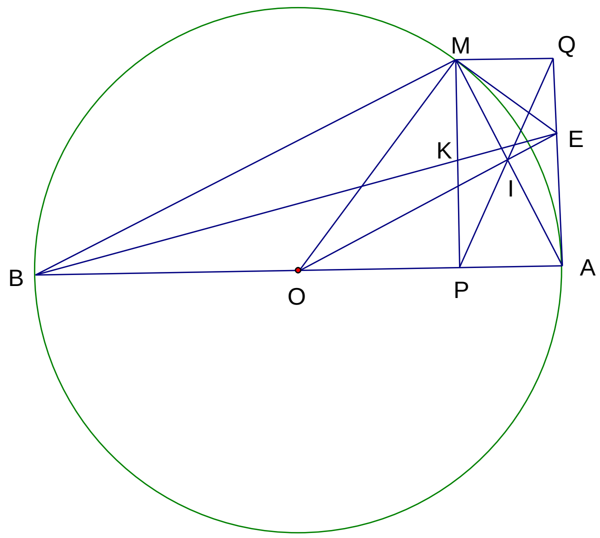
Với $y=-x+2$, thay vào PT (2) ta được $2x^2-4x+2=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=1$

Với $y=2x-1$, thay vào PT (2) ta được $5x^2-x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{4}{5}\end{array}\right.$

*) $x=1\Rightarrow y=1$ *) $x=-\frac{4}{5}\Rightarrow y=-\frac{13}{5}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1;1)$ và $\left(-\frac{4}{5};-\frac{13}{5}\right)$

Câu 4.



a) Xét tứ giác AEMO có góc $\angle$OAE = $\angle$OME = 90^0 nên tứ giác AEMO nội tiếp.

Xét tứ giác APMQ có góc $\angle$MPA = $\angle$PAQ = $\angle$AQM = 90^0 nên tứ giác APMQ là hình chữ nhật.

b) Do APMQ là hình chữ nhật nên hai đường chéo PQ và MA cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường.

Do tiếp tuyến tại A và M cắt nhau tại E, I là trung điểm MA nên O, I, E thẳng hàng.

Vậy PQ, OE, MA đồng qui tại I

c) O là trung điểm AB, I là trung điểm MA nên OI song song với MB $\Rightarrow \angle$MBP = $\angle$EOA

Mà $\angle$MPB = $\angle$EAO = 90^0 nên ΔMPB đồng dạng với ΔEAO (g.g).

Suy ra PB : AO = PM : AE $\Rightarrow$ PB. AE = PM. AO (1)

Do PK song song với AE nên PB : AB = PK : AE $\Rightarrow$ PB. AE = PK. AB (2)

Từ (1) và (2) suy ra PM. AO = PK. AB $\Rightarrow$ PM. 2AO = 2PK. AB $\Rightarrow$ PM = 2PK (do 2AO = AB)

Vậy K là trung điểm MP.

d) Trong tam giác vuông MPO, ta có $MP^2 = OM^2 – OP^2 = R^2 – (R - x)^2$ khi P thuộc đoạn OA

$MP^2 = OM^2 – OP^2 = R^2 – (x - R)^2$ khi P thuộc đoạn OB

Khi đó $MP^2 = (2R - x)x$. Suy ra MP = $\sqrt{(2R-x)x}$

Diện tích hình chữ nhật APMQ là S = MP. AP = $\sqrt{(2R-x)x^3}$

Áp dụng BĐT $a+b+c+d \ge 2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd} \ge 4\sqrt[4]{abcd}$ với mọi $a,b,c,d>0$

hay $abcd \le \left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^4$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d$

$$S=\sqrt{(2R-x)x^3}=\sqrt{27(2R-x).\frac{x}{3}.\frac{x}{3}.\frac{x}{3}}\le\sqrt{27.\left(\frac{2R-x+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}}{4}\right)^4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2R-x=\frac{x}{3}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}R$. Suy ra P là trung điểm OB. Do đó ta xác định được M để diện tích hình chữ nhật APMQ lớn nhất.

Câu 5.

Ta có $\left(\frac{a+b}{a-b}+1\right)\left(\frac{b+c}{b-c}+1\right)\left(\frac{c+a}{c-a}+1\right)=\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right)\left(\frac{b+c}{b-c}-1\right)\left(\frac{c+a}{c-a}-1\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b}.\frac{b+c}{b-c}+\frac{b+c}{b-c}.\frac{c+a}{c-a}+\frac{c+a}{c-a}.\frac{a+b}{a-b}=-1$$

Khi đó $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right)^2\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2\ge -2.\frac{a+b}{a-b}.\frac{b+c}{b-c}+\frac{b+c}{b-c}.\frac{c+a}{c-a}+\frac{c+a}{c-a}.\frac{a+b}{a-b}=2$$

Suy ra

$$2.\left(\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c-a)^2}\right)=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)^2}+\frac{(b+c)^2+(b-c)^2}{(b-c)^2}+\frac{(c+a)^2+(c-a)^2}{(c-a)^2}$$

$$=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2+3\ge 2+3=5\Rightarrow\left(\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c-a)^2}\right)\ge\frac{5}{2}\quad(1)$$

Mặt khác $\left(\frac{a}{b-c}+1\right)\left(\frac{b}{c-a}+1\right)\left(\frac{c}{a-b}+1\right)=\left(\frac{a}{b-c}-1\right)\left(\frac{b}{c-a}-1\right)\left(\frac{c}{a-b}-1\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b-c}.\frac{b}{c-a}+\frac{b}{c-a}.\frac{c}{a-b}+\frac{c}{a-b}.\frac{a}{b-c}=-1$$

Khi đó $\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2\ge -2.\frac{a}{b-c}.\frac{b}{c-a}+\frac{b}{c-a}.\frac{c}{a-b}+\frac{c}{a-b}.\frac{a}{b-c}=2\quad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)$$

$$=\left(\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c-a)^2}\right)+\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2\ge\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}=0\\ \frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0\end{cases}\Rightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)=0$

Chẳng hạn $a=0, b=1, c=-1$.

Đề số 32

Câu 1.

1.1 Đặt $M=\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}}$. Ta có $M^2=\dfrac{10+2\sqrt{22}}{5+\sqrt{22}}=2$

$\Rightarrow M=\sqrt{2}$ (Do $M>0$)

$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=3-\sqrt{2}$

Suy ra $P=3$

1.2

Ta có $xy+z-1=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$

Tương tự $yz+x-1=(y-1)(z-1)$ và $zx+y-1=(z-1)(x-1)$

Suy ra $S=\dfrac{1}{(x-1)(y-1)}+\dfrac{1}{(y-1)(z-1)}+\dfrac{1}{(z-1)(x-1)}=\dfrac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}$

$$=\frac{-1}{xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1}=\frac{1}{xy+yz+zx}$$

Ta có $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx=-7$

Suy ra $S=-\dfrac{1}{7}$

Câu 2.

2.1 Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$

$2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}-\sqrt{5x+11}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{5x+11}$

$\Leftrightarrow 9x-1+4\sqrt{2x^2+5x-3}=5x+11\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+5x-3}=3-x$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\2x^2+5x-3=9-6x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\x^2+11x-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-12\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta được $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

2.2 Điều kiện $x\ge 1, y\in\mathbb{R}$

$y^2-y\left(\sqrt{x-1}+1\right)+\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow y^2-y-\sqrt{x-1}(y-1)=0\Leftrightarrow(y-1)\left(y-\sqrt{x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=\sqrt{x-1}\end{array}\right.$.

Với $y=1$, thay vào (2) ta được

$x^2+1-\sqrt{7x^2-3}=0\Leftrightarrow x^2+1=\sqrt{7x^2-3}\Leftrightarrow x^4+2x^2+1=7x^2-3$

$\Leftrightarrow x^4-5x^2+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$ (do điều kiện của x)

Với $y=\sqrt{x-1}$, thay vào (2) ta được $x^2+\sqrt{x-1}-\sqrt{7x^2-3}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4\right)+\left(\sqrt{x-1}-1\right)-\left(\sqrt{7x^2-3}-5\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)+\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{7(x-2)(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5}=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5}=0 \end{array}\right.$

Với $x=2$ suy ra $y=1$.

Ta có $x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5}=(x+2)\left(1-\dfrac{7}{\sqrt{7x^2-3}+5}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}$

$=(x+2)\dfrac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}$

Với $x\geq 1$ thì $\sqrt{7x^2-3}-2\geq 0 \Rightarrow (x+2)\dfrac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5}\geq 0$

Suy ra $(x+2)\dfrac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}>0$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(1;1),(2;1)$.

Câu 3.

3.1 Ta có $x^2+y^2+xy-x-y=1 \Leftrightarrow (x+y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=4$

Ta có bảng giá trị tương ứng (học sinh có thể xét từng trường hợp)

$x+y$	$x-1$	$y-1$	Nghiệm $(x;y)$
2	0	0	$(1;1)$
-2	0	0	Loại
0	2	0	Loại
0	-2	0	$(-1;1)$
0	0	2	Loại
0	0	-2	$(1;-1)$

Vậy các số $(x;y)$ cần tìm là $(1;1)$, $(-1;1)$, $(1;-1)$

3.2 Với mỗi số nguyên dương k ta có $k=\sqrt{k^2}=\sqrt{1+\left(k^2-1\right)}=\sqrt{1+(k-1)(k+1)}$.

Sử dụng đẳng thức trên liên tiếp với $k=3,4,...,n$ ta được

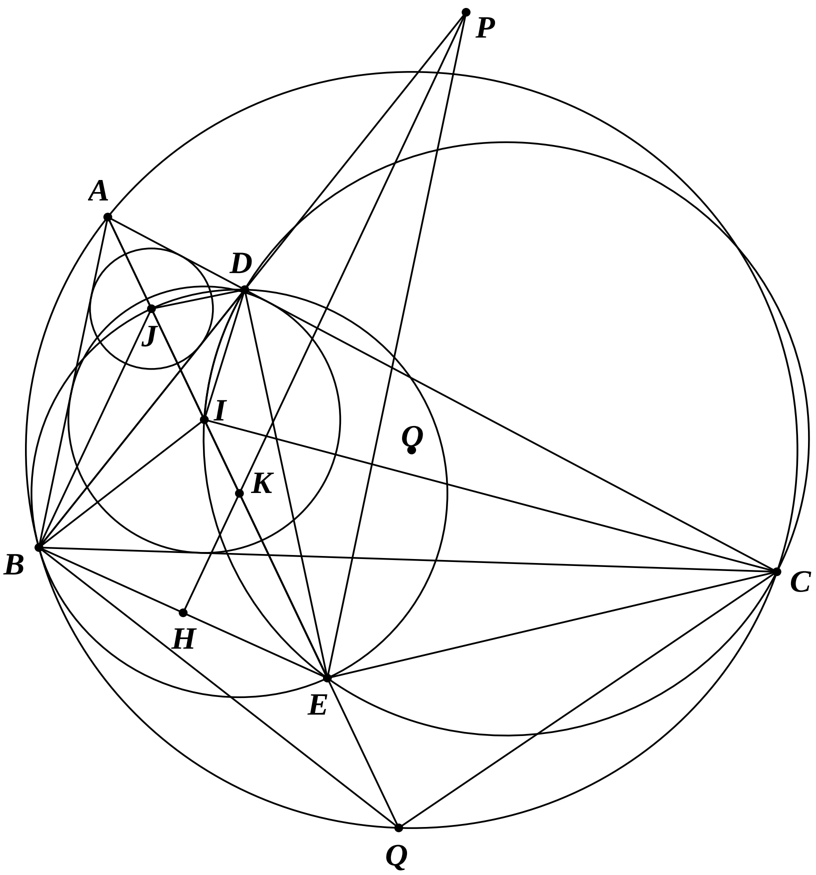
$$3=\sqrt{1+2.4}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3.5}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4.6}}}=\cdots$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)(n+1)}}}}$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{(n+1)^2}}}}}>\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4...\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 4.



4.1 Ta có AI là phân giác của BAC nên Q là điểm chính giữa của cung BC của (O).

Suy ra $BAQ=QAC=QBC$

$IBQ=IBC+QBC=IBA+BAQ=BIQ$

Hay tam giác QBI cân tại Q.

4.2 Tam giác ABD đồng dạng tam giác ACB

Suy ra $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AB}$ hay $AB^2=AD.AC$ (1).

Tam giác ADI đồng dạng tam giác AEC (có góc A chung và $AID=ACE$)

Suy ra $\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{AI}{AC}$ hay $AI.AE=AD.AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AI.AE = AB^2$,

suy ra tam giác *ABI* đồng dạng tam giác *AEB*.

Suy ra $AEB = ABI = \dfrac{ABC}{2}$

Ta có $AEP = BAE = \dfrac{BAC}{2}$ (hai góc so le trong),

suy ra $BEP = \dfrac{ABC + BAC}{2}$.

Theo a) ta có $BIQ = \dfrac{BAC + ABC}{2}$ suy ra $BIQ = BEP$

Ta có $BPE = ABD = ACB = BQI$

Suy ra hai tam giác *PBE* và *QBI* đồng dạng, suy ra $\dfrac{BP}{BQ} = \dfrac{BE}{BI} \Leftrightarrow BP.BI = BE.BQ$, ta có điều phải chứng minh.

4.3 Tam giác *BQI* đồng dạng tam giác *BPE* và tam giác *BQI* cân tại *Q* nên tam giác *PBE* cân tại *P*, suy ra $PBE = \dfrac{BAC + ABC}{2}$ và $PH \perp BE$ với *H* là trung điểm của *BE*.

Do *HK* là đường trung bình của tam giác *EBJ* nên *HK*//*BJ*

Ta có $JBD = \dfrac{ACB}{2}$ và $DBE = \dfrac{BAC + ABC}{2}$, suy ra $JBE = 90^{\circ}$ hay *JB* vuông góc *BE*.

Suy ra *PH*//*JB*, suy ra *P, H, K* thẳng hàng hay *PK*//*JB*.

Câu 5.

Giả sử tất cả các câu lạc bộ đều có không quá 8 học sinh.

Gọi N là số câu lạc bộ có hơn 1 học sinh.

Nếu $\mathrm{N} > 4$, từ 5 trong số các câu lạc bộ này, chọn mỗi câu lạc bộ 2 học sinh, khi đó 10 học sinh này không thỏa mãn điều kiện bài toán.

Nếu $\mathrm{N}<4$, khi đó số học sinh tham gia các câu lạc bộ này không quá $3.8 = 24$, nghĩa là còn ít nhất $35 - 24 = 11$ học sinh, mỗi học sinh tham gia 1 câu lạc bộ mà câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh. Chọn 10 học sinh trong số này, không thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy $\mathrm{N}=4$.

Số học sinh tham gia 4 câu lạc bộ này không quá $4.8 = 32$, nghĩa là còn ít nhất 3 học sinh, mỗi học sinh tham gia 1 câu lạc bộ mà câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh.

Chọn 2 trong số học sinh này và mỗi câu lạc bộ trên chọn 2 học sinh, khi đó 10 học sinh không thỏa mãn điều kiện.

Vậy điều giả sử sai, nghĩa là tồn tại một câu lạc bộ có ít nhất 9 học sinh tham gia.

Đề số 33

Câu 1.

a) Từ phương trình thứ nhất của hệ ta được $x=5y-20$. Thế vào phương trình thứ hai ta được

$$\left(5y-19\right)\left(10y-39\right)\left(15y-59\right)=\left(1+3y\right)\left[1+3y+2\left(5y-20\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 750y^3-8725y^2+33830y-34719=150y^3-1141y^2+2006y+801$$

$$\Leftrightarrow 600y^3-7584y^2-31824y-44520=0\Leftrightarrow\left(y-5\right)\left(75y^2-573y+1113\right)=0$$

Dễ thấy phương trình $75y^2-573y+1113=0$ vô nghiệm

Do đó từ phương trình trên ta được $y-5=0\Leftrightarrow y=5$ nên $x=5$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(5;5\right)$.

Cách khác: Khi thực hiện phép thế $x=5y-20$ vào phương trình thứ hai thì ta được phương trình một ẩn, tuy nhiên phương trình khó phân tích. Do đó ta có thể tìm cách phân tích phương trình thứ hai thành tích.

$$\left(1+x\right)\left(1+2x\right)\left(1+3x\right)=\left(1+3y\right)\left(1+3y+2x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2+3x+1\right)\left(3x+1\right)=\left(1+3y\right)\left(1+3y+2x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(3x+1\right)^2+2x^2\left(3x+1\right)=\left(1+3y\right)^2+2x^2\left(3y+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x-y\right)\left[2+3\left(x+y\right)+2x^2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y=0\\2+3\left(x+y\right)+2x^2=0\end{array}\right.$$

Đến đây ta kết hợp với phương trình thứ nhất để tìm nghiệm.

Trong hai cách trên thì cách thực hiện phép thế dễ thấy hơn nhưng cách phân tích phương trình thứ hai thành tích cho lời giải đơn giản hơn.

b) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta' >0\\x_1.x_2>0\\x_1+x_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2m+1\right)^2-\left(3m+4\right)>0\\3m+4>0\\2\left(2m+1\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(m+1\right)\left(4m-3\right)>0\\4m>-3\\2m>-1\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{3}{4}$$

Câu 2.

a) Từ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$ và $x+y+z=2$ ta có

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2=x+y+z+2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)$$

Từ đó ta được $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$. Khi đó

$$\begin{cases}x+1=x+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)\\y+1=y+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\\z+1=z+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\left(\sqrt{z}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)\end{cases}$$

Thay vào biểu thức P ta được

$$P=\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{\sqrt{y}}{y+1}+\frac{\sqrt{z}}{z+1}\right)$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)^2}.\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)+\sqrt{y}\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)+\sqrt{z}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=2$$

b) Gọi đường thẳng cần tìm là $y=ax+b$. Do đường thẳng đi qua điểm $M(1;2)$ nên ta có $2=a+b$. Do đường thẳng cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B nên ta có

Khi $x=0$ thì $y=b$, do đó ta có $B(0;b)$. Khi $y=0$ thì $x=-\frac{b}{a}$, do đó ta có $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$.

Mà ta có $OA+OB=6$ nên ta được $|b|+\left|-\frac{b}{a}\right|=6$.

Chú ý rằng đường thẳng cắt tia Ox và Oy nên ta có $b>0;-\frac{b}{a}>0$ do đó $b>0;a<0$.

Từ đó ta có $\begin{cases}a+b=2\\ b-\frac{b}{a}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2-a\\ (2-a)+\frac{a-2}{a}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2-a\\ a^2+3a+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1;b=3\\ a=-2;b=4\end{array}\right.$

Vậy các đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là $y=-x+3$ hoặc $y=-2x+4$.

Câu 3.

a. Do số cần tìm $\overline{ab}$ nên ta dễ dàng suy ra được $10\le\overline{ab}\le 99$.

Từ đó ta có $16\le\overline{ab}+6\le 105$. Chú ý rằng $\overline{ab}+6=(a+b)^3$ nên ta được $16\le(a+b)^3\le 105$.

Ta tìm các lập phương đúng trong khoảng từ 16 đến 105 thì được $(a+b)^3=27$ và $(a+b)^3=64$.

Từ đó ta được $a+b=3$ và $a+b=4$. Đến đây ta được $\overline{ab}\in\{12;21;30;13;22;31\}$.

Thử lần lượt các trường hợp thì được $\overline{ab}=21$ vì $21+6=(2+1)^3$.

b. Chú ý đến biến đổi $\underbrace{111...1}_{n\,sc1}=\frac{10^n-1}{9}$ ta đi phân tích các số a và b về các lũy thừa của 10. Ta có $a=\underbrace{111...1}_{2017\,sc1}=\frac{10^{2017}-1}{9}$ và $b=1\underbrace{000...0}_{2016\,cs0}5=1\underbrace{000...0}_{2017\,cs0}+5=10^n+5$.

Khi đó ta được

$$M=ab+1=\frac{10^{2017}-1}{9}.\left(10^{n}+5\right)+1=\frac{\left(10^{2017}\right)^{2}+4.10^{2017}-5}{9}+1=\left(\frac{10^{2017}+2}{3}\right)^{2}.$$

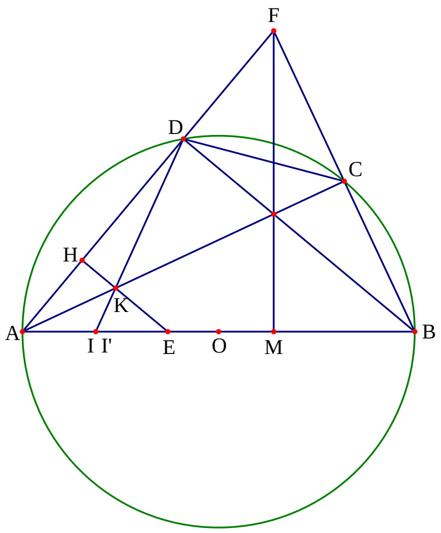
Đến đây ta chỉ cần chỉ ra được $\frac{10^{2017}+2}{3}\in N$ ta ta có điều phải chứng minh.

Tuy nhiên $\frac{10^{2017}+2}{3}\in N$ hiển nhiên đúng do $10^{2017}+2\vdots 3$. Vậy $M=ab+1$ là số chính phương.

• **Chú ý.** Với dạng toán chứng minh số chính phương như trên ta chú ý đến phép biến đổi:

$$9=10^{1}-1;99=10^{2}-1;999=10^{3}-1;...;\underbrace{999...9}_{n\,cs9}=10^{n}-1$$

Câu 4.



a) Kẻ FM vuông góc với AB. Khi đó ta có $ADB=AMF=90^{0}$. Xét hai tam giác ADB và AMF có $ADB=AMF=90^{0}$ và $\widehat{BAD}$ chung

Do đó $\Delta ADB\backsim\Delta AMF$ nên ta được $\frac{AD}{AB}=\frac{AM}{AF}$ suy ra $AD.AF=AB.AM$.

Xét hai tam giác ACB và FMB có $ACB=FMB=90^{0}$ và ABC chung

Do đó $\Delta ACB\backsim\Delta FMB$ nên ta được $\frac{BC}{AB}=\frac{BM}{BF}$ suy ra $BC.BF=AB.BM$.

Từ đó ta được $AD.AF+BC.BF=AB\left(AM+BM\right)=AB^{2}=4R^{2}$.

b) Do $BC=CD$ nên $BC=CD$, do đó AC là tia phân giác của BAD. Trong tam giác ADI' có AK là tia phân giác nên $\frac{AI'}{AD}=\frac{KI'}{KD}$. Mặt khác do HE//BD nên ta được $\frac{KI'}{KD}=\frac{EI'}{EB}$.

Từ đó ta được $\frac{AI'}{AD}=\frac{EI'}{BE}$, mà theo giả thiết ta có $AD=BE$ nên $AI'=EI'$ hay I′ là trung điểm của AE. Do đó hai điểm I và I′ trùng nhau. Suy ra ba điểm D, I, K thẳng hàng.

Câu 5. Ta có $\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}}=\frac{S_{BOC}}{S_{COD}}=\frac{OB}{OD}$. Do đó $S_{OAD}.S_{OBC}=S_{AOB}.S_{COD}=9.16=144$

Ta có

$S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{COD}+S_{AOD}+S_{BOC}\ge S_{AOB}+S_{COD}+2\sqrt{S_{AOD}.S_{BOC}}=9+16+\sqrt{144}=49$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $S_{AOD}=S_{BOC}$ hay $OA.OD=OB.OC$.

Điều này có được khi $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$ hay AB//CD. Vậy giá trị nhỏ nhất của S_{ABCD} là $49cm^2$ khi AB//CD.

Câu 6. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$2a^2+\frac{1}{2}b^2\ge 2ab;\frac{21}{2}b^2+\frac{14}{3}c^2\ge 14bc;3a^2+\frac{1}{3}c^2\ge 2.ca$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P=5a^2+11b^2+5c^2\ge 2ab+17bc+2ca=2\left(ab+7bc+ca\right)=2.188=376$$

Dấu bằng xẩu ra khi

$$\begin{cases}4a^2=b^2\\9b^2=4c^2\\9a^2=c^2\\ab+7bc+ca=188\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=\pm b\\3b=\pm 2c\\3a=\pm c\\ab+7bc+ca=188\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2;b=4;c=6\\a=-2;b=-4;c=-6\end{array}\right..$$

Đề số 34

Câu 1.

a) Ta có $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=\sqrt{3}+1$. Mặt khác ta lại có

$$a=\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}\Rightarrow a^3=\left(\sqrt{5}+2\right)^3\left(17\sqrt{5}-38\right)=\left(17\sqrt{5}+38\right)\left(17\sqrt{5}-38\right)=1$$

Từ đó ta suy ra được $a=1$ hay $\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}=1$.

Như vậy ta được $x=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1$. Từ đó suy ra

$P=\left[\left(-1\right)^2+\left(-1\right)-1\right]^{2016}=1$.

b) Ta có $x+y=-5$ nên ta được $\left(x+y\right)^2=25\Rightarrow x^2+y^2+2xy=25$.

Mà ta có $x^2+y^2=11$, do đó suy ra $2xy=14$ hay $xy=7$.

Ta có $x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2\left(xy\right)^2=11^2-2.7^2=121-98=23$.

Câu 2.

a) Điều kiện: $2x+3\ge 0$.

Khi đó, hương trình đã cho tương đương với:

$$x^2+6x+9=2x+3+2\sqrt{2x+3}+1\Leftrightarrow (x+3)^2=\left(\sqrt{2x+3}+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=\sqrt{2x+3}+1 \\ x+3=-\left(\sqrt{2x+3}+1\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=\sqrt{2x+3} \\ -x-4=\sqrt{2x+3}\end{array}\right.$$

o Với $x+2=\sqrt{2x+3}\Leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge 0 \\ (x+2)^2=2x+3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge 0 \\ x^2+2x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$.

o Với $-x-4=\sqrt{2x+3}\Leftrightarrow \begin{cases} -x-4\ge 0 \\ (x+4)^2=2x+3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x+4\le 0 \\ x^2+6x+13=0\end{cases}$, hệ vô nghiệm.

Kết hợp với điều kiện xác định của phương trình ta được $x=-1$ là nghiệm duy nhất.

Cách khác: Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+2x+1+2x+3-2\sqrt{2x+3}+1\Leftrightarrow (x+1)^2+\left(\sqrt{2x+3}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2=0 \\ \sqrt{2x+3}-1=0\end{cases}\begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{2x+3}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$$

Kết hợp với điều kiện xác định của phương trình ta được $x=-1$ là nghiệm duy nhất.

Lưu ý: Cũng để ý đến $2\sqrt{2x+3}$ ta viết phương trình về dạng

$$2x+3+2\sqrt{2x+3}-x^2-6x-8=0$$

Đặt $t=\sqrt{2x+3}\ge 0$, khi đó phương trình trên trở thành $t^2+2t-x^2-6x-8=0$.

Ta có $\Delta'=1^2+\left(x^2+6x+8\right)=(x+3)^2\ge 0$. Từ đây phương trình có hai nghiệm là $t=x+2$ và $t=-x-4$. Đến đây ta giải hoàn toàn tương tự như trên.

b. Đặt $a=2x+y-1; b=x-y+1$. Khi đó hệ phương trình viết được lại thành

$$\begin{cases} a^2+b^2=26 \\ a+b+ab=11\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+2ab-2ab=26 \\ ab=11-(a+b)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2\left[11-(a+b)\right]=26 \\ ab=11-(a+b)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2+2(a+b)-48=0 \\ ab=11-(a+b)\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=-8; ab=19 \\ a+b=6; ab=5\end{array}\right.$$

\+ Với $\begin{cases} a+b=-8 \\ ab=19\end{cases}$, hệ vô nghiệm do $(a+b)^2<4ab$.

\+ Với $\begin{cases} a+b=6 \\ ab=5\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1; b=5 \\ a=5; b=1\end{array}\right.$.

o Khi $a=1;b=5$ ta có $\begin{cases}2x+y-1=1\\ x-y+1=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}$.

o Khi $a=5;b=1$ ta có $\begin{cases}2x+y-1=5\\ x-y+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $(2;-2),(2;2)$.

Chú ý. Khi hai phương trình của hệ đều không thể phân tích được thành tích thì ta nhân một trong hai phương trình với một số k rồi cộng theo vế hai phương trình thì được một phương trình bậc hai. Ta cần tìm hằng số k để phương trình phân tích được thành tích. Chẳng hạn ta viết lại hệ phương trình như

$$\begin{cases}5x^2+2y^2+2xy-2x-4y=24\\ 3x+(2x+y-1)(x-y+1)=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2+2y^2+2xy-2x-4y-24=0\\ 2x^2-y^2-xy+4x+2y-xy-12=0\end{cases}$$

Khi đó ta thấy nếu nhân phương trình thứ hai với $k=2$ rồi cộng hai phương trình thì ta thu được phương trình $9x^2+6x-48=0$.

Câu 3.

Ta có $\Delta'=(m-1)^2+24>0$ với mọi m nên phương trình có hai nghiệm phan biệt $x_1;x_2$.

Theo hệ thức Vi – et ta có $x_1+x_1=1-m$ và $x_1.x_2=-6$.

Ta có $A=(x_1^2-9)(x_2^2-4)=x_1^2.x_2^2+36-9x_2^2-4x_1^2=(x_1x_2+6)^2-(2x_1+3x_2)^2$.

Do $x_1x_2=-6$ nên $A=-(2x_1+3x_2)^2\le 0$. Do đó giá trị nhỏ nhất của A là 0.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x_1x_2=-6\\ 2x_1+3x_2=0\\ x_1+x_2=1-m\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=3;x_2=-2;m=0\\ x_1=-3;x_2=2;m=2\end{array}\right.$.

Vậy với $m=0$ hoặc $m=-2$ thì biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4.

Ta có $a^2+b^2\ge 2ab=2$. Khi đó ta được

$$A=(a+b+1)(a^2+b^2)+\frac{4}{a+b}\ge 2(a+b+1)+\frac{4}{a+b}=2(a+b)+2+\frac{4}{a+b}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $(a+b)+\frac{4}{a+b}\ge 4$ và $a+b\ge 2\sqrt{ab}$. Do đó ta được

$$A\ge 2(a+b)+2+\frac{4}{a+b}=a+b+2+a+b+\frac{4}{a+b}\ge 2\sqrt{ab}+2+4=8$$

Vậy giá nhỏ nhất của A là 8 khi và chỉ khi $a=b=1$.

Câu 5

a) Do q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên q có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ với $k\in N^*$.

+ Nếu $q = 3k+1$, khi đó do $p = q+2$ nên $p = 3k+3$ chia hết cho 3, trường hợp này loại do p không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $q = 3k+2$, khi đó do $p = q+2$ nên $p = 3k+4$. Do p là số nguyên tố nên k phải là số tự nhiên lẻ. Khi đó ta được $p+q = 6(k+1) \vdots 12$. Vậy số dư khi chia $p+q$ cho 12 là 0.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+x-y^2=1 \Leftrightarrow 4x^2+4x-4y^2=4 \Leftrightarrow 4x^2+4x+1-4y^2=5$$
$$\Leftrightarrow (2x+1)^2-(2y)^2=5 \Leftrightarrow (2x+2y+1)(2x-2y+1)=5$$

Do x, y là các số nguyên nên ta có các trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Với $\begin{cases} 2x-2y+1=1 \\ 2x+2y+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

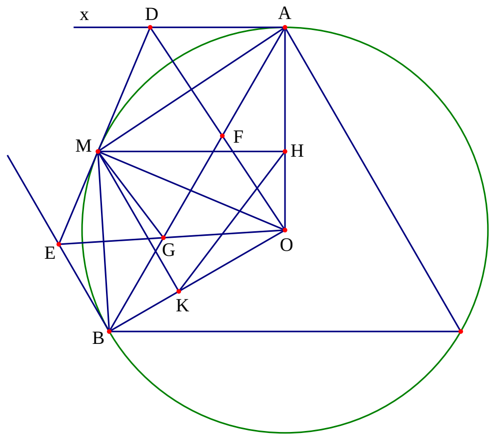
+ Trường hợp 2. Với $\begin{cases} 2x-2y+1=5 \\ 2x+2y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$.

+ Trường hợp 3. Với $\begin{cases} 2x-2y+1=-1 \\ 2x+2y+1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$.

+ Trường hợp 3. Với $\begin{cases} 2x-2y+1=-5 \\ 2x+2y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y) = (1;1), (-2;1), (1;-1), (-2;-1)$.

Câu 6.



a) Vẽ tiếp tuyến tại A với đường tròn (O). Khi đó ta có $MAx = \frac{1}{2}MOA$. Mặt khác ta lại có Ax//MH nên ta được $MAx = AMH$. Do đó $AMH = \frac{1}{2}MOA$. Tứ giác MHOK có $MKO + MHO = 180^0$ nên nội tiếp được, do đó ta được $MKH = MOH$. Từ đó suy ra $AMH = \frac{1}{2}MKH$ hay $\widehat{HKM} = 2\widehat{AMH}$.

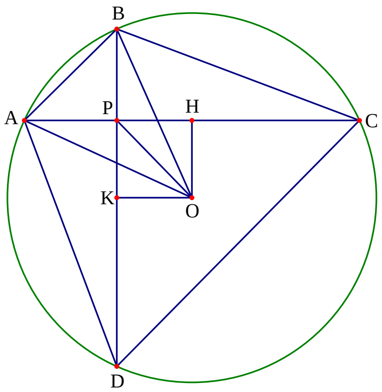
b) Dễ thấy tứ giác ADMO nội tiếp đường tròn.

Mà ta có $MAG = \frac{1}{2}sdBM$ và $MOE = BOE = \frac{1}{2}sdBM$. Do đó ta được $MAG = EOM$, mà hai góc này cùng nhìn đoạn MG, suy ra tứ giác MGOA nội tiếp đường tròn. Từ đó ta thấy năm điểm A, D, M, G, O cùng nằm trên môt đường tròn. Do đó ta được $FGO = ODA = ODM$.

Xét hai tam giác OGF và ODE có GOF chung và $FGO = ODM$ nên $\Delta OGF \backsim \Delta ODM$.

Từ đó suy ra $\frac{OG}{OD} = \frac{DE}{GF}$ hay $OD.GF = OG.DE$.

Câu 7.



Dựng OH vuông góc với AC tại H và OK vuông góc với BD lại K. Khi đó ta có $AH = \frac{1}{2}AC; BK = \frac{1}{2}BD$. Tứ giác OHKK là hình chữ nhật nên $OP = HK$ không đổi.

Áp dụng định lý Pitago ta có $AC^2 + BD^2 = (2AH)^2 + (2BK)^2 = 4(AH^2 + BK^2)$.

Lại có $AH^2 = OA^2 - OH^2; BK^2 = OB^2 - OK^2$. Do đó ta được

$$AC^2 + BD^2 = 4(OA^2 - OH^2 + OB^2 - OK^2) = 4(OA^2 + OB^2) - 4(OH^2 + OK^2) = 8R^2 - 4OP^2$$

Từ đó suy ra $S_{ABCD} \le \frac{8R^2 - 4OP^2}{4} = 2R^2 - OP^2 = 2.5^2 - 3^2 = 41(cm^2)$.

Vậy giá trị lớn nhất của S_{ABCD} là $41(cm^2)$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $AC = BD$.

Khi đó ta được $OH = OK$ hay OHPK là hình vuông, do đó ta được $OPD = 45^0$.

Đề số 35

Câu 1.

a) Từ giả thiết $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$ ta có

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) + (c^3 + d^3) + 3cd(c+d) = 3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3 + (c+d)^3 = 3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3$$

Dễ thấy $3ab(a+b)+3cd(c+d)+3c^3-15d^3$ chia hết cho 3 nên ta được $(a+b)^3+(c+d)^3$ chia hết cho 3.

Mặt khác ta lại có $(a+b)^3+(c+d)^3=(a+b+c+d)^3-3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$

Mà $3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$ chia hết cho 3 nên suy ra $(a+b+c+d)^3$ chia hết cho 3.

Do vậy $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

Chú ý: Bản chất bài toán trên chính là bài toán cơ bản: Nếu x^3+y^3 chia hết cho 3 thì $x+y$ chia hết cho 3.

b. Ta xét các trường hợp sau

+ Khi $x=2$ ta được $2^x+x^2=2^2+2^2=8$ không phải là số nguyên tố.

+ Khi $x=3$ ta được $2^x+x^2=2^3+3^2=17$ là số nguyên tố.

+ Khi $x>3$ thì x là số nguyên tố lẻ. Khi đó x^2 chia 3 có số dư là 1.

Ngoài ra do x là số nguyên tố lẻ nên ta đặt $x=2k+1\left(k\in N^*\right)$.

Từ đó ta có $2^x=2^{2k+1}=2.4^k=2(3+1)^k$ chia 3 có số dư là 2.

Như vậy 2^x+x^2 luôn chia hết cho 3. Do đó 2^x+x^2 luôn là hợp số khi $x>3$.

Vậy $x=3$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Với bài toán số học dạng này ta thường thử với một số nguyên tố nhỏ $x=2;3$. Với các số nguyên tố lớn hơn ta chứng minh không thỏa mãn.

Câu 2.

a) Điều kiện xácđịnh của phương trình là $2x^2+11x+19\ge 0; 2x^2+5x+7\ge 0$.

+ Xét $x=-2$, ta thấy thỏa mãn phương trình, do đó $x=-2$ là một nghiệm của phương trình.

+ Xét $x\ne -2$, khi đó ta có $\sqrt{2x^2+11x+19}-\sqrt{2x^2+5x+7}\ne 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{6(x+2)}{\sqrt{2x^2+11x+19}-\sqrt{2x^2+5x+7}}=3(x+2)\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+11x+19}-\sqrt{2x^2+5x+7}=2.$$

Kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ $\begin{cases}\sqrt{2x^2+11x+19}+\sqrt{2x^2+5x+7}=3(x+2)\\ \sqrt{2x^2+11x+19}-\sqrt{2x^2+5x+7}=2\end{cases}$

Từ đó ta được $2\sqrt{2x^2+11x+19}=3x+8\Leftrightarrow \begin{cases}3x+8\ge 0\\ 4\left(2x^2+11x+19\right)=(3x+8)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm là $S=\{-2;2\}$.

b) Từ $x+y+z=3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$ ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$. Khi đó ta được

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x+y+z}=0\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}+\frac{x+y}{z\left(x+y+z\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+y\right)\left(xy+zx+yz+z^2\right)=0\Leftrightarrow\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)=0$$

+ Xét trường hợp $x+y=0$, khi đó từ $x+y+z=3$ ta được $z=3$.

Cũng từ $x+y=0$ ta được $x=-y$. Thế vào $x^2+y^2+z^2=17$ ta được

$2x^2=8\Leftrightarrow x=\pm2$.

Từ đó ta được hai bộ số $\left(x;y;z\right)$ thỏa mãn là $\left(2;-2;3\right),\left(-2;2;3\right)$.

+ Giải các trường hợp $y+z=0$ và $z+x=0$ ta được các bộ số là hoán vị của hai bộ số trên.

Vậy các bộ số $\left(x;y;z\right)$ cần tìm là

$\left(2;-2;3\right),\left(-2;2;3\right),\left(2;3;-2\right),\left(-2;3;2\right),\left(3;2;-2\right),\left(3;-2;2\right)$.

Câu 3.

a. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta có

$$8x^2\left(3-4x^2\right)^2=8x^2.\left(3-4x^2\right)\left(3-4x^2\right)\le\left(\frac{8x^2+3-4x^2+3-4x^2}{3}\right)^3=8$$

Từ đó ta được $\dfrac{x^2}{\left(3-4x^2\right)^2}=\dfrac{8x^4}{8x^2\left(3-4x^2\right)^2}\ge\dfrac{8x^4}{8}=x^4$ nên $\dfrac{4x}{3-4x^2}\ge4x^2$.

Hoàn toàn tương tự ta có $\dfrac{4y}{3-4y^2}\ge4y^2;\dfrac{4z}{3-4z^2}\ge4z^2$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $P\ge4\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge4\left(xy+yz+zx\right)=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

b. Xét hiệu $\dfrac{a^{2016}}{b+c-a}-a^{2015}+\dfrac{b^{2016}}{c+a-b}-b^{2015}+\dfrac{c^{2016}}{a+b-c}-c^{2015}$ hay ta được

$$a^{2015}\left(\frac{a}{b+c-a}-1\right)+b^{2015}\left(\frac{b}{c+a-b}-1\right)+c^{2015}\left(\frac{c}{a+b-c}-1\right)$$

$$=a^{2015}\left(\frac{a-b+a-c}{b+c-a}\right)+b^{2015}\left(\frac{b-a+b-c}{c+a-b}\right)+c^{2015}\left(\frac{c-a+c-b}{a+b-c}\right)$$

$$=\frac{a^{2015}\left(a-b\right)}{b+c-a}-\frac{b^{2015}\left(a-b\right)}{c+a-b}+\frac{b^{2015}\left(b-c\right)}{c+a-b}-\frac{c^{2015}\left(b-c\right)}{a+b-c}+\frac{a^{2015}\left(a-c\right)}{b+c-a}-\frac{b^{2015}\left(a-c\right)}{a+b-c}$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c>0$.

Khi đó ta thấy $a^{2015}\ge b^{2015}\ge c^{2015}$ và $0<b+c-a\le a+c-b\le a+b-c$.

Do đó ta có $\left(a-b\right)\left(\dfrac{a^{2015}}{b+c-a}-\dfrac{b^2}{c+a-b}\right)\ge0$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có

$$\left(b-c\right)\left(\frac{b^{2015}}{c+a-b}-\frac{c^{2015}}{a+b-c}\right)\ge 0;\left(a-c\right)\left(\frac{a^{2015}}{b+c-a}-\frac{b^{2015}}{a+b-c}\right)\ge 0$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

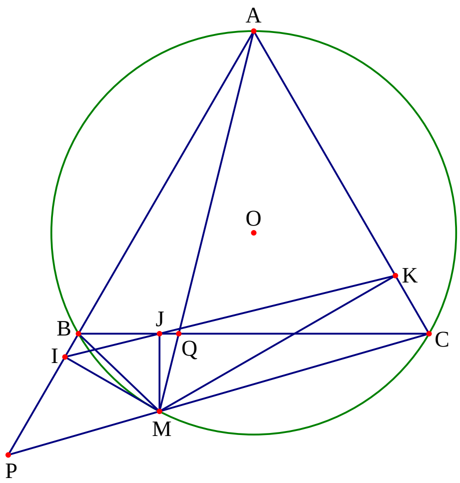
$$\frac{a^{2015}\left(a-b\right)}{b+c-a}-\frac{b^{2015}\left(a-b\right)}{c+a-b}+\frac{b^{2015}\left(b-c\right)}{c+a-b}-\frac{c^{2015}\left(b-c\right)}{a+b-c}+\frac{a^{2015}\left(a-c\right)}{b+c-a}-\frac{b^{2015}\left(a-c\right)}{a+b-c}\ge 0$$

Do đó $\frac{a^{2016}}{b+c-a}-a^{2015}+\frac{b^{2016}}{c+a-b}-b^{2015}+\frac{c^{2016}}{a+b-c}-c^{2015}\ge 0$

Từ đó suy ra $\frac{a^{2016}}{b+c-a}+\frac{b^{2016}}{c+a-b}+\frac{c^{2016}}{a+b-c}\ge a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xây ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 4.



a) Từ $CQ.AP=a^2$ ta được $CQ.AP=AC^2$ hay $\frac{CP}{AC}=\frac{AC}{AQ}$.

Xét hai tam giác ACP và CQA có $\frac{CP}{AC}=\frac{AC}{AQ}$ và $PAC=QCA=60^0$ nên

$\Delta ACP\backsim\Delta CQA$.

Từ đó ta được $ACP=AQC$. Mà ta có $ACP=ACB+BCP=60^0+BCP$

Lại có $AQC=ABC+BAM=60^0+BAM$.

Do đó ta được $MAB=BCM$, suy ra tứ giác ABMC nội tiếp đường tròn.

b) + Xác định vị trí của Q để IK có độ dài lớn nhất.

Do tứ giác ABMC và AIMI nội tiếp nên $BMC=IMK=120^0$, suy ra

$IMB=KMC$.

Mà hai tứ giác BIMJ và CKJM nội tiếp nên ta lại có $BMI=BJI;KMC=KJC$.

Do đó ta được $BJI=KJC$ nên ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Dễ thấy hai tam giác BMC và IMK đồng dạng với nhau. Do đó ta được $\frac{IK}{BC} = \frac{MI}{MB}$.

Mà ta có $IM \le MB$ nên ta được $IK \le BC$ hay $IK \le a$, dấu bằng xẩy ra khi $MB \perp AB$ hay M nằm chính giữa cung nhỏ BC, khi đó Q là trong điểm cạnh BC.

Vậy IK lớn nhất khi Q là trung điểm của BC.

+ Chứng minh $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC.

Do tứ giác BIMJ nội tiếp nên ta có $IMJ = ABC = 60^0 = ACB$. Lại có

$MIJ = MBJ = MAC$

Do đó hai tam giác IMJ và ACQ đồng dạng, do đó ta được $\frac{MJ}{MI} = \frac{CQ}{CA}$. Tương tự ta được $\frac{MJ}{MK} = \frac{BQ}{AB}$.

Từ đó suy ra $\frac{MJ}{MI} + \frac{MJ}{MK} = \frac{CQ}{CA} + \frac{BQ}{AB} = 1$ nên ta được $MJ(MI + MK) = MI.MK$.

Hay $MI.MK - MJ.MI - MJ.MK = 0$.

Mặt khác ta lại có $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.MI; S_{BCM} = \frac{1}{2}BC.MJ; S_{ACM} = \frac{1}{2}MK.AC$

Mà $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{BCM} + S_{ABC}$ và $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Nên ta có

$AB.MI + MK.AC = BC.MJ + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. hay $MI + MK = MJ + \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow MI + MK - MJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $(MI + MK - MJ)^2 = \frac{3a^2}{4}$

Suy ra $MI^2 + MJ^2 + MK^2 + 2(MI.MK - MI.MJ - MJ.MK) = \frac{3a^2}{4}$.

Mà $MI.MK - MJ.MI - MJ.MK = 0$ nên $MI^2 + MJ^2 + MK^2 = \frac{3a^2}{4}$ không đổi.

Vậy $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC.

Câu 5.

Xét hình vuông cạnh $2x2$, do hình vuông này có mỗi hình vuông nhỏ luôn chung cạnh hoặc chung đỉnh nên tồn tại nhiều nhất 1 số chẵn, nhiều nhất 1 số chia hết cho 3 do đó có ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3. Bảng $10x10$ được chia thành 25 hình vuông có cạnh $2x2$ nên có ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Từ 1 đến 0 có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là 1, 5, 7. Áp dụng nguyên lí Dirichlet ta được một trong ba số trên xuất hiện ít nhất $\left[\frac{50}{3}\right] + 1 = 17$ lần.

Đề số 36

Câu 1.

a) Ta có:

$$M=\frac{3a+3\sqrt{a}-3}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}-\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}+\frac{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}$$

$$=\frac{3a+3\sqrt{a}-3-\left(a-1\right)+\left(a-4\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}=\frac{a+3\sqrt{a}+2}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}=\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$$

b) Với $a\ge 0, a\ne 1$ ta có $M=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{a}-1}$.

Để M nhận giá trị nguyên thì $\frac{2}{\sqrt{a}-1}\in Z$ hay ta phải có $\sqrt{a}-1\in U\left(2\right)$.

Từ đó ta được $\sqrt{a}-1\in\left\{-1;1;2\right\}$ hay $a\in\left\{0;4;9\right\}$.

Thử lại các giá trị của a trên ta thấy thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy các giá trị cần tìm $a\in\left\{0;4;9\right\}$.

Câu 2.

a) Điều kiện: $x\ge 1$. Khi đó:

$$\sqrt{x-1+4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1+6\sqrt{x-1}+9}=9$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+3\right)^2}=9\Leftrightarrow\left|\sqrt{x-1}+2\right|+\left|\sqrt{x-1}+3\right|=9$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+2+\sqrt{x-1}+3=9\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=4\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x=5$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x=5$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

b. Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$\begin{cases}x^2+xy+zx=48\\y^2+xy+yz=12\\z^2+zx+yz=84\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x+y+z\right)=48\\y\left(x+y+z\right)=12\\z\left(x+y+z\right)=84\end{cases}$$

Mặt khác cộng theo vế các phương trình của hệ ta được

$\left(x+y+z\right)^2=144\Leftrightarrow x+y+z=\pm 12$.

+ Với $x+y+z=-12$, thế vào phương trình trên ta được $\left(x;y;z\right)=\left(-4;-1;-7\right)$.

+ Với $x+y+z=12$, thế vào phương trình trên ta được $\left(x;y;z\right)=\left(4;1;7\right)$.

Thử vào hệ phương trình đã cho ta được các nghiệm của hệ là $\left(x;y;z\right)=\left(4;1;7\right),\left(-4;-1;-7\right)$.

Câu 3.

a. Dễ thấy $a=\underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}...\sqrt{2}}_{2016\,t/s\,\sqrt{2}}=2^{1008}$ và $b=\underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}...\sqrt{2}}_{3016\,t/s\,\sqrt{2}}=2^{1508}$.

Ta có $a=2^{1008}=\left(2^4\right)^{252}=16^{252}=\left(...6\right)$ và $b=2^{1508}=\left(2^4\right)^{377}=16^{377}=\left(...6\right)$

Vậy a và b cùng có chữ số tận cùng là 6 hay ta có điều phải chứng minh.

b. Do $a \neq 0$ và $a \neq -1$ nên đồ thì hàm số $y = ax + a + 1$ cắt trục tung và trục hoành tại các điểm khác gốc tọa độ O. Gọi các giao điểm đó là $A\left(-\frac{a+1}{a};0\right)$ và $B(0;a+1)$.

Khi đó ta có các khoảng cách $OA = \left|-\frac{a+1}{a}\right|; OB = |a+1|$. Gọi h là khoảng cách từ O đến đồ thị của $y = ax + a + 1$.

Khi đó theo hệ thức lương trong tam giác vuông ta có
$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{BO^2} = \frac{a^2}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^2}$.

Từ đó ta được $h^2 = \frac{(a+1)^2}{a^2+1} = \frac{a^2+2a+1}{a^2+1} = 1 + \frac{2a}{a^2+1} \le 1 + \frac{2|a|}{a^2+1} \le 2$, dấu bằng xẩy ra khi $a = 1$

Từ đó suy ra $h \le \sqrt{2}$.

Vậy khoảng cách lớn nhất từ O đến đường thẳng $y = ax + a + 1$ là $\sqrt{2}$ khi $a = 1$.

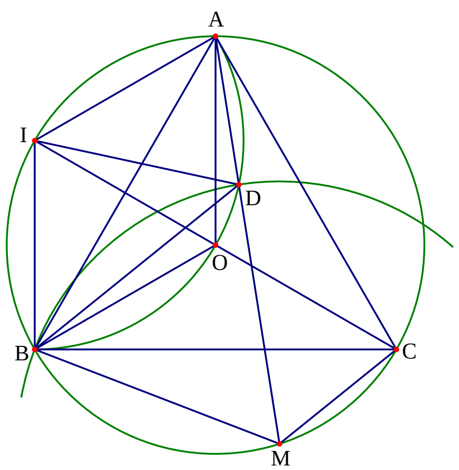
Cách khác: Ta cũng có thể tìm giá trị lớn nhất của h theo cách khác như sau

Diện tích tam giác OAB là $S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.\left|-\frac{a+1}{a}\right|.|a+1| = \frac{1}{2}.\frac{(a+1)^2}{|a|}$.

Mặt khác ta có $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{\frac{(a+1)^2}{a^2} + (a+1)^2} = \left|\frac{a+1}{a}\right|\sqrt{a^2+1}$.

Từ đó ta được $h = \frac{2S}{AB} = \frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+1}}$. Đến đây ta tìm giá trị lớn nhất của h tương tự như trên.

Câu 4.



a) Tam giác BMD có $MB = MD$, mặt khác ta lại có $BMD = BCA = 60^0$. Từ đó suy ra tam giác BMD đều.

b) Hai tam giác ABD và CBM có $AB = BC; BD = BM$ và $\widehat{ABD} = 60^0 - \widehat{DBC} = \widehat{BCM}$. Do đó ta được $\Delta ABD = \Delta CBM$, suy ra $AD = CM$.

Từ đó ta được $AM = AD + DM = CM + BM$ hay ta có điều phải chứng minh.

c) Do tam giác ADM đều nên ta có $\widehat{BDA} = 120^0$. Lại thấy $\widehat{AOB} = 120^0$. Suy ra tứ giác BDOA nội tiếp đường tròn. Do ba điểm A, O, B cố định nên đường tròn đi qua bốn điểm A, B, O, D cố định, suy ra điểm D thuộc một đường tròn cố định. Gọi I là giao điểm của tia phân giác của $\widehat{ACB}$ với đường tròn (O). Khi đó ta có các tam giác đều OIB và OIA nên suy ra $IO = IA = IB$ hay I là tâm đường tròn đi qua các điểm A, O, B, D.

Vậy D thuộc đường tròn cố định có tâm I nằm trên đường tròn (O).

Câu 5.

Từ $x+y+z=0 \Rightarrow x+y=-z \Rightarrow (x+y)^2 = z^2 \Rightarrow x^2+y^2-z^2=-2xy$.

Hoàn toàn tương tự ta được $y^2+z^2-x^2=-2yz; z^2+x^2-y^2=-2zx$.

Thay vào biểu thức P ta được $P = \frac{1}{-2xy}+\frac{1}{-2yz}+\frac{1}{-2zx} = \frac{x+y+z}{-2xyz} = 0$

Đề số 37

Câu 1.

Ta có $x = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = 1$.

Do đó ta được $P = \left(1+3x^3-x^5\right)^{2016} = \left(1+3.1^3-1^5\right)^{2016} = 1$.

Câu 2.

a) Vẽ Parabol P trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Ta có bảng các giá trị đặc biệt

x	-2	-1	1	2
$y=\frac{1}{4}x^2$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Từ đó ta vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $y=-1$.

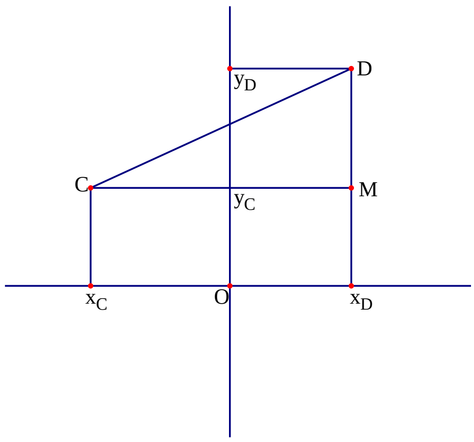
b) Gọi tọa độ điểm M là $M\left(x_M; \frac{1}{4}x_M^2\right)$ và N là hình chiếu của M trên đường thẳng $y=-1$, khi đó ta có $N(x_M;-1)$. Từ đó ta được khoảng từ M đến đường thẳng $y=-1$ là $MN = y_M+1 = \frac{1}{4}x_M^2+1$.

Do có $M\left(x_M;\frac{1}{4}x_M^2\right)$ và $A(0;1)$ nên theo công thức tính khoảng cách trên ta có

$$AM=\sqrt{\left(x_M-x_A\right)^2+\left(y_M-y_A\right)^2}=\sqrt{x_m^2+\left(\frac{1}{4}x_M^2-1\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}x_M^4+\frac{1}{2}x_M^2+1}=\frac{1}{4}x_M^2+1$$

Từ đó ta được $AM=MN$ hay độ dài đoạn AM bằng khoảng cách từ M đến đường thẳng $y=-1$.

Chú ý: Với hai điểm $C\left(x_C;y_C\right),D\left(x_D;y_D\right)$ bất kỳ trên mặt phẳng tọa độ Oxy ta có thể chứng minh công thức $CD=\sqrt{\left(x_C-x_D\right)^2+\left(y_C-y_D\right)^2}$ theo cách sau.



Giả sử tọa độ của các điểm C và D được cho như hình vẽ. Khi đó ta có $CM=\left|x_C-x_D\right|$ và $DM=\left|y_C-y_D\right|$. Do tam giác CDM vuông tại M nên ta có

$$CD=\sqrt{CM^2+DM^2}=\sqrt{\left(x_C-x_D\right)^2+\left(y_C-y_D\right)^2}$$

Câu 3. Do $x_0=2+\sqrt{5}$ là nghiệm của phương trình $x^3+bx^2+cx+1=0$ nên ta được

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^3+b\left(2+\sqrt{5}\right)^2+c\left(2+\sqrt{5}\right)+1=0$$
$$\Leftrightarrow 8+12\sqrt{5}+30+5\sqrt{5}+b\left(4+4\sqrt{5}+5\right)+c\left(2+\sqrt{5}\right)+1=0$$
$$\Leftrightarrow \left(4b+c+17\right)\sqrt{5}+\left(9b+2c+39\right)=0$$

Do $\sqrt{5}$ là số vô tỷ và b, c là số nguyên nên để đẳng thức trên xẩy ra thì ta cần phải có

$$\begin{cases}4b+c+17=0\\9b+2c+39=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8b+2c+34=0\\9b+2c+39=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-5\\c=3\end{cases}$$

Khi đó phương trình trở thành $x^3-5x^2+3x+1=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x^2-4x-1\right)=0$.

Giải các trường hợp trên ta được tập nghiệm là $S=\left\{2-\sqrt{5};1;2+\sqrt{5}\right\}$.

Câu 4. Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge 0;y\ge 0;\sqrt{x}+y-2\ge 0$.

Bình phương hai vế phương trình ta được

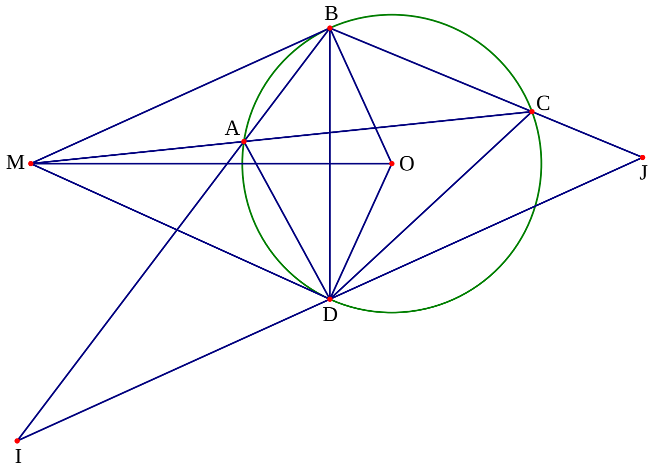
$$2\left(\sqrt{x}+y-2\right)=y\sqrt{x}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2y-4-y\sqrt{x}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{x}-4\right)-\left(y\sqrt{x}-2y\right)\Leftrightarrow\left(y-2\right)\left(2-\sqrt{x}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\\x=4\end{array}\right.$$

+ Khi $y=2$ thay vào phương trình ta được $\sqrt{2\sqrt{x}}=\sqrt{2\sqrt{x}}$, đúng với mọi $x\ge 0$.

+ Khi $x=4$ thay vào phương trình ta được $\sqrt{2y}=\sqrt{2y}$, đúng với mọi $y\ge 0$.

Vậy các cặp số thỏa mãn bài toán là $x=4;y\ge 0$ và $y=2;x\ge 0$.

Câu 5.



a) Xét hai tam giác MAB và MBC có góc BMA chung và $MBA = MCB$

Do đó ta được $\Delta MAB \backsim \Delta MBC$.

b) Từ $\Delta MAB \backsim \Delta MBC$ ta được $\frac{AB}{BC} = \frac{MB}{MC}$.

Xét hai tam giác MAD và MDC có AMD chung và $MDA = ACD$ nên $\Delta MAD \backsim \Delta MDC$

Do đó ta được $\frac{AD}{DC} = \frac{MD}{MC} = \frac{MB}{MC}$. Từ đó ta được $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ hay $AB.CD = BC.AD$

c) Do IJ song song với AM nên ta có $ADB = MBA = AID$ và $ABD = BDJ$.

Xét hai tam giác IBD và DBA có ABD chung và $AID = ADB$ nên $\Delta IBD \backsim \Delta DBA$.

Từ đó suy ra $\frac{BD}{AB} = \frac{ID}{AD}$ hay $\frac{AD}{AB} = \frac{ID}{BC}$.

Xét hai tam giác JBD và DBC có DBC chung và $ABD = BDJ$ nên $\Delta JBD \backsim \Delta DBC$.

Từ đó ta lại có $\frac{BD}{BC} = \frac{JD}{CD} \Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{JD}{BD}$.

Mà ta đã có $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ hay $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC}$ nên ta có $\frac{ID}{BD} = \frac{JD}{BD}$. Từ đó suy ra $DI = DJ$.

Đề số 38

Câu 1. Từ giả thiết $ab = a - b$ ta được $(ab)^2 = (a-b)^2$. Ta có

$$A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2 + b^2 - (ab)^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{ab} = \frac{2ab}{ab} = 2$$

Câu 2. Điều kiện: $\begin{cases} 5x - 1 \ge 0 \\ x + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{5}$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{5x-1} \\ b = \sqrt{x+2} \end{cases} (a \ge 0; b \ge 0) \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 5x - 1 \\ b^2 = x + 2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 4x - 3$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{5}\Leftrightarrow (a-b)(a+b-5)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\ a+b=5\end{array}\right..$$

+ Với $a=b$ ta được $\sqrt{5x-1}=\sqrt{x+2}\Leftrightarrow \begin{cases}5x-1\ge 0\\ 5x-1=x+2\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$.

+ Với $a+b=5$ ta được $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+2}=5$. Bình phương hai vế của phương trình ta được

$$\sqrt{(5x-1)(x+2)}=12-3x\Leftrightarrow \begin{cases}12-3x\ge 0\\ (5x-1)(x+2)=(12-3x)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 4\\ 4x^2-81x+146=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 4\\ (x-2)(4x-73)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{3}{4};2\right\}$.

Câu 3.

Vì $x_1;x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2+ax+b=0$ nên theo định lý Vi – et ta có các hệ thức $x_1+x_2=-a;x_1.x_2=b$. Đặt $X_1=x_1^2-\frac{1}{2}$ và $X_2=x_2^2-\frac{1}{2}$. Từ đó ta được

$$\begin{cases}X_1+X_2=x_1^2-\frac{1}{2}+x_2^2-\frac{1}{2}\\ X_1.X_2=\left(x_1^2-\frac{1}{2}\right)\left(x_2^2-\frac{1}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}X_1+X_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-1\\ X_1.X_2=(x_1x_2)^2-\frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x\right]+\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}X_1+X_2=(-a)^2-2b-1\\ X_1.X_2=(b)^2-\frac{1}{2}\left[(-a)^2-2b\right]+\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}X_1+X_2=a^2-2b-1\\ X_1.X_2=b^2-\frac{1}{2}a^2+b+\frac{1}{4}\end{cases}$$

Mà theo bài ra thì $X_1;X_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+\left(a^2-\frac{1}{2}\right)x+b^2-\frac{1}{2}=0$.

Nên theo định lý Vi – ét ta có $X_1+X_2=\frac{1}{2}-a^2;X_1.X_2=b^2-\frac{1}{2}$. Kết hợp hai kết quả ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2-2b-1=\frac{1}{2}-a^2\\ b^2-\frac{1}{2}a^2+b+\frac{1}{4}=b^2-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}4a^2-4b=3\\ -2a^2+4b=-3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2a^2=0\\ -2a^2+4b=-3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ b=-\frac{3}{4}\end{cases}$$

Vậy cặp số cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(a;b)=\left(0;-\frac{3}{4}\right)$.

Câu 4.

a. Sử dụng phép biến đổi tương đương ta có

$$x^2+y^2+\left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2\ge 2\Leftrightarrow (x+y)^2-2xy+\left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2-2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2+\left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2-2(1+xy)\ge 0\Leftrightarrow (x+y)^2+\left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2-2.\frac{1+xy}{x+y}(x+y)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y-\frac{1+xy}{x+y}\right)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $(x+y)^2=1+xy\Leftrightarrow x^2+y^2+xy=1$.

Cách khác: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta được

$$(x+y)^2+\left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2\ge 2\sqrt{(x+y)^2.\left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2}=2|1+xy|\ge 2(1+xy)$$

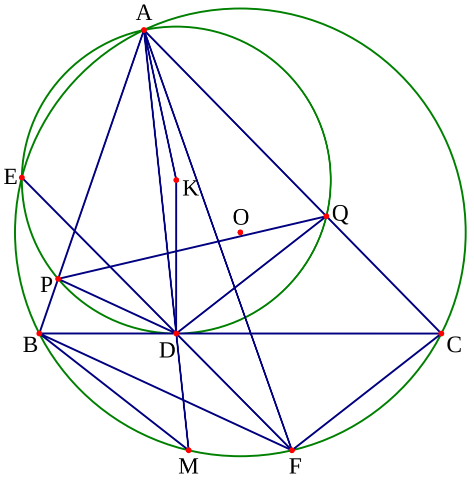
Từ đó ta được $x^2+y^2+2xy+\left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2\ge 2+2xy$ hay $x^2+y^2+\left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2\ge 2$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b. Đây là bài toán hình học tổ hợp áp dụng nguyên lý Dirichlet. Chú ý bài toán cho 5 điểm bất kỳ và yêu cầu chứng minh tồn tại hai điểm có khoảng cách không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên ta sẽ chia hình vuông thành bốn phần sao cho khoảng cách xa nhất của hai điểm trong một phần không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Bài toán cho hình vuông có cạnh bằng 1, như vậy khi chia hình vuông thành bốn ô vuông cạnh $\frac{1}{2}$ thì độ dài đường chéo là $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Điều này có nghĩa là ta tìm được lời giải cho bài toán.

Chia hình vuông có cạnh bằng 1 thành bốn hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{2}$, khi đó đường chéo mỗi hình vuông đó là $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vì có 5 điểm bất kỳ nên theo nguyên lý Dirichlet thì luôn tồn tại hai điểm cùng nằm trong một hình vuông cạnh $\frac{1}{2}$. Do đó khoảng cách giữa hai điểm đó không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 5.



a) Do tứ giác EACF nội tiếp đường tròn nên ta được $EAC + EFC = 180^0$. Lại có tứ giác EAQD nội tiếp đường tròn nên ta được $EAC + EDQ = 180^0$. Từ đó ta được $EFC = EDQ$, suy ra DQ và FC song song với nhau. Do đó ta lại có $BCF = QDC$.

Mặt khác ta lại có $QDC = CAD$ và $FAB = BCF$. Do đó ta được $CAD = FAB$.

b) Gọi M là giao điểm khác A của AD với đường tròn (O).

Ta có $CAD = FAB$ nên ta được $CAF + MAF = BAM + MAF$ nên $CAF = BAM$.

Từ đó ta được $CF = BM$ nên $CF = BM$.

Xét hai tam giác PQD và CBF có $QDP = BFC$ (cùng bù với góc BAC) và $QPD = BCF = QDC$ nên suy ra $\Delta PQD \backsim \Delta CBF$, do đó ta được $\frac{PQ}{BC} = \frac{PD}{CF}$. Từ đó ta được $\frac{PQ}{BC} = \frac{PD.DQ}{CF.DQ}$.

Xét hai tam giác BDM và QDC có $QDB = BFC$ và $DBM = QCD = CAM$.

Do đó ta có $\Delta DBM \backsim \Delta QDC$ nên suy ra $\frac{BD}{DQ} = \frac{BM}{CD}$ hay $BD.DC = BM.QD$.

Mà $CF = BM$ nên ta được $BD.DC = CF.QD$

Kết hợp với $\frac{PQ}{BC} = \frac{PD.DQ}{CF.DQ}$ ta được $\frac{PQ}{BC} = \frac{DP.DQ}{DB.DC}$. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 6 (3.0 điểm).

a) Thời gian xả nước là $3.24.60.60 = 259200\,(s)$

Do đó lượng nước hồ Dầu Tiến xả trong 3 ngày là $30.259200 = 7776000\,(m^3)$

b) 20% lượng nước hiện có là $850000000.20\% = 170000000\,(m^3)$.

Lượng nước xả ra trong một ngày là $30.24.60.60 = 2592000\,(m^3)$

Thời gian hoàn thành công việc này là $170000000 : 2592000 \approx 66$ (ngày)

Vậy thời gian xả là 66 ngày.

c) Từ ngày 22 tháng 3 đến 15 tháng 5 có $10+30+15=55$(ngày)

Lượng nước mà hồ xả ra trong 55 ngày là $55.2592000=142560000\left(\mathrm{m}^3\right)$

Đề số 39

Câu 1.

$$x=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}+1}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-1\right)^3}}{\sqrt{3}+1}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}}=\frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Thay $x=\sqrt{2}$ vào A ta có

$$A=\left(x^4+x^3-x^2-2x-1\right)^{2019}=\left(4+2\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}-1\right)^{2019}=1^{2019}=1$$

Câu 2.

1. Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2=mx+1\Leftrightarrow x^2-mx-1=0$

Ta có $\Delta=m^2+4$ (vì $m^2+4>0$) nên đồ thị hàm số (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt)

Theo hệ thức Viète ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1\cdot x_2=-1\end{cases}$

Gọi A (x_1; y_1) và B (x_2; y_2) là giao điểm của (P) và (d) ta có:

$$AB=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow\left(x_1-x_2\right)^2+\left(x_1^2-x_2^2\right)^2=10$$

$$\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)^2\cdot\left(x_1-x_2\right)^2=10$$

$$\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)^2\cdot\left[\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right]=10$$

$$\Rightarrow m^2+4+m^2\cdot\left(m^2+4\right)=10$$

$$\Leftrightarrow m^4+5m^2-6=0$$

$$\Leftrightarrow m^4-m^2+6m^2-6=0$$

$$\Leftrightarrow\left(m^2-1\right)\cdot\left(m^2+6\right)=0$$

$$\Leftrightarrow m^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow m=\pm1$$

2. Ta có

$$5x^2+6xy+2y^2+2x+2y-40=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy+2x+2y+1+4x^2+4xy+y^2=41$$
$$\Leftrightarrow (x+y+1)^2+(2x+y)^2=41$$
$$\Leftrightarrow (x+y+1)^2+(2x+y)^2=4^2+5^2$$

TH1: $\begin{cases} x+y+1=4 \\ 2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ TH2: $\begin{cases} x+y+1=5 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ (loại)

Vậy các nghiệm nguyên dương của phương trình là (2; 1).

Câu 3.

1. ĐK: $5-x^2>0 \Rightarrow -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$

Ta có: $\dfrac{x^3}{\sqrt{5-x^2}}+8x^2=40$

$$\Leftrightarrow x^3+8x^2\cdot\sqrt{5-x^2}=40\cdot\sqrt{5-x^2}$$
$$\Leftrightarrow x^3+8\cdot\sqrt{5-x^2}\cdot\left(x^2-5\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x^3-\left(2\cdot\sqrt{5-x^2}\right)^3=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-2\cdot\sqrt{5-x^2}\right)\cdot\left(x^2+2x\cdot\sqrt{5-x^2}+20-4x^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-2\cdot\sqrt{5-x^2}\right)\cdot\left(2x\cdot\sqrt{5-x^2}-3x^2-20\right)=0$$

TH1: $x-2\cdot\sqrt{5-x^2}=0$ ĐK: $x>0$

$$\Leftrightarrow x^2=4\cdot\left(5-x^2\right)$$
$$\Leftrightarrow 5x^2=20$$
$$\Leftrightarrow x=\pm 2$$
$$\Leftrightarrow x=2$$

TH2: $2x\cdot\sqrt{5-x^2}-3x^2-20=0$

$$\Leftrightarrow 2x\cdot\sqrt{5-x^2}=3x^2+20$$
$$\Leftrightarrow 4x^2\cdot\left(5-x^2\right)=9x^4+120x^2+400$$
$$\Leftrightarrow 13x^4+100x^2+400=0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là x = 2.

2. Ta có: $\begin{cases} x^3-y^3-15y-14=3\cdot\left(2y^2-x\right) & (1) \\ 4x^3+6xy+15x+3=0 & (2) \end{cases}$

Ở phương trình (1) ta có:

$$x^3-y^3-15y-14=3\cdot\left(2y^2-x\right)$$
$$\Leftrightarrow x^3+3x=y^3+15y+6y^2+14$$
$$\Leftrightarrow x^3+3x=y^3+6y^2+12y+8+3y+6$$
$$\Leftrightarrow x^2+3x=(y+2)^3+3\cdot(y+2)$$
$$\Leftrightarrow x=y+2 \text{ (*)}$$

Từ (2) và (*) ta có hệ phương trình:

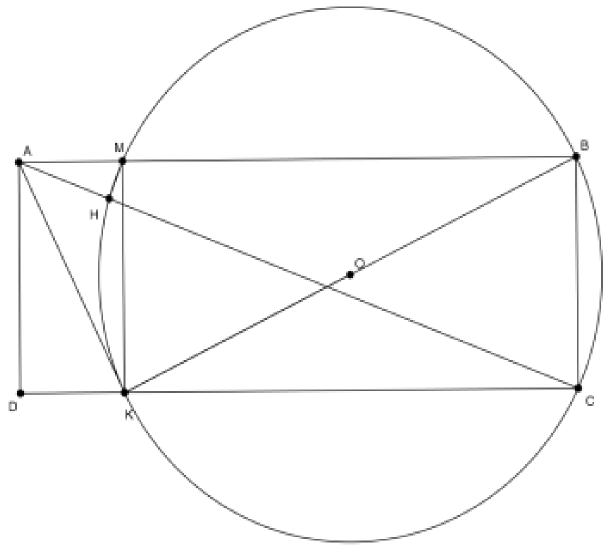
$$\begin{cases} x = y+2 \\ 4x^3+6xy+15x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=y \\ 4x^3+6x\cdot(x-2)+15x+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=y \\ 4x^3+6x^2+3x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=y \\ 8x^3+12x^2+6x+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)^3=-5 \\ x-2=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt[3]{5}}{2} \\ y=\dfrac{-5-\sqrt[3]{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(\dfrac{-1-\sqrt[3]{5}}{2};\dfrac{-5-\sqrt[3]{5}}{2}\right)$

Câu 4.



1. Xét tứ giác MHCB ta có $MHC = MBC = 90°$

   ⇨ $MHC + MBC = 180°$

   ⇨ Tứ giác MHCB nội tiếp đường tròn đường kính MC (1).

   Xét tứ giác MKCB ta có $MKC = MBC = 90°$

   ⇨ $MKC + MBC = 90°$

   ⇨ Tứ giác MKCB nội tiếp đường tròn đường kính MC (2).

   Từ (1) và (2) suy ra năm điểm B, C, K, H, M cùng thuộc một đường tròn đường kính MC.

   ⇨ Tâm O là trung điểm MC.

2. Xét ΔABC và ΔAHM có

   $MHM = MBC = 90°$ và CAB chung

   ⇨ ΔABC đồng dạng ΔAHM .

⇨ $\dfrac{AB}{AH}=\dfrac{BC}{MH}$ mà MK = BC

⇨ $\dfrac{AB}{AH}=\dfrac{MK}{MH}\Rightarrow AB=\dfrac{AH\cdot MK}{MH}$ mà $AB=5a$

⇨ $\dfrac{AH\cdot MK}{MH}=5a$

3. Giả sử AK là tiếp tuyến của (O). Dễ dàng ta có tứ giác MKCB là hình chữ nhật nên O sẽ nằm trên đoạn BK.

   Xét ΔABK vuông tại K đường cao KM ta có

   $AM\cdot MB=MK^2$

   $\Rightarrow AM\cdot(AB-AM)=AD^2$

   $\Leftrightarrow AM\cdot 5a-AM^2=4a^2$

   $\Leftrightarrow AM^2-5a\cdot AM+4a^2=0$

   $\Leftrightarrow AM^2-4a\cdot AM-a\cdot AM+4a^2=0$

   $\Leftrightarrow AM\cdot(AM-4a)-a\cdot(AM-4a)=0$

   $\Leftrightarrow (AM-a)\cdot(AM-4a)=0$

   $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AM=a\\ AM=4a\end{array}\right.$

   Vậy AM= 4a hoặc AM = a.

Câu 5.

Áp dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$ab+ac+bc\geq\sqrt{(a^2+b^2+c^2)\cdot(b^2+a^2+c^2)}$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq 3$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2\cdot(ab+ac+bc)\geq 3+2\cdot 3$

$\Rightarrow (a+b+c)^2\geq 9$

$\Rightarrow a+b+c\geq 3$

$$T=\frac{19a+3}{1+b^2}+\frac{19b+3}{1+c^2}+\frac{19c+3}{1+a^2}=16\cdot\left(\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\right)+3\left(\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\right)$$

Đặt $A=\dfrac{a}{1+b^2}+\dfrac{b}{1+c^2}+\dfrac{c}{1+a^2}$ và $B=\dfrac{a+1}{1+b^2}+\dfrac{b+1}{1+c^2}+\dfrac{c+1}{1+a^2}$

Ta lại có:

a) $a+b+c-A=a+b+c-\left(\dfrac{a}{1+b^2}+\dfrac{b}{1+c^2}+\dfrac{c}{1+a^2}\right)=\dfrac{ab^2}{1+b^2}+\dfrac{bc^2}{1+c^2}+\dfrac{ca^2}{1+a^2}\leq\dfrac{ab}{2}+\dfrac{bc}{2}+\dfrac{ac}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow A\geq a+b+c-\dfrac{3}{2}$ (*)

b) $a+b+c+3-B=a+b+c+3-\left(\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\right)$

$$=\frac{a+ab^2-a-1+1+b^2}{1+b^2}+\frac{b+bc^2-b-1+1+c^2}{1+c^2}+\frac{c+a^2c-c-1+1+a^2}{1+a^2}$$

$$=\frac{ab^2+b^2}{1+b^2}+\frac{bc^2+c^2}{1+c^2}+\frac{a^2c+a^2}{1+a^2}\le\frac{3}{2}+\frac{a+b+c}{2}$$

$$\Rightarrow B\ge a+b+c+3-\frac{3}{2}-\frac{a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow B\ge\frac{a+b+c}{2}+\frac{3}{2}\quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có:

$$16A+3B\ge 16\cdot\left(a+b+c-\frac{3}{2}\right)+3\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}+\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow T\ge\frac{35}{2}\cdot(a+b+c)-\frac{39}{2}\ge 33$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 33.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Đề số 40

Câu 1.

a) Ta có $a^2+a=2b^2+b\Rightarrow a^2+a-b^2-b=b^2\Rightarrow(a-b)(a+b+1)=b^2\quad(1)$

Mặt khác gọi d là ƯCLN$(a-b;a+b+1)\Rightarrow\begin{cases}a+b+1\,\vdots\, d\\ a-b\,\vdots\, d\\ b^2\,\vdots\, d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b\,\vdots\, d\\ a\,\vdots\, d\end{cases}\Rightarrow 1\,\vdots\, d\Rightarrow d=1$

$\Rightarrow a=b$ và $a+b+1$là hai số nguyên tố cùng nhau (2)

Từ (1) (2) $\Rightarrow a-b$ và $a+b+1$ đều là các số chính phương

b) Giả sử $2015=a_1+a_2+...+a_n$, trong đó $a_1;a_2;...;a_n$ là các hợp số

Theo bài ra ta có

+ Mỗi số hạng $a_1;a_2;...;a_n$ không thể viết thành tổng hai hợp số (1)

+ Tổng hai hợp số bất kì không thể viết thành tổng 3 hợp số (2)

Do 2015 là số lẻ nên tồn tại ít nhất một hợp số lẻ, hợp số đó phải bằng 9 vì 1;3;5;7;11;13 không phải là hợp số.

Nếu có hợp số lẻ $a_1\ge 15\Rightarrow a_1=9-(a_1-9)$ với $(a_1-9)\ge 6$là số chẵn nên a_1bằng tổng hai hợp số- trái với (1)

Mặt khác không có quá một hợp số bằng 9 vì nếu có hai hợp số bằng 9 thì 9+9=6+6+6 trái với (2)

Do đó: $2015=9+a_2+a_3+...+a_n$ với $a_2;a_3;..;a_n$ là các hợp số chẵn

$\Rightarrow a_2+a_3+...+a_n=2006\quad(3)$

$\Rightarrow$ các hợp số phải nhận các giá trị 4 hoặc 6.

Vì nếu a_2 là hợp số chẵn và $a_2 \geq 8 \Rightarrow a_2 = 4-(a_2-4)$ là tổng hai hợp số, trái với (1)

Số hợp số bằng 6 chỉ có thể là một vì nếu có hai hợp số bằng 6 thì 6+6=4+4+4

Giả sử $a_2 = 6 \Rightarrow a_3 = a_4 = ...a_n = 4 \Rightarrow (n-2).4 = 2000 \Rightarrow n = 502$

Vậy số tự nhiên cần tìm là $n = 502$

Câu 2.

a) ĐKXĐ: $x \geq \frac{1}{3}$

Đặt $a = \sqrt{6x-1}; b = \sqrt{9x^2-1}$ điều kiện $a; b \geq 0$

$$\sqrt{6x-1} + \sqrt{9x^2-1} = 6x - 9x^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = a + b \Rightarrow (a+b)(a-b-1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b-1=0 \end{array}\right.$$

Với $a+b=0 \Rightarrow a=-b$ (loại)

Với $a-b-1=0 \Rightarrow \sqrt{6x-1} - \sqrt{9x^2-1} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{6x-1} = \sqrt{9x^2-1} + 1$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^2 + 2\sqrt{9x^2-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \\ 9x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(tm)$$

b) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=2 \\ x^3+y^3=2x+4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-xy=2-2xy \\ (x+y)(x^2+y^2-xy)=2x+4y \end{cases} \Rightarrow (x+y)(2-2xy) = 2x+4y$

$$\Leftrightarrow x^2y + xy^2 + y = 0 \Leftrightarrow y(x^2+xy+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2+xy+1=0 \end{cases}$$

Với $y=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Với $x^2+xy+1=0 \Rightarrow x^2+xy=-1 \Rightarrow y^2=\sqrt{3} \Rightarrow y=\pm\sqrt{3} \Rightarrow x^2 \pm \sqrt{3}x + 1 = 0$ phương trình vô nghiệm

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y) = (\sqrt{2};0);(-\sqrt{2};0)$

Câu 3.

Ta có $a+2b+3 = (a+b)+(b+1)+2 \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{b} + 2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{a+2b+3} \leq \frac{1}{2(\sqrt{ab}+\sqrt{b}+1)}$

Tương tự: $\frac{1}{b+2c+3} \leq \frac{1}{2(\sqrt{bc}+\sqrt{c}+1)}; \frac{1}{c+2a+3} \leq \frac{1}{2(\sqrt{ca}+\sqrt{a}+1)}$

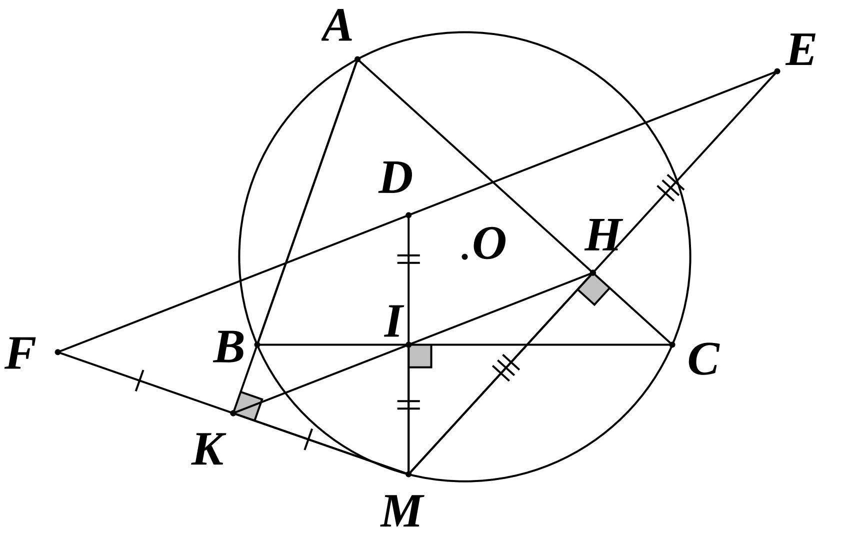
Suy ra $P \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{b}+1} + \frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{c}+1} + \frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{a}+1}\right]$

Mặt khác $abc=1 \Rightarrow \sqrt{abc}=1 \Rightarrow P \leq \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{c}}{1+\sqrt{bc}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{c}+1} + \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{bc}+\sqrt{c}+1}\right] = \frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy Max $P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a=b=c=1$

Câu 4.



a) Gọi I, H, K lần lượt là giao điểm của MD, ME, MF của BC, CA, BA

Khi đó các tứ giác $MIBK$, $MCHI$, $ABMC$ là các tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow HIM + HCM = 180^0$

Mà $KIM = MBK = ACM \Rightarrow KIM + MIH = 180^0 \Rightarrow$ ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Mặt khác trong các tam giác MEF, MDF có KH,KI là các đường trung bình

$\Rightarrow KH // EF; KI // FD \Rightarrow$ ba điểm $F; D; E$

b) Ta có

$$MAK = MCI \Rightarrow \cot MAK = \cot MCI \Rightarrow \frac{AK}{MK} = \frac{CI}{MI} \Rightarrow \frac{AB + BK}{MK} = \frac{CI}{MI} \Rightarrow \frac{AB}{MK} + \frac{BK}{MK} = \frac{CI}{MI} \quad (1)$$

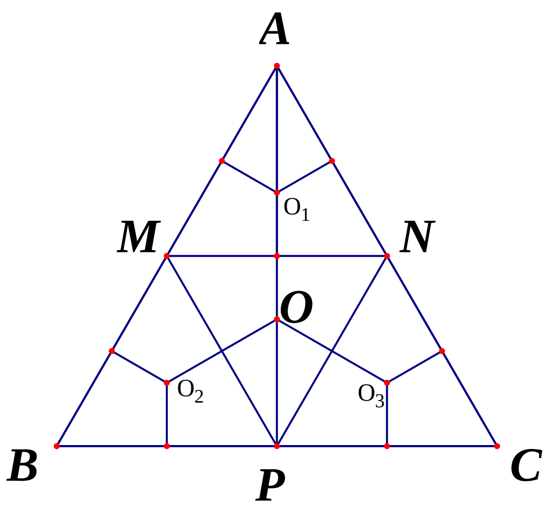
Tương tự $\dfrac{AH}{MH} = \dfrac{BI}{MI} \Rightarrow \dfrac{AC - CH}{MH} = \dfrac{BI}{MI} \Rightarrow \dfrac{AC}{MH} - \dfrac{CH}{MH} = \dfrac{CI}{MI} \quad (2)$

Mặt khác $BMK = BIK = CIH = HMC \Rightarrow \tan BMK = \tan CMH \Rightarrow \dfrac{BK}{MK} = \dfrac{CH}{MH} \quad (3)$

Từ (1);(2);(3) ta có: $\dfrac{AB}{MK} + \dfrac{AC}{MH} = \dfrac{BC}{MI} \Rightarrow \dfrac{AB}{2MK} + \dfrac{AC}{2MH} = \dfrac{BC}{2MI} \Rightarrow \dfrac{AB}{MF} + \dfrac{AC}{ME} = \dfrac{BC}{MD}$

(đpcm)

Câu 5.



Giả sử tam giác ABC đều cạnh bằng 6cm. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC

Suy ra MN, MP, NP chia tam giác ABC thành bốn tam giác đều bằng nhau.

Gọi O, O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các tam giác đều MNP, AMN, BMN, CMN.

Từ O, O_1, O_2, O_3 vẽ các đoạn thẳng vuông góc đến các cạnh của tam giác đều MNP, AMN, BMN, CMN.

Khi đó ABC được chia thành 12 tứ giác bằng nhau và mỗi tứ giác đều nội tiếp đường tròn có đường kính bằng nhau và bằng O_1A

Mà $O_1A = \frac{1}{3}AP = \frac{1}{3}.\frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}(cm)$

Mặt khác có 121 điểm thuộc 12 tứ giác trên nên theo nguyên lý Dirichle có một tứ giác chứa ít nhất là 11 điểm (đpcm)

Đề số 41

Câu 1.

a) Ta có:

$x^2 + y^2 - xy = x + y + 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 2 = 6$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 6$

PT có 6 nghiệm $(x; y) \in \{(2;0);(3;2);(-1;0)\}$ và 3 hoán vị

b) Đặt a + b - c = z; b + c - a = x; a + c - b = y thì x + y + z = a + b + c

Ta có $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(x+z) = 3.2c.2a.2b = 24abc$

Do 3 số a, b, c có 2 số chẵn nên abc chia hết cho 4 do đó 24abc chia hết cho 24.4 = 96

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 2.

a) Ta có:

$$1+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)^2=1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{2}{n(n+2)}=1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{4}{n(n+2)}-\frac{2}{n(n+2)}$$

$$1+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)^2=1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{2}{n}-\frac{2}{n+2}-\frac{2}{n(n+2)}=\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)^2$$

Nên $\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)^2}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$

b) $S=1+1-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+.....+1+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2016}=2015+\frac{1}{2}-\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}$

Câu 3.

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} x(2x-1)\ge 0 \\ x(2-x)\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \frac{1}{2}\le x\le 2 \end{array}\right.$

$$\sqrt{2x^2-x}=2x-x^2 \Leftrightarrow 2x^2-x-x\sqrt{2x^2-x}+(1+x)\sqrt{2x^2-x}-x(1+x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2-x}-x\right)\left(\sqrt{2x^2-x}+1+x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2-x}=x \\ \sqrt{2x^2-x}=-(x+1) \end{array}\right.$$

Giải ra x = 1 hoặc x = 1

b) $\begin{cases} (x^2-1)y+(y^2-1)x=2(xy-1);(1) \\ 4x^2+y^2+2x-y-6=0;(2) \end{cases}$

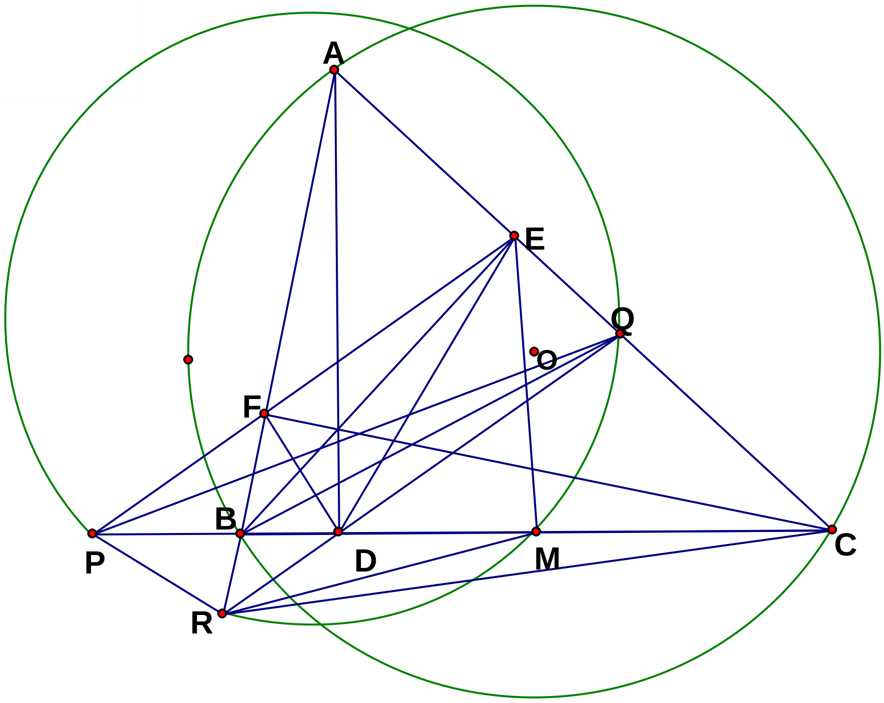
từ PT (1) ta có : $x^2y+xy^2-(x+y)-2(xy-1)=0 \Leftrightarrow (x+y)(xy-1)-2(xy-1)=0$

$$\Leftrightarrow (x+y-2)(xy-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2-x \\ xy=1 \end{array}\right.$$

thay vào PT (2) giải ra có 5 nghiệm

$$(xy)\in\left\{(1;1);(-0,5;2);\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2};\sqrt{3}+1\right);\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2};1-\sqrt{3}\right);\left(\frac{-4}{5};\frac{14}{5}\right)\right\}$$

Câu 4.



a) Do tứ giác BCEF nội tiếp suy ra $\angle AFE = \angle BCQ$ mà $\angle AFE = \angle BRQ$ (so le)

Suy ra $\angle BCQ = \angle BRQ$ nên tứ giác BQCR nội tiếp

b) EM là trung tuyến tam giác vuông BEC nên tam giác ECM cân tại M suy ra $\angle EMD = 2\angle ACB$ mà tứ giác BCEF; ACDF nội tiếp nên $\angle ACB = \angle AFE = \angle BFD$ suy ra

$\angle EMD = 2\angle ACB = \angle AFE + \angle BFD \Rightarrow \angle EMD + \angle DFE = 180^0$ suy ra tứ giác DMEF nội tiếp suy ra $\angle BDF = \angle PEM$ mà $\angle BDF = \angle BAC = \angle MDE$ nên tam giác EPM,và DEM đồng dạng (g.g)

c)do DMEF nội tiếp suy ra $\angle PFD = \angle EMD$ mà $\angle PDF = \angle EDM$ nên tam giác PFD đồng dạng tam giác EMD (g.g) suy ra $\frac{PD}{DF} = \frac{ED}{MD}$; do $\angle RED = \angle AEF = \angle FRD$ nên tam giác FDR cân tại D suy ra FD=DR;tương tự tam giác DEQ cân tại D nên DE=DQ

mà FD=DR; DE=DQ suy ra $\frac{PD}{DR} = \frac{DQ}{MD}$;

suy ra tam giác PDR đồng dang tam giác QDM (c.g.c) suy ra $\angle PRQ = \angle PMQ$ suy ra tứ giác PRMQ nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR đi qua điểm M cố định

Câu 5.

$$A = \frac{x}{\sqrt[3]{yz}} + \frac{y}{\sqrt[3]{xz}} + \frac{z}{\sqrt[3]{xy}} = \frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{y\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{z\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Ta có $3 = x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \Leftrightarrow xyz \leq 1$

Nên $A \geq x\sqrt[3]{x} + y\sqrt[3]{y} + z\sqrt[3]{z}$

Áp dụng BĐT Bunhia cho 2 dãy dãy 1 : $\sqrt[3]{x^2}; \sqrt[3]{y^2}; \sqrt[3]{z^2}$

Dãy 2 : $\sqrt[3]{x};\sqrt[3]{y};\sqrt[3]{z}$

$$\left(x\sqrt[3]{x}+y\sqrt[3]{y}+z\sqrt[3]{z}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}\right)\geq (x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+xz)(*)$$

Ấp dụng Côsi $\sqrt[3]{x^2.1.1}\leq \frac{x^2+1+1}{3};\sqrt[3]{y^2.1.1}\leq \frac{y^2+1+1}{3};\sqrt[3]{z^2.1.1}\leq \frac{z^2+1+1}{3}$

Nên $\sqrt[3]{x^2}.+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}\leq \frac{x^2+y^2+z^2+6}{3}=3$

Thay Vào (*) Ta có

$A\geq x\sqrt[3]{x}+y\sqrt[3]{y}+z\sqrt[3]{z}\geq xy+yz+xz$

Hay $\frac{x}{\sqrt[3]{yz}}+\frac{y}{\sqrt[3]{xz}}+\frac{z}{\sqrt[3]{xy}}\geq xy+yz+xz$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x^2=y^2=z^2=1 \\ \sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z} \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$

Cách khác :

$\sqrt[3]{yz.1}\leq \frac{y+z+1}{3};\sqrt[3]{xz.1}\leq \frac{x+z+1}{3};\sqrt[3]{yx.1}\leq \frac{y+x+1}{3}$

Nên

$$A=\frac{x}{\sqrt[3]{yz}}+\frac{y}{\sqrt[3]{xz}}+\frac{z}{\sqrt[3]{xy}}\geq 3\left(\frac{x}{y+z+1}+\frac{y}{x+z+1}+\frac{z}{y+x+1}\right)$$

$$=3\left(\frac{x^2}{xy+xz+x}+\frac{y^2}{xy+yz+y}+\frac{z^2}{yz+xz+z}\right)=B$$

$$B\geq \frac{3(x+y+z)^2}{2(xy+yz+xz)+x+y+z}\geq \frac{3(x+y+z)^2}{2(xy+yz+xz)+x^2+y^2+z^2}=\frac{3(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2}=3\geq xy+yz+xz$$

do : $(x+y+z)^2\leq 3(x^2+y^2+z^2)=9\Rightarrow x+y+z\leq 3=x^2+y^2+z^2;$

$xy+yz+xz\leq x^2+y^2+z^2=3$

Đề số 42

Câu 1.

1) Điều kiện: $x\geq 0;x\neq \frac{1}{4};x\neq 1$

Đặt $\sqrt{x}=a;a\geq 0\Rightarrow x=a^2$, ta có:

$$A=\left(\frac{2a^2-1+a}{1-a^2}+\frac{2a^3+a^2-a}{1+a^3}\right).\frac{\left(a^2-a\right)\left(1-a\right)}{2a-1}-1$$

$$A=\left[\frac{(a+1)(2a-1)}{(1-a)(a+1)}+\frac{a(a+1)(2a-1)}{(a+1)\left(a^2-a+1\right)}\right].\frac{a(a-1)(1-a)}{2a-1}-1$$

$$A=\left[\frac{(2a-1)}{(1-a)}+\frac{a(2a-1)}{(a^2-a+1)}\right].\frac{a(a-1)(1-a)}{2a-1}-1$$

$$A=\left[\frac{1}{(1-a)}+\frac{a}{(a^2-a+1)}\right].(2a-1).\frac{a(a-1)(1-a)}{2a-1}-1$$

$A=\dfrac{-1}{a^2-a+1}$. Vậy: $A=\dfrac{-1}{x-\sqrt{x}+1}$.

2) Ta có:

$$A=\frac{-1}{x-\sqrt{x}+1}<-\frac{1}{7}\Leftrightarrow\frac{1}{x-\sqrt{x}+1}>\frac{1}{7}$$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}+1<7$ (do $x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$)

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-6<0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)<0\Leftrightarrow\sqrt{x}-3<0$

$\Leftrightarrow 0\le x<9$

Đối chiếu với điều kiện ta được: $\begin{cases}0\le x<9\\ x\ne\dfrac{1}{4},x\ne1\end{cases}$

Câu 2.

1) ĐKXĐ: $\begin{cases}x^2-x-2\ne0\\ x^2-5x-2\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne-1\\ x\ne2\\ x\ne\dfrac{5\pm\sqrt{33}}{2}\end{cases}$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Khi $x\ne0$ thì

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow\dfrac{1}{x-1-\frac{2}{x}}-\dfrac{3}{x-5-\frac{2}{x}}-2=0.$

Đặt $t=x-\dfrac{2}{x}$, ta được phương trình biểu thị theo t là $\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{3}{t-5}=2$

$\Leftrightarrow t^2-5t+6=0\Leftrightarrow t=2;\ t=3$

Với $t=2\Rightarrow x-\dfrac{2}{x}=2\Leftrightarrow x^2-2x-2=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3}$ (thỏa mãn)

Với $t=3\Rightarrow x-\dfrac{2}{x}=3\Leftrightarrow x^2-3x-2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{1\pm\sqrt{3};\ \dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$.

2) Với x = y = 0 là nghiệm của hệ phương trình

Nhận thấy nếu x $\neq 0$ thì y $\neq 0$ và ngược lại

Xét x $\neq 0$; y $\neq 0$ hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2 \\ (\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{xy})=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2 & (1) \\ (\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(2+\frac{2}{xy}) & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được $(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})^3=8$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2 \\ \frac{1}{xy}=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=1$$

Vậy hệ có nghiệm (x ; y) là (0 ; 0) ; (1 ; 1)

Câu 3.

1) Ta có: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$ (1)

$\Rightarrow 7(x+2y)\vdots 5 \Rightarrow (x+2y)\vdots 5$. Đặt $x+2y=5t$ (2) $(t\in Z)$ thì

(1) trở thành $x^2+xy+y^2=7t$ (3).

Từ (2)$\Rightarrow x=5t-2y$ thay vào (3) ta được $3y^2-15ty+25t^2-7t=0$ (*), coi đây là PT bậc hai đối với y có: $\Delta=84t-75t^2$

Để (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\geq 0 \Leftrightarrow 84t-75t^2\geq 0 \quad \Leftrightarrow 0\leq t\leq \frac{28}{25}$

Vì $t\in Z \Rightarrow t=0$ hoặc $t=1$. Thay vào (*) :

+ Với $t=0 \Rightarrow y_1=0 \Rightarrow x_1=0$

+ Với $t=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_2=3\Rightarrow x_2=-1 \\ y_3=2\Rightarrow x_3=1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 3 nghiệm nguyên (x, y) là (0; 0), (-1; 3) và (1; 2)

2) Nếu $p=q$ thì $p=\frac{2(m^2+1)}{m+1}=2m-2+\frac{4}{m+1}$.

Do $m\in$ và *p* là số nguyên tố nên $4\vdots(m+1)\Rightarrow m=0; m=1; m=3 \Rightarrow p=2;\ p=5$.

Nếu $p\neq q$ thì *pq* và *p* + *q* là nguyên tố cùng nhau vì *pq* chỉ chia hết cho các ước nguyên tố là *p* và *q* còn *p* + *q* thì không chia hết cho *p* và không chia hết cho *q*.

Gọi *r* là một ước chung của m^2+1 và $m+1 \Rightarrow [(m+1)(m-1)]\vdots r \Rightarrow (m^2-1)\vdots r$

$\Rightarrow \left[(m^2+1)-(m^2-1)\right]\vdots r \Rightarrow 2\vdots r \Rightarrow r=1$ hoặc $r=2$.

+) $r=1$ suy ra $p+q=m+1,\ pq=m^2+1 \Rightarrow p,q$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-(m+1)x+m^2+1=0$ vô nghiệm do

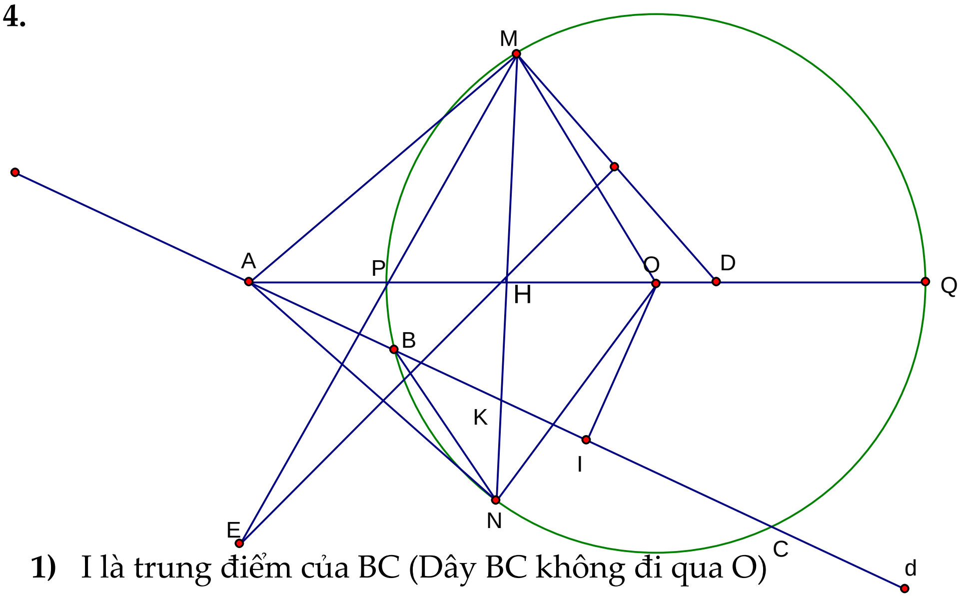
$\Delta=-3m^2+2m-3=-(m-1)^2-(2m^2+2)<0$

+) $r=2$ suy ra $2pq=m^2+1$ và $2(p+q)=m+1 \Rightarrow p,\ q$ là hai nghiệm của phương trình $2x^2-(m+1)x+m^2+1=0$ vô nghiệm do

$\Delta=-7m^2+2m-7=-(m-1)^2-(6m^2+6)<0$.

Vậy bộ các số nguyên tố $(p;\ q)$ cần tìm là $(p;q)=(2;2);\ \ (p;q)=(5;5)$.

Câu 4.



1) I là trung điểm của BC (Dây BC không đi qua O)

$\Rightarrow$ OI $\perp$ BC $\Rightarrow$ $\angle$OIA = 90^0

Ta có $\angle$AMO = 90^0

$\angle$ANO = 90^0

Suy ra 4 điểm O, M, N, I cùng thuộc đường tròn đường kinh OA

2) AM, AN là hai tiếp tuyến của (O) nên OA là phân giác $\angle$MON mà ΔMON cân ở O nên OA $\perp$ MN

ΔABN đồng dạng với ΔANC (Vì $\angle$ANB = $\angle$ACN, $\angle$CAN chung)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AN}=\dfrac{AN}{AC} \Rightarrow AB\ .\ AC = AN^2$

ΔANO vuông tại N đường cao NH nên AH . AO = AN^2

$\Rightarrow$ AB . AC = AH . AO

ΔAHK đồng dạng với ΔAIO (g-g)

Nên $\dfrac{AH}{AI}=\dfrac{AK}{AO} \Rightarrow AI\cdot AK = AH\cdot AO$

$\Rightarrow AI\cdot AK = AB.AC$

$\Rightarrow AK=\dfrac{AB\cdot AC}{AI}$

Ta có A, B, C cố định nên I cố định $\Rightarrow$ AK cố định

Mà A cố định, K là giao điểm của dây BC và dây MN nên K thuộc tia AB $\Rightarrow$ K cố định

3) Ta có $\angle PMQ = 90^0$

$\Delta MHE \backsim \Delta QDM$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{ME}{MQ} = \dfrac{MH}{DQ}$

$\Delta PMH \backsim \Delta MQH \Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MH}{QH} = \dfrac{MH}{2DQ}$

$\Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{ME}{MQ}$

$\Rightarrow$ ME = 2 MP $\Rightarrow$ P là trung điểm ME

Câu 5.

Từ: $2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+c\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\right)=6 \Rightarrow 6=\dfrac{c(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2b^2}+\dfrac{2(a^2+b^2)}{ab}$

ta có:

$a^2+b^2 \ge 2ab \Rightarrow 6=\dfrac{c(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2b^2}+\dfrac{2(a^2+b^2)}{ab} \ge \dfrac{c(a+b)}{ab}+4 \Rightarrow 0<\dfrac{c(a+b)}{ab} \le 2.$

Lại có

$$\frac{bc}{a(2b+c)}+\frac{ac}{b(2a+c)}=\frac{(bc)^2}{abc(2b+c)}+\frac{(ac)^2}{abc(2a+c)} \ge \frac{(bc+ac)^2}{2abc(a+b+c)}=\frac{\left(c(a+b)\right)^2}{2abc(a+b+c)}$$

và $abc(a+b+c)=ab.bc+bc.ca+ab.ca \le \dfrac{(ab+bc+ca)^2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{bc}{a(2b+c)}+\frac{ac}{b(2a+c)} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{c(a+b)}{ab+bc+ca}\right)^2=\frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{c(a+b)}{ab}}{1+\dfrac{c(a+b)}{ab}}\right)^2$$

Đặt $t=\dfrac{c(a+b)}{ab} \Rightarrow P \ge \dfrac{3t^2}{2(1+t)^2}+\dfrac{4}{t}$ (với $0<t\le 2$).

Có $\dfrac{3t^2}{2(1+t)^2}+\dfrac{4}{t}=\left(\dfrac{3t^2}{2(1+t)^2}+\dfrac{4}{t}-\dfrac{8}{3}\right)+\dfrac{8}{3}=\dfrac{-7t^3-8t^2+32t+24}{6t(1+t)^2}+\dfrac{8}{3}$

$=\dfrac{(t-2)(-7t^2-22t-12)}{6t(1+t)^2}+\dfrac{8}{3}$

mà $\dfrac{(t-2)(-7t^2-22t-12)}{6t(1+t)^2} \ge 0 \quad \forall t \in (0;2] \Rightarrow \dfrac{(t-2)(-7t^2-22t-12)}{6t(1+t)^2}+\dfrac{8}{3} \ge \dfrac{8}{3} \quad \forall t \in (0;2].$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi t = 2 hay $a=b=c.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{8}{3}$ khi $a=b=c.$

Đề số 43

Câu 1.

a) Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ x + 2\sqrt{x} - 3 \ne 0 \\ \sqrt{x} + 3 \ne 0 \\ \sqrt{x} - 1 \ne 0 \\ 2 - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \ne 0 \end{cases} \Rightarrow x \ge 0; x \ne 1; x \ne 4$

Biến đổi $\dfrac{3x+\sqrt{16x}-7}{x+2\sqrt{x}-3} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+7)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} - \dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}$

$= \dfrac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+3} - \dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{2(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3} - \dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} = 2 - \dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-1}$

và $2 - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

Từ đó suy ra $A = \dfrac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-1} : \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2}$

b) Biến đổi $A = -6 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2} = -6 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 9 = -6(\sqrt{x}-2) \Leftrightarrow 7\sqrt{x} = 21 \Leftrightarrow x = 9\,(tm)$

Vậy $x = 9$ thì $A = -6$

Câu 2.

a) Khi $m = 10$ hệ phương trình có dạng $\begin{cases} 10x - 2y = 2 \\ 2x + 10y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 2y = 2 \\ 10x + 50y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{15}{52} \\ y = \dfrac{23}{52} \end{cases}$

Vậy khi $m = 10$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\dfrac{15}{52}; \dfrac{23}{52}\right)$

b) Ta có: $\begin{cases} mx - 2y = 2 \\ 2x + my = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{mx-2}{2} \\ 2x + my = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{mx-2}{2} \\ 2x + m\dfrac{mx-2}{2} = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{mx-2}{2} \\ (m^2+4)x = 2m + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2m+10}{m^2+4} \\ y = \dfrac{mx-2}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{2m+10}{m^2+4} \\ y = \dfrac{mx-2}{2} \end{cases}$

Thay vào hệ thức $x + y - 2014 = \dfrac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2+4}$.

Ta được $\dfrac{-2014m^2 + 7m - 8050}{m^2+4} = \dfrac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2+4} \Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (m-1)(m-6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 6 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện đề bài ta được $m = 1; m = 6$.

Câu 3.

a) Chứng minh $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge (ax+by+cz)^2 \ \forall a,b,c,x,y,z \quad (1)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có: $\left(9a^3+3b^2+c\right)\left(\dfrac{1}{9a}+\dfrac{1}{3}+c\right) \ge (a+b+c)^2 = 1$

$\Rightarrow 9a^3 + 3b^2 + c \ge \dfrac{1}{\dfrac{1}{9a}+\dfrac{1}{3}+c} \Rightarrow \dfrac{a}{9a^3+3b^2+c} \le a\left(\dfrac{1}{9a}+\dfrac{1}{3}+c\right)$

Tương tự ta có: $\dfrac{b}{9b^3+3c^2+a} \le b\left(\dfrac{1}{9b}+\dfrac{1}{3}+a\right); \dfrac{c}{9c^3+3a^2+b} \le c\left(\dfrac{1}{9c}+\dfrac{1}{3}+b\right)$

Cộng theo vế các BĐT trên ta được

$P \le 3.\dfrac{1}{9} + \dfrac{a+b+c}{3} + (ab+bc+ca) \le \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3} = 1$

Vậy $MaxP = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

b) Ta có $x\left(1+x+x^2\right) = 4y(y-1) \Leftrightarrow \left(x^3+x^2\right) + x + 1 = 4y^2 - 4y + 1$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2+1\right) = (2y-1)^2 \quad (1)$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2y-1)^2 > 0$ nên từ (1) suy ra $x \ge 0$ và x chẵn.

Giả dử $\left(x+1; x^2+1\right) = d \Rightarrow d$ lẻ và $\begin{cases} x^2 - 1 \vdots d \\ x^2 + 1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d = 1$

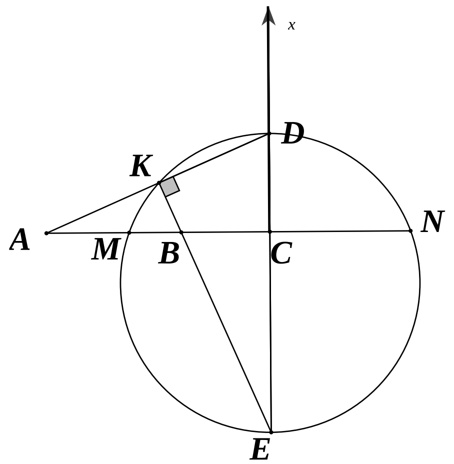
Vì $(x+1)\left(x^2+1\right)$ là số chính phương mà $\left(x+1; x^2+1\right) = 1$ nên $(x+1)$ và $\left(x^2+1\right)$ cũng là hai số chính phương.

Do $x \ge 0 \Rightarrow x^2 < x^2 + 1 \le (x+1)^2 \Rightarrow x^2 + 1 = (x+1)^2 \Rightarrow x = 0$

Khi $x = 0 \Rightarrow 4y(y-1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}\right.$

Vậy hai cặp số nguyên $(x;y)=(0;0);(0;1)$

Câu 4.



a) Ta có $EBC = ADC$ (cùng bù với KBC); $ACD = ECB = 90^0$

$\Rightarrow \Delta ACD \# \Delta ECB(g.g) \Leftrightarrow \dfrac{DC}{BC} = \dfrac{AC}{EC}$

Do $AB = \dfrac{a}{4}; BC = \dfrac{3a}{4} \Rightarrow DC.EC = AC.BC = \dfrac{3a^2}{4}$.

b) $S_{BDE} = \dfrac{1}{2}BC.DE \Rightarrow S_{BDE}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi DE nhỏ nhất.

Ta có $DE = DC + EC \geq 2\sqrt{DC.EC} = 2\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}} = a\sqrt{3}$ (theo a)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow DC = EC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow S_{BDE} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{8}$ khi $D \in Cx$ sao cho $CD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) Gọi giao điểm của đường tròn đường kính DE với đường thẳng AC là M, N (M nằm giữa A và B) $\Rightarrow M, N$ đối xứng qua DE.

Ta có $\Delta AKB \# \Delta ACD(g.g) \Rightarrow \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow AK.AD = AC.AB \quad (1)$

$\Delta AKM \# \Delta AND(g.g) \Rightarrow \dfrac{AK}{AN} = \dfrac{AM}{AD} \Rightarrow AK.AD = AM.AN \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AM.AN = AC.AB = \dfrac{a^2}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{4} = (AC - MC)(AC + NC) = AC^2 - MC^2$ (do $MC = NC$)

$\Rightarrow MC^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow MC = NC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra M, N là hai điểm cố định

Vậy đường tròn đường kính DE luôn có dây cung MN cố định.

Câu 5.

Với hai số thực u,v ta luôn có $(u+1)(v+1)=u+v+uv+1=(u+v+uv)+1$ (*)

Xét dãy số thực bất kì $a_1;a_2;a_3;....;a_{2015}$ và ta xét "tích thêm T"

$T=(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)...(a_{2015}+1)$

Áp dụng cách biến đổi dãy như trong đề bài kết hợp với nhận xét (*), ta nhận thấy "tích thêm T" không thay đổi với mọi dãy thu được.

Với dãy ban đầu của bài toán ta xét "tích thêm T"

$$T=\left(\frac{1}{1}+1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{4}+1\right)....\left(\frac{1}{2014}+1\right)\left(\frac{1}{2015}+1\right)$$

$$=\frac{2}{1}.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}...\frac{2015}{2014}.\frac{2016}{2015}=2016$$

Giả sử sau 2014 lần biến đổi tùy ý theo yêu cầu, dãy còn lại một số là x thì "tích thêm T" đối với dãy cuối là $T=x+1\Rightarrow x+1=2016\Rightarrow x=2015$

Vậy sau 2014 lần biến đổi theo yêu cầu của bài toán, số còn lại trong dãy là 2015.

Đề số 44

Câu 1.

a) Đặt $a=\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}$, $a>0$

$$a^2=4+2\sqrt{4-\frac{5+\sqrt{5}}{2}}=4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=4+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=3+\sqrt{5}\Rightarrow a=\sqrt{3+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-1=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}-1=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}-1=\sqrt{2}-1$$

$$x=\sqrt{2}-1\Rightarrow x^2+2x-1=0$$

$$B=2x^3+3x^2-4x+2=2x\left(x^2+2x-1\right)-\left(x^2+2x-1\right)+1=1$$

$$\sqrt{x+2014}+\sqrt{2015-x}-\sqrt{2014-x}=\sqrt{y+2014}+\sqrt{2015-y}-\sqrt{2014-y}\ (1)$$

b) ĐKXĐ: $-2014\le x;y\le 2014$

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x+2014}-\sqrt{y+2014}+\sqrt{2015-x}-\sqrt{2015-y}+\sqrt{2014-y}-\sqrt{2014-x}=0$$

Nếu x khác y và $-2014\le x;y\le 2014$ thì $\sqrt{x+2014}+\sqrt{y+2014}>0$;

$\sqrt{2015-x}+\sqrt{2015-y}>0;\sqrt{2014-x}+\sqrt{2014-y}>0$, do đó (1)

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2014}+\sqrt{y+2014}}-\frac{1}{\sqrt{2015-x}+\sqrt{2015-y}}+\frac{1}{\sqrt{2014-x}+\sqrt{2014-y}}\right)=0\ (2)$$

Khi đó dễ chứng tỏ $\dfrac{1}{\sqrt{2014-x}+\sqrt{2014-y}}-\dfrac{1}{\sqrt{2015-x}+\sqrt{2015-y}}>0$

Mà $x-y\neq 0$ nên (2) vô lý vì VT(2) luôn khác 0

Nếu x = y dễ thấy (1) đúng. Vậy x = y.

Câu 2.

a) $x^3+(x+1)\sqrt{x+1}+2\sqrt{2}=\left(x+\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)^3$ (1)

ĐKXĐ: $x\geq -1$

Đặt: $y=\sqrt{x+1}; z=\sqrt{2}$ Khi đó (1) có dạng : $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3$ (2)

Chứng minh được (2) ⇔ (x+y)(x+z)(z+x) = 0

Với: x + y = 0 $\Leftrightarrow x+\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=-x \Rightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (Thỏa mãn)

Với: x + z = 0 $\Leftrightarrow x+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$ (không thỏa mãn).

Với: y + z = 0 $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{2}=0$ - vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

b) $\begin{cases}3x^2+xy-4x+2y=2\\ x(x+1)+y(y+1)=4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+xy-4x+2y-2=0\\ x^2+y^2+x+y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0\\ x^2+y^2+x+y-4=0\end{cases}$

Ta có: $2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0 \Leftrightarrow (y+x-2)(y-2x+1)=0$

$\Leftrightarrow y=2-x$ hoặc $y=2x-1$

Với $y=2-x$ thay vào (2) ta được: $x^2-2x+1=0$ suy ra x = 1

Ta được nghiệm (1;1)

$y=2x-1$ thay vào (2) ta được: $5x^2-x-4=0$, suy ra $x=1; x=\dfrac{-4}{5}$

Ta được nghiệm (1;1) và $\left(\dfrac{-4}{5};\dfrac{-13}{5}\right)$

Vậy hệ có nghiệm (1;1) và $\left(\dfrac{-4}{5};\dfrac{-13}{5}\right)$

Câu 3.

a) Tìm số nguyên tố p sao cho các số $2p^2-1;\ 2p^2+3;\ 3p^2+4$ đều là số nguyên tố.

+) Nếu p=7k+i; k,i nguyên, i thuộc tập $\{\pm1;\pm2;\pm3\}$. Khi đó p^2 chia cho 7 có thể dư: 1;4;2

Xét $p>2 \Rightarrow 2p^2-1;\ 2p^2+3\ \&\ 3p^2+4>7$

Nếu p^2 chia cho 7 dư 1 thì $3p^2+4$ chia hết cho 7 nên trái GT

Nếu p^2 chia cho 7 dư 4 thì $2p^2-1$ chia hết cho 7 nên trái GT

Nếu p^2 chia cho 7 dư 2 thì $2p^2+3$ chia hết cho 7 nên trái GT

+) Xét p=2 thì $3p^2+4$=16 (loại)

+) Xét p=7k, vì p nguyên tố nên p = 7 là nguyên tố, có:

$2p^2-1=97;\ 2p^2+3=101;\ 3p^2+4=151$ đều là các số nguyên tố

Vậy p = 7

b) Giả thiết $\Leftrightarrow 3(x-3)^2-18y^2+2z^2+3y^2z^2=54(1)$

+) Lập luận để $z^2 \vdots 3 \Rightarrow z \vdots 3 \Rightarrow z^2 \vdots 9 \Rightarrow z^2 \ge 9(*)$

$(1) \Leftrightarrow 3(x-3)^2+2z^2+3y^2(z^2-6)=54(2)$

$(2) \Rightarrow 54=3(x-3)^2+2z^2+3y^2(z^2-6) \ge 3(x-3)^2+2.9+3y^2.3$

$(x-3)^2+3y^2 \le 12$

$\Rightarrow y^2 \le 4 \Rightarrow y^2=1; y^2=4$ vì y nguyên dương

Nếu $y^2=1 \Leftrightarrow y=1$ thì (1) có dạng:

$3(x-3)^2+5z^2=72 \Rightarrow 5z^2 \le 72 \Rightarrow z^2 \le \frac{72}{5} \Rightarrow z^2=9 \Rightarrow z=3$ (vì có(*))

Khi đó $3(x-3)^2=27 \Rightarrow (x-3)^2=9$, x nguyên dương nên tìm được x=6

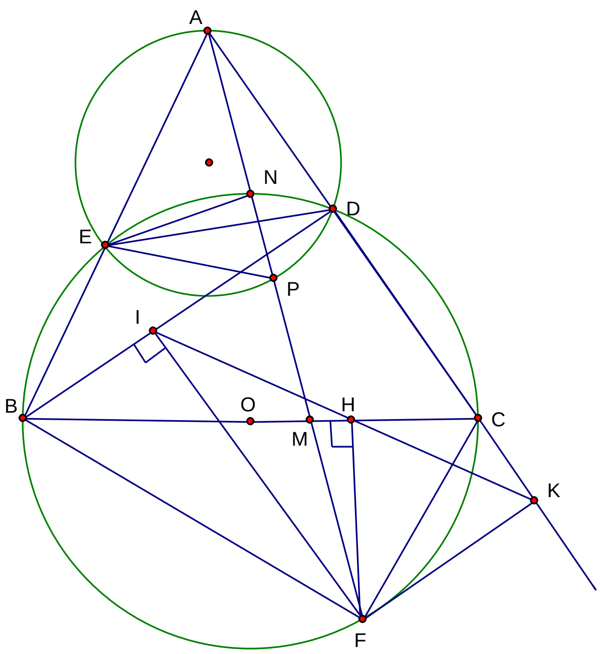
Nếu $y^2=4 \Leftrightarrow y=2$ (vì y nguyên dương) thì (1) có dạng:

$3(x-3)^2+14z^2=126 \Rightarrow 14z^2 \le 126 \Rightarrow z^2 \le 9 \Rightarrow z^2=9 \Rightarrow z=3$ (vì z nguyên dương)

Suy ra $(x-3)^2=0 \Rightarrow x=3$ (vì x nguyên dương)

Đáp số $\begin{cases} x=3 \\ y=2; \\ z=3 \end{cases} \begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$

Câu 4.



a) Sđ $BAC = \frac{180^0 - \text{sd}DE}{2} \Rightarrow \text{sd}DE = 60^0$

Suy ra $EOD = 60^0$ nên tam giác OED đều

suy ra ED = R.

b) Ta có: $APE = ADE$ (2 góc nội tiếp chắn cung AE)

$ABM = ADE$ (Cùng bù với góc EDC)

Suy ra: $ABM = APE$ nên tam giác APE đồng dạng với tam giác ABM

Nên $\frac{AE}{AP} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AE.AB = AM.AP$ (1)

Tương tự chứng minh tam giác ANE đồng dạng với tam giác ABF

$\frac{AE}{AN} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow AE.AB = AN.AF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AN.AF = AP.AM$

c) Xét I nằm giữa B, D(Nếu I nằm ngoài B,D thì vai trò K với DC sẽ như I với BD)

Tứ giác BIHF, BDCF nội tiếp nên $FHK = FCK$ (cùng bằng FBD), suy ra tứ giác CKFH nội tiếp nên $FKC = 90^0$.

Lý luận tam giác DFK đồng dạng tam giác BFH nên: $\frac{DK}{FK} = \frac{BH}{FH}$

Tương tự tam giác CFK đồng dạng tam giác BFI nên: $\frac{CK}{FK} = \frac{BI}{FI}$

Suy ra: $\frac{DC}{FK} = \frac{BH}{FH} - \frac{BI}{FI}$

$\frac{DC}{FK} + \frac{BD}{FI} = \frac{BH}{FH} + \frac{BD}{FI} - \frac{BI}{FI} = \frac{BH}{FH} + \frac{ID}{FI}$

Mà $\frac{ID}{FI} = \frac{HC}{FH}$ suy ra: $\frac{DC}{FK} + \frac{BD}{FI} = \frac{BH}{FH} + \frac{HC}{FH} = \frac{BC}{FH}$

Vậy $\frac{BC}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{CD}{FK} = \frac{2BC}{FH}$ nên $\frac{BC}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{CD}{FK}$ nhỏ nhất khi FH lớn nhất khi F là trung điểm cung BC

Câu 5.

Có $xy + yz + zx = xyz \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1(1)$

Ta chứng minh với x, y dương: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}(*)$

$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\right)(x+y) \ge (a+b)^2 \Leftrightarrow a^2\frac{y}{x}+b^2\frac{x}{y} \ge 2ab \Leftrightarrow \left(a\sqrt{\frac{y}{x}}-b\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 \ge 0$ luôn

đúng; "=" $\Leftrightarrow a\sqrt{\frac{y}{x}}-b\sqrt{\frac{x}{y}}=0 \Leftrightarrow a=b\frac{x}{y}$

Áp dụng(*) ta có: $\frac{1^2}{y}+\frac{1^2}{z} \ge \frac{(1+1)^2}{y+z}=\frac{2^2}{y+z}("=" \Leftrightarrow y:z=1)$

$\Rightarrow \frac{2^2}{2y}+\frac{2^2}{y+z} \ge \frac{(2+2)^2}{3y+z}=\frac{4^2}{3y+z}("=" \Leftrightarrow 2y=y+z \Leftrightarrow y=z)$

$\Rightarrow \frac{4^2}{4x}+\frac{4^2}{3y+z} \ge \frac{(4+4)^2}{4x+3y+z}=\frac{64}{4x+3y+z}("=" \Leftrightarrow 4x=3y+z)$

$\Rightarrow \frac{64}{4x+3y+z} \le \frac{4^2}{4x}+\frac{2^2}{2y}+\frac{1^2}{y}+\frac{1^2}{z}=\frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}("=" \Leftrightarrow 4x=3y+z\,\&\, y=z \Leftrightarrow x=y=z)$

Tương tự: $\frac{64}{x+4y+3z} \le \frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{3}{z}("=" \Leftrightarrow x=y=z)$

$\frac{64}{3x+y+4z} \le \frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{4}{z}("=" \Leftrightarrow x=y=z)$

$M=\frac{1}{4x+3y+z}+\frac{1}{x+4y+3z}+\frac{1}{3x+y+4z} \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{8}$ (theo (1))

Vậy M đạt GTLN là $\frac{1}{8}$ khi $x=y=z=3$ (theo (1))

Đề số 45

Câu 1.

a) Đặt $a=\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow a^3=2$. Đẳng thức cần chứng minh trở thành

$\sqrt[3]{a-1}=\frac{1-a+a^2}{\sqrt[3]{9}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{9(a-1)}=a^2-a+1 \Leftrightarrow \left(a^2-a+1\right)^3=9(a-1)$

Biến đổi vế trái ta được

$\left(a^2-a+1\right)^3=\left(a^2-a+1\right)^2\left(a^2-a+1\right)$

$=\left(a^4+a^2+1-2a^3+2a^2-2a\right)\left(a^2-a+1\right)$

$=\left(a^4-2a^3+3a^2-2a+1\right)\left(a^2-a+1\right)=3\left(a^2-1\right)\left(a^2-a+1\right)$

$=3(a-1)\left(a^3+1\right)=9(a-1)$.

b) Với $x_1,x_2,...,x_{2015}$ nguyên dương, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số ta được

$1+x_1 \ge 2\sqrt{x_1},\ 1+x_2 \ge 2\sqrt{x_2},...,1+x_{2015} \ge 2\sqrt{x_{2015}}$

Nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_{2015}) \ge 2^{2015}\sqrt{x_1x_2...x_{2015}}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_{2015} = 1$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương duy nhất

$(x_1, x_2, ..., x_{2015}) = (1,1,...,1)$.

Câu 2.

Điều kiện $x \geq -1,\ y \geq 3.$ Ta xét các trường hợp

Trường hợp 1: $x+1 < y-3 \Leftrightarrow y > x+4$

Khi đó, $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3} < \sqrt{y-1}+\sqrt{y-2}+\sqrt{y-3}$

Suy ra hệ vô nghiệm

Trường hợp 2: $x+1 > y-3 \Leftrightarrow y < x+4$

Khi đó, $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3} > \sqrt{y-1}+\sqrt{y-2}+\sqrt{y-3}$

Suy ra hệ vô nghiệm

Trường hợp 3: $x+1 = y-3 \Leftrightarrow y = x+4$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho, ta được

$2x^2+8x+6=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=-3$

So điều kiện ta được $x=-1 \Rightarrow y=3.$ Vậy $(x;y)=(-1;\ 3)$.

Câu 3.

Ta có $\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq x \text{ do x dương (*)}$$

Mặt khác, từ giả thiết $x + y + z = 4 \Rightarrow x = 4 - (y + z)$. Thay vào (*) ta có

$\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 4-(y+z) \Leftrightarrow \frac{1}{y}-2+y+\frac{1}{z}-2+z \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\sqrt{y}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{z}}-\sqrt{z}\right)^2 \geq 0$

Luôn đúng với mọi x, y, z dương, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow y = z = 1,\ x = 2$.

Câu 4.

Ta có $x^2 = 2x + \overline{yzz4} \Leftrightarrow (x-1)^2 = \overline{yzz5}$; x, y, $z \in \mathbb{N}^+$ và $y, z \in \{1; 2; ...; 9\}$

Suy ra $x-1$ có dạng $\overline{a5}$

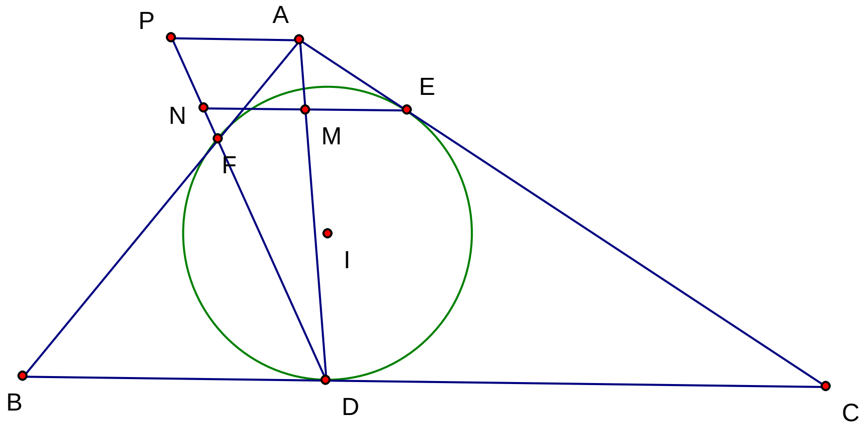
Do đó $\overline{yzz5} = \overline{a5}^2 = (10a+5)^2 = 100a(a+1)+25$

Suy ra $z = 2 \Rightarrow y+z+z+5 = y+9$

Vì $(x-1)^2 = \overline{yzz5}$ là số chính phương và có tổng các chữ số bằng $y+9$ nên $\overline{yzz5}$ chia cho 9 dư 0, 1, 4, 7. Do đó $y \in \{1; 4; 7\}$

Khi đó tìm được $(x, y, z) \in \{(36; 1; 2); (66; 4; 2); (86; 7; 2)\}$.

Câu 5.



Qua A dựng đường thẳng song song BC, cắt DF tại P. Ta có MN // AP nên theo định lí Thales thì $\frac{MN}{AP}=\frac{DM}{AD}\ (1)$

Cũng theo định lí Thales ta có $\frac{ME}{CD}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{ME}{AE}=\frac{CD}{AC}=\frac{CE}{CA}=\frac{DM}{AD}\ (2)$

Từ (1), (2) suy ra $\frac{MN}{AP}=\frac{ME}{AE}\ (3)$

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì $AF=AE\ (4)$

Mặt khác, tam giác APF có $APF=BDF=BFD=AFP$

$\Rightarrow$ tam giác APF cân tại A suy ra $AF=AP\ (5)$

Từ (4), (5) suy ra $AP=AE$ (6)

Kết hợp (5) và (6) ta có $MN=ME$ hay M là trung điểm NE.

Câu 6.

Để ý rằng tổng của 16 số ấy cũng chính là tổng của 4 hàng, tức là bằng $4s$

Tổng các số ở hai hàng giữa, 2 cột giữa và 2 đường chéo bằng 6s, ở các vị trí này, tất cả 16 số đã cho đều được sử dụng, mỗi số dùng 1 lần, ngoại trừ ở 4 số chính giữa thì mỗi số được dùng 3 lần

Kí hiệu m là tổng của 4 số chính giữa, ta thấy rằng $6s-2m=4s\Rightarrow m=s$

Tiếp theo, ta để ý rằng tổng cả 2 đường chéo bằng 2s, và bằng tổng của 4 số ở chính giữa cộng với tổng 4 số đặt ở 4 góc hình vuông. Từ đó tổng của 4 số đặt ở 4 góc của hình vuông là $2s-m=2s-s=s$.

Đề số 46

Câu 1.

a) Ta có:

$$A=\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)}{2-\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

$$=\sqrt{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2}=\sqrt{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(2+2\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$=\sqrt{2x^2}=|x|\sqrt{2}$$

b) Ta có:

$a^3-a^2b+ab^2-6b^3=0 \Leftrightarrow (a-2b)(a^2+ab+3b^2)=0$ (*)

Vì a > b > 0 $\Rightarrow a^2+ab+3b^2>0$ nên từ (*) ta có a = 2 b

Vậy biểu thức $B=\dfrac{a^4-4b^4}{b^4-4a^4}=\dfrac{16b^4-4b^4}{b^4-64b^4}$

$$B=\frac{12b^4}{-63b^4}=\frac{-4}{21}$$

Câu 2.

a) Đặt $t=x\sqrt{2x^2+4}\Rightarrow t^2=2\left(x^4+2x^2\right)\Rightarrow\ x^2\left(x^2+2\right)=\dfrac{t^2}{2}$

ta được phương trình $\dfrac{t^2}{2}=4-t\Leftrightarrow t^2+2t-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4\\t=2\end{array}\right.$

Với t = -4 ta có $x\sqrt{2x^2+4}=-4\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\2\left(x^4+2x^2\right)=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\x^4+2x^2-8=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\x^2=2\end{cases}\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$$

Với t =2 ta có $x\sqrt{2x^2+4}=2\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\2\left(x^4+2x^2\right)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^4+2x^2-2=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2=\sqrt{3}-1\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{\sqrt{3}-1}$. Kết luận nghiệm của phương trình.

b) Từ hệ ta có $x^3(2y+x)=y^3(2x+y)\Leftrightarrow(x^2-y^2)\left(2xy+x^2+y^2\right)=0$

$$\Leftrightarrow(x+y)^3(x-y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x=-y\end{array}\right.$$

* Với x = y ta tìm được (x ; y) = (0; 0); ($\sqrt{3};\sqrt{3}$);($-\sqrt{3};-\sqrt{3}$)

* Với x = - y ta tìm được (x ; y) = (0; 0); $(1;-1);(-1;1)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

(x ; y) = (0; 0); $\sqrt{3};\sqrt{3}$);($-\sqrt{3};-\sqrt{3}$);($-1;1);(1;-1)$

Câu 3.

a) $xy^2+2xy+x=32y\Leftrightarrow x(y+1)^2=32y$

Do y nguyên dương $\Rightarrow y+1\neq 0 \Rightarrow x=\dfrac{32y}{(y+1)^2}$

Vì $(y,y+1)=1 \Rightarrow (y+1)^2 \in U(32)$

mà $32=2^5 \Rightarrow (y+1)^2=2^2$ và $(y+1)^2=2^4$(Do $(y+1)^2>1$)

*Nếu $(y+1)^2=2^2 \Rightarrow y=1; x=8$

*Nếu $(y+1)^2=2^4 \Rightarrow y=3; x=6$

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là: $\begin{cases} x=8 \\ y=1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$

b) Ta có: $2a^2+a=3b^2+b \Leftrightarrow (a-b)(2a+2b+1)=b^2$ (*)

Gọi d là ước chung của (a - b, 2a + 2b + 1) ($d \in \mathbb{N}^*$). Thì

$\begin{cases} (a-b)\,\vdots\, d \\ (2a+2b+1)\,\vdots\, d \end{cases} \Rightarrow (a-b)(2a+2b+1)\,\vdots\, d^2$

$\Rightarrow b^2 \,\vdots\, d^2 \Rightarrow b \,\vdots\, d$

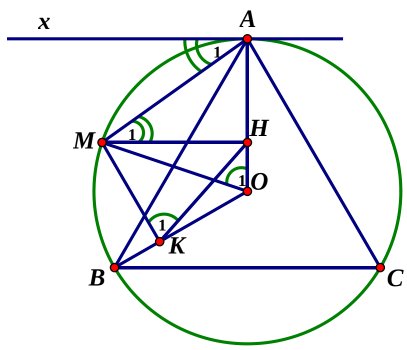
Mà $(a-b)\,\vdots\, d \Rightarrow a \,\vdots\, d \Rightarrow (2a+2b)\,\vdots\, d$ mà $(2a+2b+1)\,\vdots\, d \Rightarrow 1 \,\vdots\, d \Rightarrow d=1$

Do đó (a - b, 2a + 2b + 1) = 1. Từ (*) ta được $a-b$ và $2a+2b+1$ là số chính phương

=> $2a+2b+1$ là số chính phương.

Câu 4.

a) Qua A kẻ tia tiếp tuyến Ax của (O).



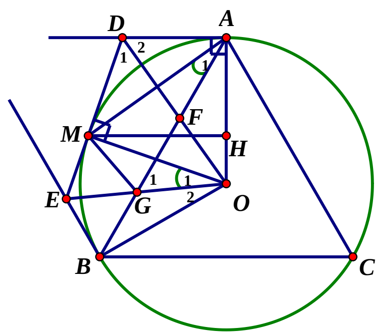
Ta có $A_1=\dfrac{1}{2}O_1=\dfrac{1}{2}$sđ AM (1)

Có Ax // MH (cùng vuông góc với OA) $\Rightarrow A_1=M_1$ (2)

Tứ giác MHOK nội tiếp $\Rightarrow O_1=K_1$ (cùng chắn MH) (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $M_1=\dfrac{1}{2}K_1$ hay $HKM=2AMH$.

b) Có tứ giác AOMD nội tiếp (4)



$A_1=\dfrac{1}{2}$sđ BM ; $O_1=O_2=\dfrac{1}{2}$sđ BM

$\Rightarrow A_1=O_1 \Rightarrow$ tứ giác AMGO nội tiếp (5)

Từ (4), (5) ta có 5 điểm A, D, M, G, O cùng nằm trên một đường tròn

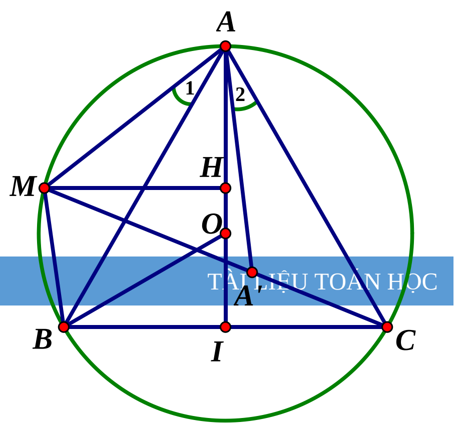
$\Rightarrow G_1=D_2=D_1$

$\Rightarrow \Delta OGF$ và ΔODE đồng dạng

$\Rightarrow \dfrac{OG}{OD}=\dfrac{GF}{DE}$ hay OD.GF = OG.DE.

c) Trên đoạn MC lấy điểm A′ sao cho

MA′ = MA $\Rightarrow \Delta AMA'$ đều



$\Rightarrow A_1 = A_2\left(=60^0 - BAA'\right)$

$\Rightarrow \Delta MAB = \Delta A'AC \Rightarrow MB = A'C$

$\Rightarrow MA + MB = MC$

Chu vi tam giác MAB là $MA + MB + AB = MC + AB \le 2R + AB$

Đẳng thức xảy ra khi MC là đường kính của (O) => M là điểm chính giữa cung AM => H là trung điểm đoạn AO

Vậy giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là 2R + AB

Gọi I là giao điểm của AO và BC $\Rightarrow AI = \frac{3}{2}R = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$

Giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là 2R + AB = $(2+\sqrt{3})R$

Câu 5.

Từ gt : $2ab + 6bc + 2ac = 7abc$ và a,b,c > 0

Chia cả hai vế cho abc > 0 $\Rightarrow \frac{2}{c} + \frac{6}{a} + \frac{2}{b} = 7$

đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ 2z + 6x + 2y = 7 \end{cases}$

Khi đó $C = \frac{4ab}{a+2b} + \frac{9ac}{a+4c} + \frac{4bc}{b+c} = \frac{4}{2x+y} + \frac{9}{4x+z} + \frac{4}{y+z}$

$$\Rightarrow C = \frac{4}{2x+y} + 2x + y + \frac{9}{4x+z} + 4x + z + \frac{4}{y+z} + y + z - (2x + y + 4x + z + y + z)$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{x+2y}} - \sqrt{x+2y}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{4x+z}} - \sqrt{4x+z}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{y+z}} - \sqrt{y+z}\right)^2 + 17 \ge 17$$

Khi $x = \frac{1}{2}, y = z = 1$ thì C = 17

Vậy GTNN của C là 17 khi a = 2; b = 1; c = 1

Đề số 47

Câu 1.

1) Điều kiện: $\sqrt{xy} \ne 1$.

$$A = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right) + \left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right) + \left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)} :$$

$$\frac{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right) + \left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right) - \left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right) + \left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right) + \left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right) + \left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right) - \left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)} =$$

$= \dfrac{1+\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+\sqrt{xy}} = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$.

2) Theo Côsi, ta có: $6 = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{xy}}} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{xy}} \leq 9$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{9}$.

Vậy: maxA = 9, đạt được khi : $x = y = \dfrac{1}{9}$.

Câu 2.

1) PT đã cho có hai nghiệm phân biệt có điều kiện:

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 - (m^2 - 2m + 4) > 0 \Leftrightarrow m < 0$ (*)

Với $m < 0$ theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - 2m \\ x_1.x_2 = m^2 - 2m + 4 \end{cases}$.

Ta có $\dfrac{2}{x_1^2 + x_2^2} - \dfrac{1}{x_1x_2} = \dfrac{1}{15m} \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2} - \dfrac{1}{x_1x_2} = \dfrac{1}{15m}$ (1)

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{m^2 - 6m + 4} - \dfrac{1}{m^2 - 2m + 4} = \dfrac{1}{15m}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{m + \dfrac{4}{m} - 6} - \dfrac{1}{m + \dfrac{4}{m} - 2} = \dfrac{1}{15}$. Đặt $m + \dfrac{4}{m} = t$ do $m < 0 \Rightarrow t < 0$

Ta cos (1) trở thành $\dfrac{1}{t-6} - \dfrac{1}{t-2} = \dfrac{1}{15} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = 12 \end{array}\right. \Rightarrow t = -4$ (do $t < 0$)

Với $t = -4$ ta có $m + \dfrac{4}{m} = -4 \Leftrightarrow m = -2$ thỏa mãn (*)

2) Ta có:

$x^4 + y^4 + z^4 = \dfrac{x^4 + y^4}{2} + \dfrac{y^4 + z^4}{2} + \dfrac{z^4 + x^4}{2} \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 =$

$= \dfrac{x^2y^2 + y^2z^2}{2} + \dfrac{y^2z^2 + z^2x^2}{2} + \dfrac{z^2x^2 + x^2y^2}{2} \geq xyyz + yzzx + zxxy =$

$=$ xyz (x + y + z) = xyz (vì x + y + z = 1).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{1}{3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\left(x = \dfrac{1}{3}; y = \dfrac{1}{3}; z = \dfrac{1}{3}\right)$

Câu 3.

a) Giả sử $(a + b^2) \vdots (a^2b - 1)$, tức là: $a + b^2 = k(a^2b - 1)$, với $k \in N^* \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a + k = b(ka^2 - b) \Leftrightarrow a + k = mb$ (1)

Ở đó $m \in Z$ mà: $m = ka^2 - b \Leftrightarrow m + b = ka^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $(m - 1)(b - 1) = mb - b - m + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (m - 1)(b - 1) = (a + 1)(k + 1 - ka)$ (3)

Do $m > 0$ (điều này suy ra từ (1) do $a, k, b > 0$) nên $m \geq 1$ (vì $m \in Z$).

Do $b > 0$ nên $b - 1 \geq 0$ (do $b \in Z$) $\Rightarrow (m - 1)(b - 1) \geq 0$.

Vì thế từ (3) suy ra: $(a + 1)(k + 1 - ka) \geq 0$.

Lại do $a > 0$ nên suy ra: $k + 1 - ka \geq 0 \Rightarrow k + 1 \geq ka \Rightarrow 1 \geq k(a - 1)$ (4)

Vì $a - 1 \geq 0$ (do $a \in Z$, $a > 0$) và $k \in Z$, $k > 0$ nên từ (4) có: $\left[\begin{array}{l} k(a-1)=0 \\ k(a-1)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ \begin{cases} a=2 \\ k=1 \end{cases} \end{array}\right.$

- Với $a = 1$. Thay vào (3) ta được: $(m - 1)(b - 1) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1=2 \\ b-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} m-1=1 \\ b-1=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=3 \end{array}\right.$

Vậy, trường hợp này ta có: $a = 1, b = 2$ hoặc $a = 1, b = 3$.

- Với $a = 2$ (vì $k = 1$). Thay vào (3) ta có: $(m - 1)(b - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Khi $b = 1$, ta được: $a = 2, b = 1$.

Khi $m = 1$: Từ (1) suy ra $a + k = b \Rightarrow b = 3$. Lúc này được: $a = 2, b = 3$.

Tóm lại, có 4 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn bài toán là: $(1; 2), (1; 3), (2; 3), (2; 1)$.

b) Ta có $\sqrt{x+2\sqrt{3}}=\sqrt{y}+\sqrt{z} \Leftrightarrow x+2\sqrt{3}=y+z+2\sqrt{yz}$

$\Leftrightarrow (x-y-z)+2\sqrt{3}=2\sqrt{yz} \Rightarrow (x-y-z)^2+4\sqrt{3}(x-y-z)+12=4yz$ (1)

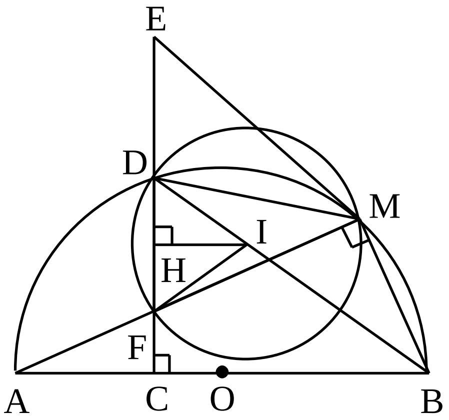
TH1. Nếu $x-y-z \neq 0$ Ta có $\sqrt{3}=\dfrac{4yz-(x-y-z)^2-12}{4(x-y-z)}$ (2) vô lý

(do $x, y, z \in N$ nên vế phải của (2) là số hữu tỷ).

TH2. $x-y-z=0$ khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ yz=3 \end{cases}$ (3)

Giải (3) ra ta được $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$ thử lại thỏa mãn

Câu 4.



a) Ta có M thuộc đường tròn tâm O đường kính AB (giả thiết) nên $AMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

hay $FMB = 90^0$.

Mặt khác $FCB = 90^0$ (giả thiết).Do đó $FMB + FCB = 180^0$.

Suy ra BCFM là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow CBM = EFM\ (1)$ (vì cùng bù với CFM).

Mặt khác $CBM = EMF\ (2)$ (góc nội tiếp; góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn AM). Từ (1) và (2) $\Rightarrow EFM = EMF$.

Suy ra tam giác EMF là tam giác cân tại E.

(Có thể nhận ra ngay $EMF = MBA = MFE$ nên suy ra EMF cân)

b) Gọi H là trung điểm của DF. Suy ra $IH \perp DF$ và $DIH = \dfrac{DIF}{2}\ (3)$.

Trong đường tròn (I) ta có: DMF và DIF lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung DF. Suy ra $DMF = \dfrac{1}{2}DIF\,(4)$.

Từ (3) và (4) suy ra $DMF = DIH$ hay $DMA = DIH$.

Trong đường tròn (O) ta có: $DMA = DBA$ (góc nội tiếp cùng chắn DA)

Suy ra $DBA = DIH$.

Vì IH và BC cùng vuông góc với EC nên suy ra IH // BC. Do đó $DBA + HIB = 180^o$

$\Rightarrow DIH + HIB = 180^o \Rightarrow$ Ba điểm D, I, B thẳng hàng.

c) Vì ba điểm D, I, B thẳng hàng $\Rightarrow ABI = ABD = \dfrac{1}{2}$ sđ AD.

Mà C cố định nên D cố định $\Rightarrow \dfrac{1}{2}$ sđ AD không đổi.

Do đó góc ABI có số đo không đổi khi M thay đổi trên cung BD.

Câu 5.

Ta có: $B=\frac{1}{(x+y)^3-3xy(x+y)}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{1-3xy}+\frac{1}{xy}=\frac{1-2xy}{xy(1-3xy)}$.

Theo Côsi: $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{1}{4}$.

Gọi B_o là một giá trị của B, khi đó, ∃x, y để: $B_o=\frac{1-2xy}{xy(1-3xy)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3B_o(xy)^2-(2+B_o)xy+1=0$ (1)

Để tồn tại x, y thì (1) phải có nghiệm xy $\Leftrightarrow \Delta=B_o^2-8B_o+4\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}B_o\ge 4+2\sqrt{3}\\ B_o\le 4-2\sqrt{3}\end{array}\right.$

Để ý rằng với giả thiết bài toán thì B > 0. Do đó ta có: $B_o\ge 4+2\sqrt{3}$.

Với $B_o=4+2\sqrt{3}\Rightarrow xy=\frac{2+B_o}{6B_o}=\frac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)}\Rightarrow x(1-x)=\frac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2-x+\frac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)}=0\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2},x=\frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}.$$

Vậy, $B_{min}=4+2\sqrt{3}$, đạt được khi $x=\frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$, $y=\frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$ hoặc

$$x=\frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2},\ y=\frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}.$$

Đề số 48

Câu 1.

Ta có $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\Rightarrow 2x=\sqrt{2}-1\Rightarrow 2x+1=\sqrt{2}$

$\Rightarrow 4x^2+4x-1=0$ (a)

Do đó:

$4x^5+4x^4-x^3+1=x^3(4x^2+4x-1)+1=1$

$4x^5+4x^4-5x^3+5x+3=x^3\ (4x^2+4x-1)\ -\ x\ (4x^2+4x-1)+\ (4x^2+4x-1)+4=4$

Từ (a) $\Rightarrow 2x^2+2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{2x^2+2x}=\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{2}-2x=1$

$$\Rightarrow\frac{1-\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+2x}}=\frac{1-\sqrt{2}x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-2x=1$$

Do đó $A=1^{19}+\left(\sqrt{4}\right)^3+1^{2014}=10$

Câu 2.

1) Vì x,y nguyên nên ta có: $5x^2+2y^2\le 2xy+4x+2y$ (*)

$\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (4x^2 - 4x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \le 2$

$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (2x - 1)^2 + (y - 1)^2 \le 2$

Ta có $(2x-1)^2 \le 2$, $2x-1$ lẻ $\Rightarrow (2x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Với $x = 0$ thì (*) $\Leftrightarrow y(y-1) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le y \le 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Với $x = 1$ thì (*) $\Leftrightarrow 2y^2 - 4y + 1 \le 0 \Leftrightarrow 2(y-1)^2 \le 1 \Rightarrow y = 1$ (thỏa mãn)

Vậy $(x, y) = (0;0); (0;1); (1;1)$.

2) Giải hệ $\begin{cases} 4x^3 - y^3 = x + 2y & (1) \\ 52x^2 - 82xy + 21y^2 = -9 & (2) \end{cases}$

Nhân vế trái của (1) với vế phải của (2) và nhân vế phải của (1) với vế trái của (2) ta có:

$$(-9)(4x^3 - y^3) = (x + 2y)(52x^2 - 82xy + 21y^2)$$

$\Leftrightarrow (-9)(4x^3 - y^3) - (x + 2y)(52x^2 - 82xy + 21y^2) = 0$

$\Leftrightarrow 8x^3 + 2x^2y - 13xy^2 + 3y^3 = 0$

$\Leftrightarrow (8x^3 - 8xy^2) + (2x^2y - 2xy^2) - (3y^3 + 3y^2x) = 0$

$\Leftrightarrow 8x(x^2 - y^2) + 2xy(x - y) - 3y^2(x - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(8x^2 + 10xy - 3y^2) = 0$

Biến đổi nhận được phương trình: $(x - y)(4x - y)(2x + 3y) = 0$

Với $x = y$ tìm được $(x; y) = (0;0)$ (thử vào hệ không thỏa mãn)

$(x; y) = (1;1); (-1;-1)$ (thử vào hệ thấy thỏa mãn)

Với $y = 4x$ tìm được $(x; y) = (0;0)$ (thử vào hệ không thỏa mãn)

Với $y = \frac{-2}{3}x$ tìm được $(x; y) = (0;0)$ (thử vào hệ không thỏa mãn)

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1;1); (-1;-1)$

Câu 3.

1) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$2x^2 + ax + a - 2 = 0$ (3)

(3) có $\Delta = (a - 4)^2$

Với $a \ne 4$ thì (3) có hai nghiệm phân biệt $x = -1; \frac{2-a}{2}$ là hoành độ các điểm A, B

Khi đó $A(-1;-2)$; $B(\frac{2-a}{2}; \frac{(2-a)^2}{-2})$

Do đó $AB = \sqrt{5} \Leftrightarrow AB^2 = 5 \Leftrightarrow (\frac{2-a}{2} + 1)^2 + \left(\frac{(2-a)^2}{-2} + 2\right)^2 = 5$

$$\Leftrightarrow \frac{(4-a)^2}{4} + \frac{(a^2-4a)^2}{4} = 5 \Leftrightarrow a^4 - 8a^3 + 17a^2 - 8a - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a^3-6a^2+5a+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a^3 - 6a^2 + 5a + 2 = 0 \end{array}\right.$$

a nguyên thỏa mãn $a^3 - 6a^2 + 5a + 2 = 0$ (4) thì a là ước của 2 $\Rightarrow a = \pm 1; \pm 2$

Thử $a = \pm 1; \pm 2$ vào (4) thấy không thỏa mãn.

Vậy $a = 2$ là giá trị cần tìm.

2) Sử dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{4}(a + \frac{1}{a}) \geq \frac{3}{2}$$

$$b + \frac{9}{4b} \geq 2\sqrt{\frac{9}{4}} = 3 \Rightarrow \frac{1}{2}(b + \frac{9}{4b}) \geq \frac{3}{2}$$

$$c + \frac{4}{c} \geq 2\sqrt{4} = 4 \Rightarrow \frac{1}{4}(c + \frac{4}{c}) \geq 1$$

Cộng vế với vế 3 bất đẳng thức trên ta có: $\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c + \frac{3}{4a} + \frac{9}{8b} + \frac{1}{c} \geq 4$ (3)

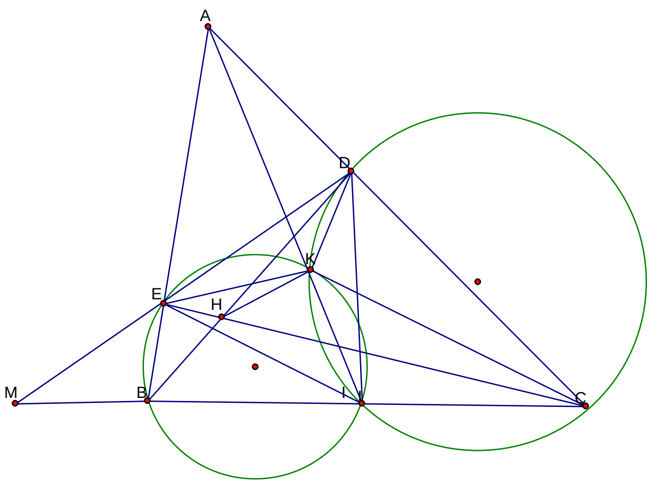
Từ $a + 2b + 3c \geq 10$ ta có $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}c = \frac{a+2b+3c}{4} \geq \frac{5}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $a + b + c + \frac{3}{4a} + \frac{9}{8b} + \frac{1}{c} \geq \frac{13}{2}$ (Đpcm)

(Dấu bằng xẩy ra khi $a = 1; b = \frac{3}{2}; c = 2$)

Lưu ý: *Học sinh không nhất thiết phải chỉ ra dấu bằng*

Câu 4.



1. Ta có: $\angle AEH = \angle ADH = 90^0 \Rightarrow AEHD$ nội tiếp (5)

Lại có: Tứ giác $BEKI$ nội tiếp $\Rightarrow \angle EKI = 180^0 - \angle ABC$

Tứ giác $DKIC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle DKI = 180^0 - \angle ACB$

do đó: $\angle EKD = 360^0 - \angle EKI - \angle DKI$

$$=360^0-(180^0-\angle ABC)-(180^0-\angle ACB)$$
$$=\angle ABC+\angle ACB=180^0-\angle BAC$$
$$\Rightarrow \angle EKD+\angle BAC=180^0 \Rightarrow AEKD \text{ nội tiếp} \qquad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra A,E,H,K,D thuộc một đường tròn.

2. Ta có: $\angle BEC=\angle BDC=90^0 \Rightarrow$ Tứ giác $BEDC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle ADE=\angle ABC$ (7)

Từ (6) $\Rightarrow \angle ADE=\angle AKE$ (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow \angle ABC=\angle AKE$ (9)

Tứ giác $BEKI$ nội tiếp $\Rightarrow \angle EKI+\angle ABC=180^0$ (10)

Từ (9) và (10) suy ra $\angle EKI+\angle AKE=180^0 \Rightarrow A, K, I$ thẳng hàng.

3. ΔBDC vuông tại D có DI là trung tuyến $\Rightarrow ID=IC \Rightarrow \Delta IDC$ cân

$\Rightarrow \angle IDC=\angle ICD$

ΔAID có $\angle DIA+\angle IAC=\angle IDC=\angle ICD=\angle KCD+\angle ICK$

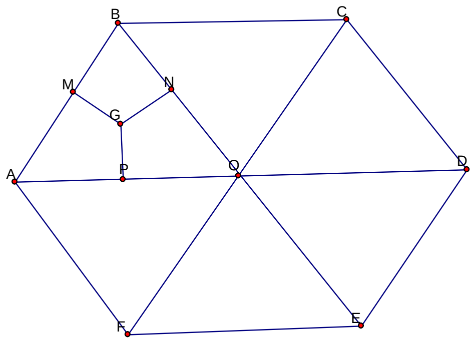
Mà tứ giác $DKIC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle DIA=\angle KCD$

Do đó $\angle IAC=\angle ICK$ (11)

Tứ giác $AEKD$ nội tiếp $\Rightarrow \angle IAC=\angle KED$ (12)

Từ (11) và (12) suy ra $\angle KED=\angle ICK \Rightarrow MEKC$ nội tiếp.

Câu 5.



Chia lục giác đều ABCDEF tâm O thành 6 tam giác đều cạnh 4cm (hìnhvẽ)

Theo nguyên lý Điriclê có ít nhất 4 điểm trong 19 điểm nằm trong hay trên cạnh một trong 6 tam giác đó. Không mất tính tổng quát giả sử tam giác đó là OAB.

Chia tam giác đều OAB trọng tâm G thành 3 tứ giác nội tiếp (hình vẽ) với GM $\perp$ AB; GN $\perp$ OB; GP $\perp$ OA.

Δ OAB đều cạnh bằng 4 có đường cao $\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3} \Rightarrow GA=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Các tứ giác GMBN, GMAP, GPON nội tiếp trong đường tròn đường kính GB, GA, GO đều bằng $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Theo nguyên lý Điriclê có ít nhất 2 điểm trong 4 điểm đang xét nằm trong hay trên cạnh một trong 4 tứ giác nói trên, giả sử tứ giác đó là GMBN $\Rightarrow$ khoảng cách giữa hai điểm đó không vượt quá đường kính GB = $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Đề số 49

Câu 1.

a) Phương trình tương đương với

$$\left(x^2+4y^2-4xy\right)+4\left(x-2y\right)+4=16-y^2 \Leftrightarrow \left(x-2y+2\right)^2=16-y^2;$$

mà $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $\left(x-2y+2\right)^2=16,\ y=0\ (1)$ hoặc $x-2y+2=0,\ y^2=16\ (2)$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow x=2,\ y=0$ hoặc $x=-6,\ y=0$.

$(2) \Leftrightarrow y=4,\ x=6$ hoặc $y=-4,\ x=-10$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $(x;\ y) \in \left\{(2;\ 0), (-6;\ 0), (6;\ 4), (-10;\ -4)\right\}$.

b) Bổ đề: Cho x, y là các số tự nhiên và số nguyên tố p có dạng $p=3k+2$ thì

$$x^3 \equiv y^3 \left(\text{mod } p\right) \Leftrightarrow x \equiv y \left(\text{mod } p\right).$$

Thật vậy, $x \equiv y\left(\text{mod } p\right) \Rightarrow x^3 \equiv y^3\left(\text{mod } p\right)$, đúng.

Với $x^3 \equiv y^3\left(\text{mod } p\right) \Rightarrow x^{3k} \equiv y^{3k}\left(\text{mod } p\right)$.

Với x, y cùng chia hết cho p thì hiển nhiên đúng.

Với $\left(x,\ p\right)=1, \left(y,\ p\right)=1$ ta có $x^{p-1} \equiv y^{p-1} \equiv 1\left(\text{mod } p\right) \Rightarrow x^{3k+1} \equiv y^{3k+1}\left(\text{mod } p\right)$

$\Rightarrow x.x^{3k} \equiv y.y^{3k}\left(\text{mod } p\right) \Rightarrow x \equiv y\left(\text{mod } p\right)$ vì $x^{3k} \equiv y^{3k}\left(\text{mod } p\right)$.

Áp dụng Bổ đề, ta có

$P(x) \equiv P(y)\left(\text{mod } 11\right) \Leftrightarrow (x-1)^3+11(x-1)+10 \equiv (y-1)^3+11(y-1)+10\left(\text{mod } 11\right)$

$\Leftrightarrow (x-1)^3 \equiv (y-1)^3\left(\text{mod } 11\right) \Leftrightarrow x-1 \equiv y-1\left(\text{mod } 11\right) \Leftrightarrow x \equiv y\left(\text{mod } 11\right)$.

Do đó, $P(x) \equiv P(y)\left(\text{mod } 11\right) \Leftrightarrow x \equiv y\left(\text{mod } 11\right)$.

Suy ra với mỗi $n \in \mathbb{N}$, trong 11 giá trị $P(n), P(n+1), \ldots, P(n+10)$, có duy nhất một giá trị chia hết cho 11. Do đó, trong các số $P(1), P(2), \ldots, P(99)$ có đúng 9 số chia hết cho 11, còn $P(0)=-2$ không chia hết cho 11.

Vậy có đúng 9 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2.

a) Ta có $P=\dfrac{a^3-3a+2}{a^3-4a^2+5a-2}=\dfrac{(a-1)^2(a+2)}{(a-1)^2(a-2)}=\dfrac{a+2}{a-2}$;

mà $a^3=110+3\sqrt[3]{55^2-3024}\left(\sqrt[3]{55-\sqrt{3024}}+\sqrt[3]{55+\sqrt{3024}}\right)$.

$\Rightarrow a^3=110+3a \Leftrightarrow a^3-3a-110=0$.

$\Leftrightarrow (a-5)(a^2+5a+22)=0 \Leftrightarrow a=5$. Suy ra $P=\dfrac{7}{3}$.

b) Ta có $x^3=3x-1(1),\ y^3=3y-1\,(2),\ z^3=3z-1\,(3)$.

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\begin{cases} x^3-y^3=3(x-y) \\ y^3-z^3=3(y-z) \\ z^3-x^3=3(z-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=3\,(4) \\ y^2+yz+z^2=3\,(5) \\ z^2+zx+x^2=3\,(6). \end{cases}$

Từ (4) và (5) suy ra

$$x^2-z^2+xy-yz=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y+z)=0 \Leftrightarrow x+y+z=0,$$

(vì x, y, z đôi một phân biệt).

Cộng (4), (5) và (6) theo vế với vế ta có

$\dfrac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)+\dfrac{1}{2}(x+y+z)^2=9 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=6$.

Câu 3.

a) Điều kiện xác định: $x \ge -\dfrac{1}{3},\ x \ne 0$.

Phương trình tương đương với $12x^2-(3x+1)=4x\sqrt{3x+1}$. Đặt $a=2x, b=\sqrt{3x+1}$ ta có phương trình $3a^2-b^2=2ab \Leftrightarrow (b-a)(b+3a)=0 \Leftrightarrow b=a$ hoặc $b=-3a$. Khi đó $\sqrt{3x+1}=2x$ hoặc $\sqrt{3x+1}=-6x$.

+) Với $\sqrt{3x+1}=2x$, điều kiện $x>0$, ta có

$\sqrt{3x+1}=2x \Leftrightarrow 3x+1=4x^2 \Leftrightarrow 4x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-\dfrac{1}{4}$ (loại).

+) Với $\sqrt{3x+1}=-6x$, điều kiện $-\dfrac{1}{3} \le x<0$, ta có

$\sqrt{3x+1}=-6x \Leftrightarrow 36x^2-3x-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{153}}{72}$ hoặc $x=\dfrac{3+\sqrt{153}}{72}$ (loại).

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1,\ x=\dfrac{3-\sqrt{153}}{72}$.

b) Nhân cả hai vế của (2) với 2 ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2+2y^2-4xy+x+8y-4=0\ (1) \\ 2x^2-2y^2+4x+2y-6=0 \qquad (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế với vế ta có

$$(x^2-4xy+4y^2)-3(x-2y)+2=0 \Leftrightarrow (x-2y)^2-3(x-2y)+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y-1)(x-2y-2)=0 \Leftrightarrow x=2y+1 \text{ hoặc } x=2y+2.$$

+) Với $x=2y+1$, thế vào (2) và rút gọn ta có $y(y+3)=0 \Leftrightarrow y=0$ hoặc $y=-3$.

Suy ra $x=1,\ y=0$ hoặc $x=-5,\ y=-3$.

+) Với $x=2y+2$, thế vào (2) và rút gọn ta có $3y^2+13y+5=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{-13+\sqrt{109}}{6}$

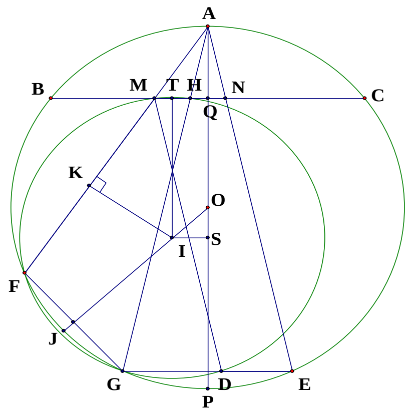
hoặc $y=\dfrac{-13-\sqrt{109}}{6}$.

Suy ra $x=\dfrac{-7+\sqrt{109}}{3}$, $y=\dfrac{-13+\sqrt{109}}{6}$ hoặc $x=\dfrac{-7-\sqrt{109}}{3}$, $y=\dfrac{-13-\sqrt{109}}{6}$.

Vậy hệ có 4 nghiệm $x=1, y=0$; $x=-5, y=-3$;

$$x=\frac{-7+\sqrt{109}}{3}, y=\frac{-13+\sqrt{109}}{6};\ x=\frac{-7-\sqrt{109}}{3}, y=\frac{-13-\sqrt{109}}{6}.$$

Câu 4.



a) Ta có $MNE = \frac{1}{2}$ (sđ AC + sđ BFE) $=\frac{1}{2}$ (sđ AB + sđ BFE) = AFE = sđ AC + sđ CE

Suy ra: $MNE + MFE = 180^o$

Vậy tứ giác $MNEF$ nội tiếp.

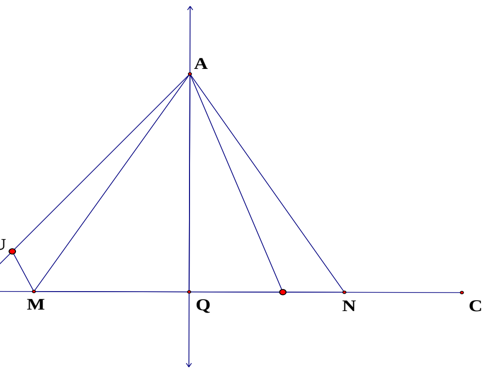
b) Gọi P là giao điểm khác A của AO với đường tròn $(O; R)$.

Lấy G đối xứng với E qua $AP \Rightarrow D \in EG, G \in (O)$

Ta có $MDG = NEG$,

$AEG + AFG = 180^o \Rightarrow MDG + MFG = 180^o$

Suy ra tứ giác $MDGF$ nội tiếp (1)



Gọi giao điểm của AG và BC là H

Chứng minh tương tự a) có tứ giác $MHGF$ nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) suy ra các điểm M, H, D, G, F nằm trên một đường tròn.

Trung trực của đoạn thẳng FG đi qua O và cắt đường tròn (O) tại J; $I \in OJ$, sđ JF =sđ JG và sđ PG =sđ PE nên $JOP = \alpha$ hay I nằm trên đường thẳng cố định. Đó là đường thẳng đi qua O và tạo với AO một góc α không đổi.

c) Hạ $IT \perp BC$ $(T \in BC) \Rightarrow TH = TM$. Do $QH = QN$, suy ra $IS = \frac{1}{2}MN$

Tam giác vuông OSI có $IOS = \alpha$ không đổi nên OI nhỏ nhất khi và chỉ khi IS nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MN nhỏ nhất. Ta chứng minh MN nhỏ nhất khi và chỉ khi tam giác AMN cân tại A.

Thật vậy, trên BC lấy M' N' sao cho $M'AN' = \alpha$. Không mất tính tổng quát giả sử $QM' > QN'$ suy ra $AM' > AN'$. Trên đoạn AM' lấy điểm U sao cho $AU = AN'$

$\Rightarrow \Delta AUM = \Delta ANN'$ (c.g.c) $\Rightarrow S_{AM'M} > S_{ANN'} \Rightarrow MM' > NN' \Rightarrow M'N' > MN$

Với $\alpha = 60^o$; $BC = R$ suy ra $AQ = R - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}$,

$$MN = \frac{R\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{R\left(2\sqrt{3}-3\right)}{3} \Rightarrow OI = \frac{R\left(2\sqrt{3}-3\right)}{6}.$$

Câu 5.

Chứng minh được: $2x^2 + y^2 + z^2 \ge 2x\left(y+z\right)$.

Tương tự ta có $2y^2 + z^2 + x^2 \ge 2y\left(z+x\right)$, $2z^2 + x^2 + y^2 \ge 2z\left(x+y\right)$.

Do đó ta sẽ chứng minh $\frac{x\left(y+z\right)}{4-yz} + \frac{y\left(z+x\right)}{4-zx} + \frac{z\left(x+y\right)}{4-xy} \ge 2xyz$.

Bất đẳng thức này tương đương với $\frac{y+z}{\left(4-yz\right)2yz} + \frac{z+x}{\left(4-zx\right)2zx} + \frac{x+y}{\left(4-xy\right)xy} \ge 1$.

Ta có $\frac{y+z}{\left(4-yz\right)2yz} \ge \frac{2\sqrt{yz}}{\left(2-\sqrt{yz}\right)\left(2+\sqrt{yz}\right)2yz} = \frac{1}{\left(2-\sqrt{yz}\right)\sqrt{yz}\left(2+\sqrt{yz}\right)}$, dễ có

$0 < \left(2-\sqrt{yz}\right)\sqrt{yz} = -\left(\sqrt{xy}-1\right)^2 + 1 \le 1$ nên $\frac{1}{\left(2-\sqrt{yz}\right)\sqrt{yz}\left(2+\sqrt{yz}\right)} \ge \frac{1}{2+\sqrt{yz}}$.

Vậy nên $\frac{y+z}{\left(4-yz\right)2yz} \ge \frac{1}{2+\sqrt{yz}}$, tương tự có $\frac{z+x}{\left(4-zx\right)2zx} \ge \frac{1}{2+\sqrt{zx}}$ và

$\frac{x+y}{\left(4-xy\right)2xy} \ge \frac{1}{2+\sqrt{xy}}$.

Do đó $\frac{y+z}{\left(4-yz\right)2yz} + \frac{z+x}{\left(4-zx\right)2zx} + \frac{x+y}{\left(4-xy\right)xy} \ge \frac{1}{2+\sqrt{xy}} + \frac{1}{2+\sqrt{yz}} + \frac{1}{2+\sqrt{zx}}$.

Với *a, b, c*>0 có

$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3 + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \ge 3+2+2+2 = 9$ nên

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$ (*).

Áp dụng (*) ta có $\frac{1}{2+\sqrt{xy}} + \frac{1}{2+\sqrt{yz}} + \frac{1}{2+\sqrt{zx}} \ge \frac{9}{6+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}} \ge 1$;

(Vì $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx} \le \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2} = x+y+z = 3$).

Vậy $\frac{y+z}{\left(4-yz\right)2yz} + \frac{z+x}{\left(4-zx\right)2zx} + \frac{x+y}{\left(4-xy\right)xy} \ge 1$.

Do vậy ta có $\frac{2x^2+y^2+z^2}{4-yz} + \frac{2y^2+z^2+x^2}{4-zx} + \frac{2z^2+x^2+y^2}{4-xy} \ge 4xyz$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Đề số 50

Câu 1.

a) Điều kiện $a \ge 0; a \ne 4; a \ne 16$.

$$M = \frac{2\sqrt{a}-16}{a-6\sqrt{a}+8} - \frac{\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}-2} - \frac{2\sqrt{a}+1}{4-\sqrt{a}}$$
$$= \frac{2\sqrt{a}-16-\left(\sqrt{a}+4\right)\left(\sqrt{a}-4\right)+\left(2\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-2\right)}{a-6\sqrt{a}+8}$$
$$= \frac{a-\sqrt{a}-2}{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}-4\right)} = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-4}.$$

Từ $M = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-4} = 1 + \frac{5}{\sqrt{a}-4}$.

Để giá trị của M nguyên $5 \vdots \left(\sqrt{a}-4\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-4\right) \in \{\pm 1; \pm 5\}$.

- Nếu $\sqrt{a}-4 = -5 \Rightarrow \sqrt{a} = -1(ktm)$;

- Nếu $\sqrt{a}-4 = -1 \Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9(tm)$;

- Nếu $\sqrt{a}-4 = 1 \Rightarrow \sqrt{a} = 5 \Rightarrow a = 25(tm)$;

- Nếu $\sqrt{a}-4 = 5 \Rightarrow \sqrt{a} = 9 \Rightarrow a = 81(tm)$.

Vậy $a \in \{9; 25; 81\}$.

b) Từ $P(x) \ge 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ ta chứng minh được $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac \le 0 \end{cases}$

Do $b^2 - 4ac \le 0 \Rightarrow c \ge \frac{b^2}{4a} \Leftrightarrow a + b + c \ge a + b + \frac{b^2}{4a} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{b-a} \ge \frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)}$

Mặt khác $\frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)} = \frac{16a^2-8ab+b^2+12a(b-a)}{4a(b-a)} = 3 + \frac{(4a-b)^2}{4a(b-a)} \ge 3$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b = c = 4a > 0$.

Vậy $MinQ = 3 \Leftrightarrow b = c = 4a > 0$.

Câu 2.

Điều kiện $x \ne m-1; x \ne -m-2$.

Khi đó phương trình đã cho có dạng

$x^2 + (m+3)x + m + 2 = x^2 + (1-m)x \Leftrightarrow (2m+2) = -m-2 \quad (1)$

- Nếu $m = -1$; phương trình (1) có dạng $0x = -1$, vô nghiệm, suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

- Nếu $m \ne -1$; phương trình (1) có nghiệm $x = -\frac{m+2}{2m+2}$.

Do đó phương trình đã cho vô nghiệm nếu $\left[\begin{array}{l} -\dfrac{m+2}{2m+2}=m-1 \\ -\dfrac{m+2}{2m+2}=-m-2 \end{array}\right.$

Nếu $-\dfrac{m+2}{2m+2}=m-1 \Leftrightarrow -m-2=2m^2-2 \Leftrightarrow 2m^2+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Nếu $-\dfrac{m+2}{2m+2}=-m-2 \Leftrightarrow -m-2=-2m^2-6m-4 \Leftrightarrow 2m^2+5m+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy có 4 giá trị của m để phương trình vô nghiệm là : $-2\,;-1\,;0;-\dfrac{1}{2}$.

Câu 3.

Nhận thấy với mọi số nguyên dương m ta có $p^{1954^{5^7}}-1=4m$

Ta chứng minh bài toán tổng quát $p^{4m}-1 \vdots 60$ với mọi số nguyên tố $p>5$ và mói mọi số nguyên dương m.

Thật vậy, có $p^{4m}-1=\left(p^4\right)^m-1^m=\left(p^4-1\right).A=(p-1)(p+1)\left(p^2+1\right).A \quad (\forall A\in\mathbb{Z})$

Do p lẻ nên $p-1; p+1$ là hai số chẵn liên tiếp $(p-1)(p+1)\vdots 4 \quad (1)$

Lại có $(p-1)p(p+1)\vdots 3$, mà p nguyên tố và $p>5$ nên p không chia hết cho 3 $\Rightarrow (p-1)(p+1)\vdots 3 \quad (2)$

Do p nguyên tố và $p>5$ nên p không chia hết cho 5 $\Rightarrow p=5k\pm 1; 5k\pm 2$

- Nếu $p=5k\pm 1 \Rightarrow p^2=25k^2\pm 10k+1=5n+1$

- Nếu $p=5k\pm 2 \Rightarrow p^2=25k^2\pm 20k+4=5l-1 \quad (\forall k,n,l\in\mathbb{Z})$

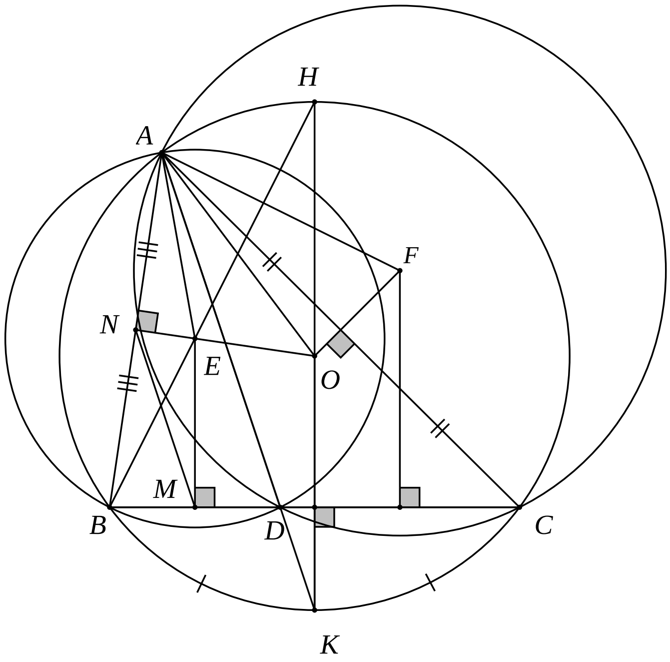
Suy ra

$p^4=(5n+1)(5l-1) \Rightarrow p^4-1=5q\vdots 5 \Rightarrow (p-1)(p+1)\left(p^2+1\right)\vdots 5 \quad (\forall q\in\mathbb{Z})(3)$

Từ (1);(2);(3) suy ra $(p-1)(p+1)\left(p^2+1\right)\vdots 3.4.5$ do 3,4,5 là các số đôi một nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow (p-1)(p+1)\left(p^2+1\right)\vdots 60$

Vậy $p^{4m}-1\vdots 60$ hay đpcm.

Câu 4.



a) Trong đường tròn $(O;R)$ ta có $AOE=\frac{1}{2}AOB=ACB \quad (1)$

Trong đường tròn $(E;EA)$ ta có

$$AEO=\frac{1}{2}\text{sđ } ADB=\frac{1}{2}\left(360^0-2ADB\right)=180^0-ADB=ADC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta AEO \# \Delta ADC(g-g)$

b) Tương tự a) ta có $\Delta AFO \# \Delta ADB(g-g)$

$\Rightarrow AEO=ADC; AFO=ADB \Rightarrow AEO+AFO=ADC+ADB=180^0$

$\Rightarrow AEOF$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow E,F$ nằm về hai phía của AO, suy ra

$$S_{AEOF}=S_{AOE}+S_{AOF}=\frac{1}{4}(OE.AB+OF.AC) \quad (3)$$

Lại có $\frac{OE}{CD}=\frac{AO}{AC}\Rightarrow OE=\frac{AO.CD}{AC} \quad (4); \frac{OF}{BD}=\frac{AO}{AB}\Rightarrow OF=\frac{AO.BD}{AB} \quad (5)$

Thay (4); (5) vào (3) ta được $4S_{AEOF}=\frac{AO.CD}{AC}.AB+\frac{AO.BD}{AB}.AC \quad (6)$

Mặt khác AD là tia phân giác của tam giác $ABC \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC} \quad (7)$

Thay (7) vào (6) ta được

$$4S_{AEOF}=AO\left(CD.\frac{AB}{AC}+BD.\frac{AC}{AB}\right)=AO\left(CD.\frac{BD}{CD}+BD.\frac{CD}{BD}\right)$$

$$=AO(BD+CD)=AO.BC=R.a\Rightarrow S_{AEOF}=\frac{R.a}{4}(\text{đvdt})$$

c) Đường trung trực của BC cắt cung lớn BC tại H, cung nhỏ BC tại K.

Khi đó H và K là hai điểm cố định và điểm chính giữa của các cung tương ứng.

Gọi M, N tương ứng là trung điểmcủa $BD, AB \Rightarrow BNE = BME = 90^0$

Do đó B, M, N, E cùng thuộc một đường tròn đường kính BE.

$BEM = BNM = BAD = \frac{1}{4}$sđ BKC.

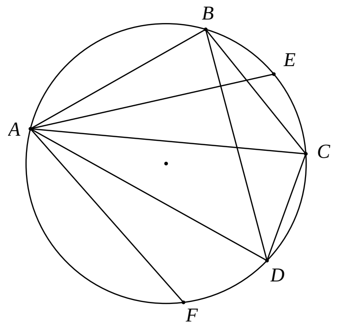
Lại có $BHK = \frac{1}{4}$sđ $BKC \Rightarrow BEM = BHK \quad (8)$

Mặt khác $EM // HK$ (cùng vuông góc với BC), H, E cùng phía so với BC (9)

Gọi H' là giao điểm của $BE; HK \Rightarrow BEM = BH'K \quad (10)$

Từ (8); (9); (10) suy ra $H \equiv H' \Rightarrow B, E, H$ thẳng hàng $\Rightarrow E \in BH$ cố định.

Câu 5.



- Vì các điểm phân biệt nằm trên một đường tròn nên ba điểm bất kỳ luôn tạo thành một tam giác.
- Có 21 điểm được tô bằng 4 màu, do đó có ít nhất 6 điểm có cùng màu.

* Giả sử 6 điểm đó là A, B, C, D, E, F.

+ Nối 5 đoạn AB, AC, AD, AE, AF và tô bằng 2 màu nâu hoặc đen, khi đó có ít nhất 3 đoạn cùng màu, giả sử AB, AC, AD được tô cùng màu đen.

Ta xét tam giác BCD, xảy ra hai khả năng

TH1: Nếu ba cạnh BC, BD, DC được tô cùng màu nâu thì tam giác BCD có ba đỉnh cùng màu đỏ và ba cạnh cùng màu nâu (thỏa mãn)

TH2: Nếu ba cạnh BC, BD, DC có ít nhất một cạnh màu đen, giả sử BC là cạnh màu đen, khi đó tam giác ABC có 3 đỉnh cùng tô màu đỏ, ba cạnh cùng tô màu đen (thỏa mãn)

Vậy luôn tồn tại một tam giác có ba đỉnh cùng màu và ba cạnh cùng màu.