PHẦN MỘT. CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ

Chuyên đề 1

RÚT GỌN VÀ TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai ta vận dụng thích hợp các phép tính về căn thức và các phép biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai. Khi phối hợp các phép biến đổi căn thức với các biến đổi biểu thức có dạng phân thức cần chú ý :

– Trước tiên cần tìm điều kiện xác định (ĐKXĐ) đối với căn thức cũng như đối với phân thức.

$$\boxed{\sqrt{A} \text{ có nghĩa khi } A \geq 0.}$$

Ví dụ, $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ có nghĩa khi $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$

– Điều kiện để bỏ dấu giá trị tuyệt đối :

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$$

– Kết quả rút gọn để ở dạng nào là tùy thuộc vào yêu cầu cụ thể của bài toán.

Ví dụ : Sau khi thực hiện các phép tính và rút gọn kết quả được

$$P = \frac{x - 4\sqrt{x} + 3}{x - 1} \text{ (mẫu thức không chứa dấu căn).}$$

Ta cần rút gọn tiếp

$$P = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} \text{ (với điều kiện } x \neq 1).$$

Đến đây có thể giải tiếp được những câu hỏi tiếp theo, như tìm x để :

- P có giá trị dương ;
- P có giá trị bằng k ;
- P có giá trị nhỏ nhất,...

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

Giải

$$A = \sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1} - \sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} - \sqrt{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \left|\sqrt{3} - 1\right| - \left|2 + \sqrt{3}\right|$$

$$= \sqrt{3} - 1 - (2 + \sqrt{3}) = -3.$$

Nhận xét : Các biểu thức $4 - 2\sqrt{3}$; $7 + 4\sqrt{3}$ đều có dạng $m \pm p\sqrt{n}$ trong đó $p\sqrt{n} = 2ab$ với $a^2 + b^2 = m$. Những biểu thức như vậy đều viết được dưới dạng bình phương của một biểu thức.

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.

Giải

Cách thứ nhất :

$$B = \sqrt{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \left|\sqrt{3} + \sqrt{2}\right| - \left|\sqrt{3} - \sqrt{2}\right| = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Cách thứ hai :

$$B = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$$

Ta có : $B^2 = 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{\left(5 + 2\sqrt{6}\right)\left(5 - 2\sqrt{6}\right)}$

$$= 10 - 2\sqrt{1} = 8.$$

Vì $B > 0$ nên $B = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Nhận xét : Các biểu thức $5 + 2\sqrt{6}$ và $5 - 2\sqrt{6}$ là hai biểu thức liên hợp. Gặp những biểu thức như vậy, để tính B ta có thể tính B^2 trước rồi sau đó suy ra B.

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức

$$C = \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x + 1}}.$$

Giải. ĐKXĐ : $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 2 - 2\sqrt{x + 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x + 2 \geq 2\sqrt{x + 1}. \end{cases}$

Với $x \geq -1$ thì $x + 2 \geq 2\sqrt{x + 1} \Leftrightarrow (x + 2)^2 \geq 4(x + 1)$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \geq 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Vậy ĐKXĐ là $x \geq -1$.

Cách thứ nhất :

$$C = \sqrt{x + 1 - 2\sqrt{x + 1} + 1} + \sqrt{x + 1 + 2\sqrt{x + 1} + 1}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{x + 1} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x + 1} + 1\right)^2}$$

$$= \left|\sqrt{x + 1} - 1\right| + \left|\sqrt{x + 1} + 1\right|.$$

• Nếu $\sqrt{x + 1} \geq 1$ (hay $x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$)

thì $C = \sqrt{x + 1} - 1 + \sqrt{x + 1} + 1 = 2\sqrt{x + 1}$.

• Nếu $0 \leq \sqrt{x + 1} < 1$ (hay $0 \leq x + 1 < 1 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0$)

thì $C = 1 - \sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 1} + 1 = 2$.

Cách thứ hai :

Ta có

$$C^2 = x + 2 - 2\sqrt{x + 1} + x + 2 + 2\sqrt{x + 1} + 2\sqrt{(x + 2)^2 - 4(x + 1)}$$

$$= 2x + 4 + 2\sqrt{x^2 + 4x + 4 - 4x - 4}$$

$$= 2x + 4 + 2\sqrt{x^2} = 2x + 4 + 2|x|.$$

• Nếu $x \geq 0$ thì $C^2 = 4(x + 1)$ suy ra $C = 2\sqrt{x + 1}$ (vì $C > 0$).

• Nếu $-1 \leq x < 0$ thì $C^2 = 2x + 4 - 2x = 4$ suy ra $C = 2$ (vì $C > 0$).

Ví dụ 4. Chứng minh các đẳng thức :

a) $\left(\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{2\sqrt{2}-2}+\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-2}\right):\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=1$;

b) $\dfrac{4}{3+\sqrt{5}}+\dfrac{8}{\sqrt{5}-1}-\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=7.$

Giải. a) Xét vế trái T

$$T=\left[\frac{\sqrt{7}(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}-1)}\right]:\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

$$=\left[\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right].\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{1}$$

$$=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}.\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{1}$$

$$=\frac{7-5}{2}$$

$$=1=\text{VP}.$$

b) Xét vế trái T

$$T=\frac{4(3-\sqrt{5})}{4}+\frac{8(\sqrt{5}+1)}{4}-\left|2-\sqrt{5}\right|$$

$$=3-\sqrt{5}+2\sqrt{5}+2-(\sqrt{5}-2)$$

$$=7=\text{VP}.$$

Nhận xét : Cách giải trên khá đơn giản nhờ có việc trục căn thức ở mẫu. Nếu quy đồng mẫu số thì việc thực hiện các phép tính rất phức tạp.

Ví dụ 5. Cho biểu thức $P=\dfrac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{2\sqrt{x}-3}{3-\sqrt{x}}-\dfrac{3(3\sqrt{x}-5)}{x-2\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn P ;

b) Tìm giá trị của P, biết $x=4+2\sqrt{3}$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Giải. ĐKXĐ : $x \geq 0$; $x \neq 9$.

a) $P = \dfrac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{3(3\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$

$= \dfrac{(3\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)+(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)-3(3\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$

$= \dfrac{3x-9\sqrt{x}+2\sqrt{x}-6+2x+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3-9\sqrt{x}+15}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$

$= \dfrac{5x-17\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$

$= \dfrac{5x-15\sqrt{x}-2\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$

$= \dfrac{(\sqrt{x}-3)(5\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$

$= \dfrac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}.$

b) Ta có $x = 4+2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3}+1.$

Do đó $P = \dfrac{5(\sqrt{3}+1)-2}{\sqrt{3}+1+1} = \dfrac{5\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2} = \dfrac{(5\sqrt{3}+3)(2-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+2)(2-\sqrt{3})}$

$= 7\sqrt{3}-9.$

c) Ta có $P = \dfrac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{5\sqrt{x}+5-7}{\sqrt{x}+1}$

$P = 5 - \dfrac{7}{\sqrt{x}+1}.$

Vì $\dfrac{7}{\sqrt{x}+1} > 0$ nên P có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{7}{\sqrt{x}+1}$ lớn nhất

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = 0.$

Khi đó min $P = 5 - 7 = -2.$

Ví dụ 6. Cho biểu thức

$$Q = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{5\sqrt{x} + 2}{4 - x}\right) : \frac{3\sqrt{x} - x}{x + 4\sqrt{x} + 4}.$$

a) Rút gọn Q ;

b) Tìm x để Q = 2 ;

c) Tìm các giá trị của x để Q có giá trị âm.

Giải. ĐKXĐ : $x > 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$.

a) $$Q = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2) - 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) - (5\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} : \frac{\sqrt{x}(3 - \sqrt{x})}{(\sqrt{x} + 2)^2}$$

$$= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2 - 2x + 4\sqrt{x} - 5\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{\sqrt{x}(3 - \sqrt{x})}$$

$$= \frac{-x + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{\sqrt{x}(3 - \sqrt{x})}$$

$$= \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{\sqrt{x}(3 - \sqrt{x})}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3}.$$

b) $Q = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 = 2\sqrt{x} - 6$

$\Leftrightarrow -\sqrt{x} = -8 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow x = 64$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

c) $Q < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} < 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 < 0$ (vì $\sqrt{x} + 2 > 0$) $\Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$.

Kết hợp với ĐKXĐ ta có $Q < 0$ khi $0 < x < 9$ và $x \neq 4$.

C. Bài tập

1. Rút gọn biểu thức

a) $\dfrac{15}{\sqrt{6}-1}+\dfrac{8}{\sqrt{6}+2}+\dfrac{6}{3-\sqrt{6}}-9\sqrt{6}$;

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

2. Tính

a) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}$;

b) $\sqrt{(\sqrt{5}+1)\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$.

3.

a) Tính $\left(\sqrt[3]{2}+1\right)^3+\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^3$;

b) Tính giá trị của biểu thức $A = x^3y - xy^3$ với

$x=\dfrac{6}{2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4}}$; $y=\dfrac{2}{2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4}}$.

4. Cho $P=\dfrac{2\sqrt{x}+\left|\sqrt{x}-1\right|}{3x+2\sqrt{x}-1}$.

Rút gọn P rồi tính giá trị của P với $x=\dfrac{4}{9}$; $x=\dfrac{9}{4}$.

5. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{4x}{4-x}\right):\dfrac{x+5\sqrt{x}+6}{x-4}$.

a) Rút gọn P ;

b) Tính giá trị của P khi $x=\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;

c) Tìm x để P = 2.

6. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-4}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt{x}+4}\right).\dfrac{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}{6\sqrt{x}-18}$.

a) Rút gọn P ;

b) Tìm các giá trị của x để $P > 0$;

c) Tìm các giá trị của x để $P < 1$.

7. Cho biểu thức $P = \dfrac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

a) Rút gọn P ;

b) Tìm x để $|P| = \dfrac{2}{3}$;

c) Chứng minh rằng với những giá trị của x làm cho P được xác định thì $P < 1$.

8. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{x-\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{x-\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-2}\right)$.

a) Rút gọn P ;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P ;

c) Tìm x để $P.\dfrac{x-1}{x^2+8x} < -2$.

Chuyên đề 2

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng $ax + by = c$ trong đó x, y là ẩn ; a, b, c là các số cho trước, a và b không đồng thời bằng 0.

2. Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn luôn có vô số nghiệm (x ; y). Công thức nghiệm tổng quát là :

$$\begin{cases} x = t \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{c-at}{b} \end{cases} \text{ với } b \neq 0 \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = \dfrac{c-bt}{a} \\ y = t \in \mathbb{R}. \end{cases} \ (a \neq 0)$$

Chú ý : Phương trình $ax + by = c$ có nghiệm nguyên khi và chỉ khi c chia hết cho ƯCLN(a, b).

3. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng :

$$(\text{I})\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

trong đó a và b cũng như a' và b' không đồng thời bằng 0.

Với $a'b'c' = 0$ ta dễ dàng đưa được về các trường hợp đặc biệt đã biết.

Với $a'b'c' \neq 0$ thì:

- Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.
- Hệ (I) vô nghiệm khi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$.
- Hệ (I) có vô số nghiệm khi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

4. Các phương pháp giải hệ phương trình :

a) Phương pháp thế

- Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho thành một hệ mới trong đó có phương trình một ẩn.
- Giải phương trình một ẩn này rồi suy ra nghiệm của hệ.

b) Phương pháp cộng đại số

- Nhân hai vế của mỗi phương trình với một thừa số phụ sao cho giá trị tuyệt đối của hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình bằng nhau.
- Dùng quy tắc cộng đại số để được một hệ mới trong đó có một phương trình một ẩn.
- Giải phương trình một ẩn này rồi suy ra nghiệm của hệ.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 7. Cho phương trình $3x - 2y = 6$. (1)

a) Viết công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1) ;

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình (1).

Giải

a) Xét $3x - 2y = 6$. (1)

Suy ra $y = \dfrac{3x - 6}{2}$.

Cho x một giá trị t tùy ý ta tính được giá trị tương ứng của y.

Ta được công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1) là :

$$\begin{cases} x = t \in \mathbb{R}. \\ y = \dfrac{3t - 6}{2}. \end{cases}$$

b) Ta có $y = \dfrac{3x - 6}{2} = \dfrac{2x + x - 6}{2} = x + \dfrac{x - 6}{2}$

Đặt $\dfrac{x - 6}{2} = t$ $(t \in \mathbb{Z})$ suy ra $x = 2t + 6$.

Khi đó nghiệm nguyên của phương trình (1) là :

$$\begin{cases} x = 2t + 6 \\ y = 2t + 6 + t \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = 2t + 6 \\ y = 3t + 6 \end{cases} (t \in \mathbb{Z}).$$

Cho t một giá trị nguyên nào đó ta được một nghiệm nguyên của phương trình (1).

Chẳng hạn, với $t = 1$ thì $\begin{cases} x = 8 \\ y = 9 \end{cases}$

với $t = 2$ thì $\begin{cases} x = 10 \\ y = 12. \end{cases}$

Ví dụ 8. Tìm nghiệm nguyên $(x ; y)$ của phương trình $(x - 3)y^2 = x^2$. (2)

Giải

- Với $x = 3$ thì (2) trở thành $0.y^2 = 9$, vô nghiệm.
- Với $x \neq 3$ thì

$$y^2 = \frac{x^2}{x - 3} = \frac{x^2 - 9 + 9}{x - 3} = x + 3 + \frac{9}{x - 3}.$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $\dfrac{9}{x - 3} \in \mathbb{Z}$.

Do đó $x - 3 \in Ư(9) = \{\pm 1 ; \pm 3 ; \pm 9\}$.

Ta có :

$x - 3$	1	–1	3	–3	9	–9
x	4	2	6	0	12	–6
y^2	16	–4	12	0	16	–4
y	± 4			0	±4	

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình (2) là

$$(0 ; 0) ; (4 ; 4) ; (4 ; -4) ; (12 ; 4) ; (12 ; -4).$$

Nhận xét : Phương pháp giải trong ví dụ trên gọi là phương pháp *tách ra các giá trị nguyên.*

$\dfrac{x^2}{x - 3}$ được tách thành $x + 3 + \dfrac{9}{x - 3}$.

Vì $x + 3$ có giá trị nguyên nên $\dfrac{9}{x - 3}$ phải có giá trị nguyên, từ đó tìm được x và suy ra giá trị của y.

Ví dụ 9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 5y = 19 \ (1) \\ 3x + 2y = 6 \ (2) \end{cases}$$

Giải.

Cách thứ nhất : (Giải bằng phương pháp thế)

- Rút x từ phương trình (1) : $x = 19 + 5y$ (3)
- Thế $x = 19 + 5y$ vào phương trình (2) :

$3(19 + 5y) + 2y = 6$

$\Leftrightarrow 57 + 15y + 2y = 6$

$\Leftrightarrow 17y = -51 \Leftrightarrow y = -3.$

- Thay $y = -3$ vào phương trình (3) được $x = 19 - 15$, $x = 4$.

Vậy $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3. \end{cases}$

Cách thứ hai : (Giải bằng phương pháp cộng)

$\begin{cases} x - 5y = 19 \ (1) \\ 3x + 2y = 6 \ (2) \end{cases} \left| \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right|$ (cột bên phải là thừa số phụ)

$$
-\begin{cases}3x - 15y = 57\\3x + 2y = 6\end{cases}
$$

$-17\,y = 51$ (trừ từng vế của hai phương trình)

$y = -3.$

Thay $y = -3$ vào (1) được $x - 5.(-3) = 19 \Leftrightarrow x = 4.$

Vậy $\begin{cases}x = 4\\y = -3.\end{cases}$

Ví dụ 10. Giải hệ phương trình

$$
\begin{cases}\dfrac{3}{x+y} + \dfrac{10}{x-y} = 1\\[2mm]\dfrac{5}{x+y} + \dfrac{6}{x-y} = -1\end{cases}
$$

Giải. ĐK : $x \neq \pm y$.

Ta đặt (I) $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y} = a & (1)\\[2mm]\dfrac{1}{x-y} = b & (2)\end{cases}$

Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành

$$
\begin{cases}3a + 10b = 1 & (1)\\5a + 6b = -1 & (2)\end{cases}\left|\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right.
$$

$$
-\begin{cases}15a + 50b = 5\\15a + 18b = -3\end{cases}
$$

$32b = 8$

$b = \dfrac{1}{4}.$

Thay $b = \dfrac{1}{4}$ vào phương trình (1) ta được $3a + \dfrac{5}{2} = 1$, $3a = \dfrac{-3}{2}$, $a = -\dfrac{1}{2}.$

Vậy $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Thay kết quả này vào hệ (I) ta được

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \text{(thỏa mãn ĐK).}$$

Ví dụ 11. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m-1)x - y = 2 & (1) \\ mx + y = m & (2). \end{cases}$

a) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x ; y)$.

b) Xác định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện $x + y < 0$.

Giải

a) • Nếu $m = 0$ thì hệ đã cho trở thành $\begin{cases} -x - y = 2 \\ y = 0. \end{cases}$

Hệ này có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0. \end{cases}$

Vậy $m = 0$ là một giá trị cần tìm.

• Nếu $m \neq 0$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi

$$\frac{m-1}{m} \neq \frac{-1}{1} \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}.$$

b) $+\begin{cases} (m-1)x - y = 2 & (1) \\ mx + y = m & (2) \end{cases}$

$$(2m-1)x = m + 2.$$

Nếu $m \neq \dfrac{1}{2}$ thì $x = \dfrac{m+2}{2m-1}$.

Thay $x = \dfrac{m+2}{2m-1}$ vào phương trình (2) ta được

$$y = m - mx = m(1 - x) = m\left(1 - \frac{m + 2}{2m - 1}\right)$$

$$y = \frac{m^2 - 3m}{2m - 1}.$$

Vậy $\begin{cases} x = \dfrac{m + 2}{2m - 1} \\ y = \dfrac{m^2 - 3m}{2m - 1}. \end{cases}$

Khi đó $x + y < 0 \Leftrightarrow \dfrac{m + 2}{2m - 1} + \dfrac{m^2 - 3m}{2m - 1} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 - 2m + 2}{2m - 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow 2m - 1 < 0 \text{ (vì } m^2 - 2m + 2 = (m - 1)^2 + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 12. Giải hệ phương trình ba ẩn số :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 11 & (1) \\ 2x - y - z = 7 & (2) \\ x + y = 6 & (3) \end{cases}$$

Giải. Rút x từ phương trình (3) : $x = 6 - y$.   (4)

Thế biểu thức của x vào phương trình (1) và (2) được

$$\begin{cases} 6 - y + 2y - 3z = 11 \\ 2(6 - y) - y - z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 3z = 5 \\ 3y + z = 5. \end{cases}$$

$$+\begin{cases} y - 3z &= 5 & (1') \\ 9y + 3z &= 15 & (2') \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 10\,y &= 20 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Thay $y = 2$ vào phương trình (1') được $2 - 3z = 5 \Rightarrow z = -1$.

Thay $y = 2$ vào phương trình (4) được $x = 6 - 2 \Rightarrow x = 4$.

Do đó $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ hay (x; y; z) = (4 ; 2 ; –1).

Nhận xét : Nói chung, để giải hệ phương trình nhiều ẩn ta có thể dùng phương pháp thế. Tùy theo đặc điểm của từng hệ phương trình ta cũng có thể dùng phương pháp cộng.

C. Bài tập

9. Cho phương trình $2x - 5y = 3$. (1)

a) Viết công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1) ;

b) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình (1).

10. Tìm x và y biết : $|2x + 7y - 17| + (5x - 3y + 19)^2 = 0$.

11. Cho phương trình $x^2 + (2a - 5)x - 3b = 0$. (1)

Hãy xác định các hệ số a và b sao cho phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.

12. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{27}{x + y} + \dfrac{21}{x - y} = 2 \\ \dfrac{81}{x + y} - \dfrac{105}{x - y} = -2 \end{cases}$

13. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3x - |y - 2| = 3 \\ 6x + 5y = 7 \end{cases}$

14. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 3x + my = 10 \\ x - y = 5 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x; y) trong đó x = 4 ;

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x ; y) thỏa mãn $5x + 2y = 32$.

15. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{x + y}{xy} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{y + z}{yz} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{z + x}{zx} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Chuyên đề 3
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. Kiến thức cơ bản

1. *Phương trình bậc hai một ẩn* là phương trình có dạng

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

trong đó x là ẩn ; a, b, c là những số cho trước và $a \neq 0$.

2. Công thức nghiệm

Công thức nghiệm tổng quát	*Công thức nghiệm thu gọn*
Bước 1 : Tính $\Delta = b^2 - 4ac$	Bước 1 : Tính $\Delta' = b'^2 - ac \ (b = 2b')$
Bước 2 : Xét dấu của Δ	Bước 2 : Xét dấu của Δ'
• Nếu $\Delta < 0$ thì (1) vô nghiệm	• Nếu $\Delta' < 0$ thì (1) vô nghiệm.
• Nếu $\Delta = 0$ thì (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	• Nếu $\Delta' = 0$ thì (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$
• Nếu $\Delta > 0$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.	• Nếu $\Delta' > 0$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$.

3. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng

• Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ thì :

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

• Đảo lại, nếu có hai số x_1, x_2 mà $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1x_2 = P \\ S^2 - 4P \geq 0 \end{cases}$

thì x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

Áp dụng :

• Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

* Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{c}{a}$.

* Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{c}{a}$.

• Tính giá trị của biểu thức đối xứng của các nghiệm và xét dấu các nghiệm mà không cần giải phương trình (nếu phương trình có nghiệm) :

* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a}$.

* $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{b}{a} : \frac{c}{a} = -\frac{b}{c}$.

* Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$.

* Phương trình (1) có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0. \end{cases}$

* Phương trình (1) có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0. \end{cases}$

4. Giải phương trình quy về phương trình bậc hai

Cách 1 : Đưa về phương trình tích.

Cách 2 : Đặt ẩn phụ.

5. Giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Ta có thể khử dấu giá trị tuyệt đối bằng hai cách :

Cách 1 : Xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối

$$|A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0. \end{cases}$$

Cách 2 : Bình phương hai vế của phương trình.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 13. Cho phương trình

$$2x^2 - (m + 1)x - (m + 3) = 0. \qquad (1)$$

a) Giải phương trình khi $m = 4$;

b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m ;

c) Xác định giá trị của m để (1) có hai nghiệm trái dấu.

Giải

a) Khi $m = 4$ ta được phương trình $2x^2 - 5x - 7 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 56 = 81$; $\sqrt{\Delta} = 9$.

Do đó $x_1 = \dfrac{5 + 9}{4} = 3,5$; $\quad x_2 = \dfrac{5 - 9}{4} = -1$.

Cách khác : Ta có $a - b + c = 2 + 5 - 7 = 0$

nên $x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{-c}{a} = \dfrac{7}{2} = 3,5$.

b) Xét biệt thức của phương trình :

$\Delta = b^2 - 4ac = [-(m + 1)]^2 + 8(m + 3)$

$= m^2 + 10m + 25 = (m + 5)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của m.

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

c) Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow -2(m + 3) < 0 \Leftrightarrow m + 3 > 0 \Leftrightarrow m > -3$.

Ví dụ 14. Cho phương trình

$$x^2 - 2(m + 2)x + 4m = 0. \qquad (1)$$

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m ;

b) Tính theo tham số m giá trị của biểu thức

$$A = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} ;$$

c) Tìm một hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m.

Giải

a) Xét biệt thức Δ' của phương trình :

$\Delta' = b'^2 - ac = [-(m+2)]^2 - 4m$

$= m^2 + 4 > 0$ với mọi giá trị của m.

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Theo hệ thức Vi-ét ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 2(m+2) \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = 4m \end{cases}$$

Do đó $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$= 4(m+2)^2 - 8m = 4m^2 + 8m + 16.$

Ta có $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1x_2)^2}$

$$= \frac{4m^2 + 8m + 16}{16m^2} = \frac{m^2 + 2m + 4}{4m^2}.$$

c) Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+2) \\ x_1x_2 = 4m \end{cases}$

Suy ra $2(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 4m + 8 - 4m = 8$ (không phụ thuộc m).

Nhận xét **:** Để viết được một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc m ta làm theo hai bước :

Bước 1 : Theo hệ thức Vi-ét viết các hệ thức của S và P theo m.

Bước 2 : Dùng quy tắc cộng hoặc thế để khử m.

Ví dụ 15. Giải các phương trình :

a) $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$;

b) $3x - 2\sqrt{6x} + 2 = 0$.

Giải. a) $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$.

Đặt $x^2 = t \geq 0$ ta được phương trình $4t^2 - 3t - 1 = 0$.

Vì $a + b + c = 0$ nên $t_1 = 1$; $t_2 = \dfrac{-1}{4}$ (loại).

Do đó $x^2 = 1$, suy ra $x = \pm 1$.

b) $3x - 2\sqrt{6x} + 2 = 0$. Điều kiện $x \ge 0$.

Đặt $\sqrt{x} = t \ge 0$ suy ra $x = t^2$.

Ta được phương trình : $3t^2 - 2\sqrt{6}t + 2 = 0$

$$\Delta' = \left(\sqrt{6}\right)^2 - 6 = 0.$$

Do đó $t_{1,2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ suy ra $x = t^2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{3}$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ 16. Giải phương trình

$$|x^2 - x + 1| - |x - 2| = 6. \qquad (1)$$

Giải. Ta có $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ nên $|x^2 - x + 1| = x^2 - x + 1$.

Khi đó phương trình (1) trở thành :

$$x^2 - x + 1 - |x - 2| = 6. \qquad (2)$$

• Nếu $x \ge 2$ thì $x - 2 \ge 0$, $|x - 2| = x - 2$.

Phương trình (2) trở thành :

$$x^2 - x + 1 - (x - 2) = 6 \text{ hay } x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Vì $a - b + c = 0$ nên $x_1 = -1$ (không thuộc khoảng đang xét)

$x_2 = 3$ (thuộc khoảng đang xét).

• Nếu $x < 2$ thì $x - 2 < 0$, $|x - 2| = 2 - x$.

Phương trình (2) trở thành :

$$x^2 - x + 1 - (2 - x) = 6 \text{ hay } x^2 = 7.$$

Suy ra $x_1 = \sqrt{7} > 2$ (không thuộc khoảng đang xét)

$x_2 = -\sqrt{7} < 2$ (thuộc khoảng đang xét).

Vậy tập hợp nghiệm của phương trình (1) là $S = \{3 ; -\sqrt{7}\}$.

Ví dụ 17. Cho phương trình

$$x^2 + 6x + m = 0. \qquad (1)$$

Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của m để (1) có hai nghiệm đều âm.

Giải. Phương trình (1) có hai nghiệm âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - m \geq 0 \\ m > 0 \\ -6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 9.$$

Vì m phải là số nguyên nhỏ nhất nên $m = 1$.

Ví dụ 18. Cho phương trình $x^2 - 6x + m = 0$. (1)

Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện :

a) $4x_1 - 5x_2 = 42$;

b) $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

Giải. Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là :

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 9.$$

a) Theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 6$.

Kết hợp với điều kiện $4x_1 - 5x_2 = 23$ ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ 4x_1 - 5x_2 = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -2. \end{cases}$$

Vì $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = m$ nên $m = 8.(-2) = -16$ (thoả mãn điều kiện).

b) Ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1^2 + x_2^2 = 20 \end{cases}$$

Vì $x_1^2 + x_2^2 = 20$ nên $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 20 \Rightarrow 36 - 2m = 20$

$\Rightarrow m = 8$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ 19. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 5 & (1) \\ xy = 24 & (2) \end{cases}$$

Giải. Rút x từ phương trình (1) : $x = 5 + y$. (3)

Thế $x = 5 + y$ vào phương trình (2) ta được

$$(5 + y).y = 24 \Leftrightarrow y^2 + 5y - 24 = 0.$$

Giải phương trình này ta được $y_1 = 3$; $y_2 = -8$.

Với $y_1 = 3$ thì $x_1 = 3 + 5 = 8$

Với $y_2 = -8$ thì $x_2 = -8 + 5 = -3$.

Do đó hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là : $(8 ; 3)$; $(-3 ; -8)$.

C. Bài tập

16. Giải các phương trình :

a) $(x^2 + x - 1)(x^2 + x + 2) = 40$;

b) $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 6 = 0$.

17. Cho phương trình : $x^2 + (m - 5)x - 3(m - 2) = 0$. (1)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm $x_1 = 3$ với mọi giá trị của m ;

b) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm kép ;

c) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

18. Không giải phương trình, hãy tính tổng các bình phương và hiệu các bình phương các nghiệm của phương trình :

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$;

b) $7x^2 - x + 2 = 0$.

19. Không giải phương trình, xét dấu các nghiệm của các phương trình sau :

a) $(1 + \sqrt{2})x^2 + 7x + 1 - \sqrt{2} = 0$;

b) $5x^2 + 8x + 1 = 0$;

c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$.

20. Cho phương trình $(m + 4)x^2 - 2(m - 3)x - 2 = 0$. (1)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m ;

b) Tìm m để phương trình có một nghiệm là 1.

Khi đó tìm nghiệm thứ hai của phương trình.

21. Cho phương trình $x^2 + 2(m + 1)x + 2m = 0$. (1)

a) Chứng tỏ rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m ;

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc m, từ đó hãy biểu thị x_2 theo x_1 ;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$.

22. Cho phương trình $mx^2 + (2m - 5)x + m - 2 = 0$. (1)

a) Xác định m để phương trình (1) có nghiệm ;

b) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $(6x_1 - 1)(6x_2 - 1) = -2$.

23. Cho phương trình $x^2 - 10x + m = 0$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho :

a) $x_1 = 4x_2$; b) $x_1^3 + x_2^3 = 370$.

24. Cho phương trình : $x^2 - 2mx - 2m - 1 = 0$.

Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 3x_2 = 14$.

25. Cho phương trình : $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 + 4m + 13 = 0$. (1)

a) Xác định m để phương trình (1) có nghiệm ;

b) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm âm.

Chuyên đề 4

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH HOẶC HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. Kiến thức cần nhớ

Giải toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình gồm ba bước :

Bước 1. Lập phương trình (hoặc hệ phương trình) của bài toán :

– Chọn ẩn số và đặt điều kiện cho ẩn số.

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và theo các đại lượng đã biết.

– Lập phương trình (hoặc hệ phương trình) biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình (hoặc hệ phương trình).

Bước 3. Trả lời : Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không thoả mãn, rồi kết luận.

Khó khăn mà học sinh thường gặp là không biết biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và theo các đại lượng đã biết khác, tức là không thiết lập được mối quan hệ giữa các đại lượng. Tùy theo từng dạng bài tập mà ta xác định được các đại lượng có trong bài, các công thức biểu diễn mối quan hệ giữa các đại lượng ấy.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 20. Lúc 6 giờ một ô tô chạy từ A về B. Sau đó nửa giờ, một xe máy chạy từ B về A. Ô tô gặp xe máy lúc 8 giờ. Biết vận tốc ô tô hơn vận tốc xe máy là 10 km/h và khoảng cách AB = 195 km. Tính vận tốc mỗi xe.

Nhận xét : Bài toán này là một *bài toán về chuyển động*.

1. Toán chuyển động có ba đại lượng :

Quãng đường = Vận tốc × Thời gian

Vận tốc = Quãng đường : Thời gian

Thời gian = Quãng đường : Vận tốc.

2. Các đơn vị của ba đại lượng phải phù hợp với nhau. Nếu quãng đường tính bằng ki-lô-mét, vận tốc tính bằng ki-lô-mét/giờ thì thời gian phải tính bằng giờ.

Giải. Gọi vận tốc ô tô là x (km/h) $(x > 0)$.

Gọi vận tốc xe máy là y (km/h) $(y > 0)$.

Vì vận tốc ô tô hơn vận tốc xe máy là 10 km/h nên ta có phương trình :

$$x - y = 10.$$

Thời gian ô tô đã đi cho đến lúc gặp xe máy là : $8 - 6 = 2$ (giờ).

Thời gian xe máy đã đi cho đến lúc gặp ô tô là : $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (giờ).

Quãng đường ô tô chạy trong 2 giờ là 2x (km).

Quãng đường xe máy chạy trong $\frac{3}{2}$ giờ là $\frac{3y}{2}$ (km).

Vì quãng đường AB dài 195 km nên ta có phương trình

$$2x + \frac{3}{2}y = 195 \text{ hay } 4x + 3y = 390.$$

Do đó ta có hệ hai phương trình : $\begin{cases} x - y = 10 \\ 4x + 3y = 390. \end{cases}$

Giải hệ này ta được $x = 60$; $y = 50$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy vận tốc ô tô là 60 km/h, vận tốc xe máy là 50 km/h.

Lưu ý :

– Trong toán chuyển động ngược chiều thì tổng quãng đường hai xe đã đi đúng bằng khoảng cách ban đầu giữa hai xe.

– Có thể chỉ chọn một ẩn số để giải bài toán trên.

Ví dụ 21. Một tàu thủy chạy xuôi dòng sông 66 km hết một thời gian bằng thời gian tàu chạy ngược dòng 54 km. Nếu tàu chạy xuôi dòng 22 km và ngược dòng 9 m thì chỉ hết 1 giờ. Tính vận tốc riêng của tàu thủy và vận tốc dòng nước (biết vận tốc riêng của tàu không đổi).

Nhận xét : Bài toán này là *bài toán chuyển động trong dòng chảy*. Cần nhớ :

– Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước

– Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng – vận tốc dòng nước.

Giải. Gọi vận tốc riêng của tàu thủy là x (km/h).

Gọi vận tốc của dòng nước là y (km/h) $(x > y > 0)$.

Suy ra vận tốc của tàu thủy khi xuôi dòng là $x + y$ (km/h).

Vận tốc của tàu thủy khi ngược dòng là $x - y$ (km/h).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{66}{x+y} = \dfrac{54}{x-y} \\ \dfrac{22}{x+y} + \dfrac{9}{x-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 3. \end{cases} \text{(thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy vận tốc riêng của tàu thủy là 30 km/h.

Vận tốc của dòng nước là 3 km/h.

Ví dụ 22. Một tổ công nhân theo kế hoạch phải sản xuất được 280 sản phẩm với năng suất định trước. Do mỗi ngày tổ đó đã sản xuất vượt mức 10 sản phẩm nên tổ đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định là 1 ngày và còn sản xuất thêm được 20 sản phẩm. Tính năng suất định trước.

Nhận xét : Bài toán này là một *bài toán về năng suất*. Loại toán này có ba đại lượng :

1. Khối lượng công việc = Năng suất × Thời gian.

2. Năng suất = Khối lượng công việc : Thời gian.

3. Thời gian = Khối lượng công việc : Năng suất.

Giải. Gọi năng suất định trước là x (sản phẩm/ngày) (x : nguyên dương)

Suy ra năng suất thực tế là x + 10 (sản phẩm/ngày).

Thời gian dự định làm là $\dfrac{280}{x}$ (ngày).

Thời gian thực tế đã làm là

$$\frac{300}{x+10} \text{ (ngày).}$$

Theo đề bài, tổ đã hoàn thành kế hoạch sớm được một ngày nên ta có phương trình

$$\frac{280}{x} - \frac{300}{x+10} = 1$$

$\Leftrightarrow x^2 + 30x - 2800 = 0$, có nghiệm $x_1 = 40$ (thỏa mãn ĐK),

$x_2 = -70$ (loại).

Vậy năng suất định trước là 40 sản phẩm/ngày.

Ví dụ 23. Hai vòi cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 4 giờ 48 phút sẽ đầy. Biết rằng thời gian vòi I chảy một mình đầy bể ít hơn thời gian vòi II chảy một mình đầy bể là 4 giờ. Hỏi mỗi vòi nếu chảy một mình thì phải mất bao lâu mới đầy bể ?

Nhận xét : Bài toán này là một *bài toán về công việc đồng thời*. Để giải loại toán này, ta thường coi toàn bộ công việc là 1 đơn vị.

Suy ra năng suất $= \dfrac{1}{\text{Thời gian}}$.

Lập phương trình theo mẫu :

Tổng các năng suất riêng = Năng suất chung.

Giải. 4 giờ 48 phút $= 4\dfrac{4}{5}$ giờ $= \dfrac{24}{5}$ giờ.

Gọi thời gian để vòi I chảy một mình đầy bể là x giờ $\left(x > \dfrac{24}{5}\right)$.

Suy ra thời gian để vòi II chảy một mình đầy bể là x + 4 (giờ).

Trong 1 giờ vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ (bể).

Trong 1 giờ vòi II chảy được $\frac{1}{x + 4}$ (bể).

Trong 1 giờ cả hai vòi chảy được $1 : \frac{24}{5} = \frac{5}{24}$ (bể).

Do đó ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 4} = \frac{5}{24} \Leftrightarrow 5x^2 - 28x - 96 = 0$.

Phương trình có nghiệm $x_1 = 8$ (thỏa mãn ĐK) ; $x_2 = \frac{-12}{5}$ (loại).

Vậy: Vòi I chảy một mình đầy bể trong 8 giờ.

Vòi II chảy một mình đầy bể trong 12 giờ.

Ví dụ 24. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số biết rằng tổng các chữ số của nó bằng $\frac{1}{4}$ số đó. Nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì được một số mới hơn số đã cho là 18.

Nhận xét : Bài toán này là một *bài toán về số và chữ số*. Trong hệ thập phân thì số có hai chữ số $\overline{xy}$ được biểu diễn thành tổng $10x + y$, trong đó $x \in \mathbb{N}$; $0 < x \leq 9$ và $y \in \mathbb{N}$; $0 \leq y \leq 9$.

Số viết theo thứ tự ngược lại là $\overline{yx} = 10y + x$.

Giải. Gọi chữ số hàng chục của số phải tìm là x ($x \in \mathbb{N}$; $0 < x \leq 9$).

Gọi chữ số hàng đơn vị của số phải tìm là y ($y \in \mathbb{N}$; $0 \leq y \leq 9$).

Số phải tìm là $10x + y$.

Ta có phương trình : $x + y = \frac{1}{4}.(10x + y)$ hay $6x - 3y = 0$.

Theo đề bài số viết theo thứ tự ngược lại hơn số đã cho là 18 nên ta có phương trình :

$$(10y + x) - (10x + y) = 18 \text{ hay } -x + y = 2.$$

Do đó ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 6x - 3y = 0 \\ -x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy số phải tìm là 24.

Ví dụ 25. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 180 m. Nếu giảm chiều dài đi 20% và tăng chiều rộng thêm 20 m thì diện tích mới bằng $\frac{6}{5}$ diện tích cũ. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

Nhận xét **:** Bài toán này là một *bài toán về so sánh, tăng giảm, hơn kém một số đơn vị, một số lần.*

– Nếu A hơn B là k đơn vị thì A – B = k hoặc A = B + k.

– Nếu A hơn B là k lần thì A = kB.

– Nếu số A bằng $\frac{3}{4}$ số B thì $A = \frac{3}{4}B$.

Giải. Gọi chiều dài của khu vườn là x mét (x > 0).

Gọi chiều rộng của khu vườn là y mét (y > 0).

Theo đề bài, chu vi của vườn là 180 m nên ta có phương trình :

$$(x + y).2 = 180 \text{ hay } x + y = 90.$$

Nếu giảm chiều dài đi 20% của nó thì chiều dài còn lại là $\frac{80}{100}x$ (m).

Nếu tăng chiều rộng thêm 20 m thì chiều rộng là y + 20 (m).

Diện tích khu vườn mới là $\frac{80}{100}x.(y + 20)$ (m^2).

Theo đề bài, diện tích mới bằng $\frac{6}{5}$ diện tích cũ nên ta có phương trình :

$$\frac{80}{100}x.(y + 20) = \frac{6}{5}xy \text{ hay } 40x - xy = 0.$$

Do đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 90 \quad (1) \\ 40x - xy = 0 \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40. \end{cases} \text{(thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy chiều dài khu vườn là 50 m, chiều rộng khu vườn là 40 m.

C. Bài tập

• *Toán chuyển động*

26. Quãng đường AB gồm một đoạn lên dốc AM và một đoạn xuống dốc MB. Một người đi xe đạp từ A đến B mất 2 giờ ; đi từ B về A hết 3 giờ. Biết vận tốc lên dốc (lúc đi cũng như lúc về) là 9 km/h, vận tốc xuống dốc (lúc đi cũng như lúc về) là 18 km/h. Tính độ dài các quãng đường AM, MB.

27. Quãng đường AB dài 20 km. Lúc 7 giờ sáng một xe ô tô khởi hành từ A. Trước đó 30 phút một xe máy khởi hành từ B cùng đi về C (B nằm giữa A và C). Ô tô đuổi kịp xe máy lúc 11 giờ. Biết vận tốc ô tô hơn vận tốc xe máy là 10 km/h. Tính vận tốc mỗi xe.

28. Một ca nô chạy xuôi dòng và ngược dòng trên sông với vận tốc riêng không đổi. Nếu ca nô chạy xuôi dòng trong 1 giờ rồi ngược dòng trong 2 giờ thì được tổng cộng 126 km. Nếu ca nô xuôi dòng trong một giờ rưỡi và ngược dòng trong một giờ rưỡi thì được tất cả 129 km. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước.

29. Hai ô tô cùng khởi hành từ A để đi về B cách nhau 150 km. Vận tốc xe I hơn vận tốc xe II là 5 km/h nên đến B trước xe II là 20 phút. Tính thời gian mỗi xe đã đi.

• *Toán năng suất*

30. Theo kế hoạch một tổ phải sản xuất 180 tấn hàng trong một thời gian. Do mỗi ngày tổ đó đã sản xuất vượt mức 8 tấn nên tổ đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn dự định 1 ngày và còn sản xuất vượt mức 10 tấn hàng nữa. Tính năng suất dự kiến.

31. Theo kế hoạch, trong cùng một thời gian định trước, hai tổ công nhân phải sản xuất cùng một số sản phẩm. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ I tăng thêm 4 sản phẩm nên chẳng những hoàn thành kế hoạch sớm được 3 ngày mà còn vượt mức 58 sản phẩm. Mỗi ngày tổ II tăng thêm 3 sản phẩm nên chẳng những hoàn thành kế hoạch sớm được 2 ngày mà còn vượt mức 54 sản phẩm.

Hỏi kế hoạch, mỗi tổ công nhân phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm ?

• *Toán về công việc đồng thời*

32. Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 4 giờ sẽ xong. Nhưng hai đội mới làm chung được 3 giờ thì đội I nghỉ, đội II tiếp tục làm thêm trong 3 giờ nữa mới xong.

Hỏi mỗi đội nếu làm một mình thì phải bao lâu mới xong công việc ?

33. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn trong 45 phút thì được $\frac{2}{5}$ bể.

Nếu chảy riêng thì vòi II chảy đầy bể chậm hơn vòi I là 2 giờ.

Hỏi mỗi vòi nếu chảy một mình thì mất bao nhiêu lâu mới đầy bể ?

• ***Toán về số và chữ số***

34. Tìm một số có hai chữ số biết rằng tổng các chữ số của nó bằng 9. Nếu viết thêm chữ số 0 xen vào giữa hai chữ số của nó thì được một số mới gấp 9 lần số ban đầu.

35. Tìm một số có hai chữ số biết rằng tổng của số đó với số viết theo thứ tự ngược lại là 132. Nếu lấy số đó chia cho tích các chữ số của nó thì được thương là 2 và dư 5.

• ***Các dạng toán khác***

36. Theo kế hoạch trong một thời gian hai tổ phải sản xuất được 1000 sản phẩm. Nhưng thực tế hai tổ đã sản xuất vượt mức 69 sản phẩm. Tính ra tổ I đạt 108% kế hoạch, tổ II đạt 106% kế hoạch. Hỏi theo kế hoạch, mỗi tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm ?

37. Một lớp học có một số vở để làm phần thưởng cho học sinh tiên tiến. Nếu mỗi học sinh được chia 12 vở thì còn thừa 10 vở. Nếu mỗi học sinh được chia 13 vở thì lại thiếu 10 vở. Hỏi lớp học đó có bao nhiêu học sinh tiên tiến và bao nhiêu quyển vở để làm phần thưởng ?

38. Một phòng họp có 360 ghế ngồi được sắp xếp thành từng hàng, mỗi hàng có số ghế như nhau. Vì có 418 người đến họp nên chẳng những phải xếp thêm 2 hàng ghế mà mỗi hàng còn phải xếp thêm 1 ghế nữa thì mới đủ chỗ ngồi. Hỏi lúc đầu có bao nhiêu hàng ghế, biết số hàng ghế không quá 25 ?

39. Có hai phân xưởng, phân xưởng I làm trong 10 ngày, phân xưởng II làm trong 12 ngày được tất cả 940 sản phẩm. Biết số sản phẩm phân xưởng I làm trong 4 ngày hơn số sản phẩm phân xưởng II làm trong 3 ngày là 25 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi phân xưởng đã làm.

Chuyên đề 5
HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

A. Kiến thức cần nhớ

1. *Định nghĩa*

- Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$.

  Đặc biệt, khi $b = 0$ thì hàm số có dạng $y = ax$.

- Phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $ax + by = c$

  (a, b, c là các số đã biết, $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).

  Nếu $b \neq 0$ thì có thể đưa phương trình về dạng $y = mx + n$.

- Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là hàm số bậc hai đặc biệt.

2. *Tính chất*

- Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ xác định với mọi giá trị của $x \in \mathbb{R}$ và :

  – Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$;

  – Nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$.

- Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ xác định với mọi giá trị của $x \in \mathbb{R}$ và :

  – Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$, đồng biến khi $x > 0$;

  – Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$, nghịch biến khi $x > 0$.

3. *Đồ thị*

a) Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng :

– Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b.

– Song song với đường thẳng $y = ax$ nếu $b \neq 0$ và trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$.

Số a gọi là *hệ số góc*, số b gọi là *tung độ gốc* của đường thẳng.

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và trục Ox.

Nếu $a > 0$ thì $\text{tg}\alpha = a$.

Nếu $a < 0$, ta đặt $\beta = 180^\circ - \alpha$. Khi đó $\tan\beta = |a|$.

Tính β rồi suy ra $\alpha = 180^\circ - \beta$.

b) Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là một parabol đỉnh O và nhận trục Oy làm trục đối xứng.

– Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = 0$.

– Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm bên dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị. Giá trị lớn nhất của hàm số là $y = 0$.

4. Vị *trí tương đối của hai đường thẳng, của đường thẳng và parabol*

Cho các đường thẳng $(d) : y = ax + b \quad (a \neq 0)$,

$(d') : y = a'x + b' \quad (a' \neq 0)$,

và parabol $(P) : y = kx^2$ $(k \neq 0)$.

Khi đó :

- (d) cắt (d') $\Leftrightarrow a \neq a'$
- (d) // (d') $\Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$
- (d) trùng (d') $\Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$.
- $(d) \perp (d') \Leftrightarrow a.a' = -1$.

Xét phương trình $kx^2 = ax + b \qquad (1)$

- Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì (P) và (d) không giao nhau.
- Nếu phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
- Nếu phương trình (1) có nghiệm kép thì (P) và (d) tiếp xúc nhau.

Hoành độ của giao điểm (hoặc tiếp điểm) của (P) và (d) chính là nghiệm của phương trình $kx^2 = ax + b$.

5. *Bổ sung*

a) Cho điểm $A(x_1 ; y_1)$ và $B(x_2 ; y_2)$.

Khi đó $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

b) Khoảng cách h từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $y = ax + b$.

- Có thể dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính.
- Đặc biệt, nếu đường thẳng được cho bởi phương trình $ax + by = c$ thì

$$h = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 26. Cho hàm số $y = m(x + 1)^2 - 2x^2$. (1)

a) Với giá trị nào của m thì (1) là hàm số bậc nhất ? Khi đó hàm số này đồng biến hay nghịch biến ? Vẽ đồ thị của hàm số ứng với giá trị đó của m.

b) Với giá trị nào của m thì (1) là hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$? Vẽ đồ thị của hàm số ứng với giá trị đó của m.

Giải

a) Ta khai triển và viết hàm số đã cho dưới dạng

$$y = (m - 2)x^2 + 2mx + m. \quad (1')$$

Hàm số (1') là hàm bậc nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$

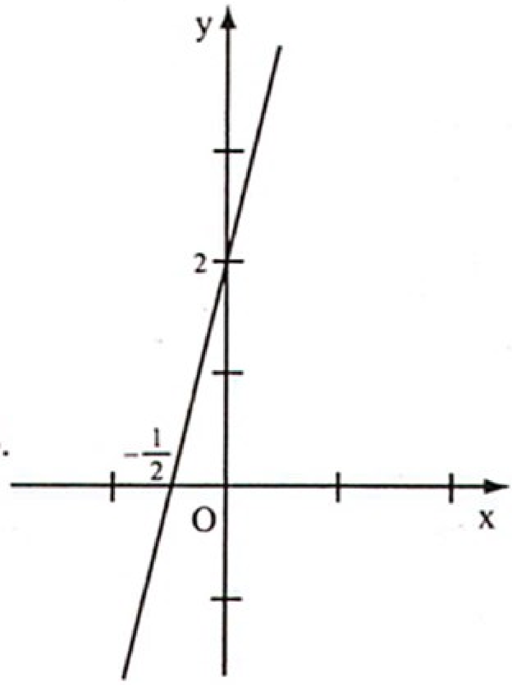
$\Leftrightarrow m = 2.$

Khi đó (1') trở thành $y = 4x + 2$ có dạng $y = ax + b$.

Hàm số này đồng biến vì $a = 4 > 0$.

• Vẽ đồ thị (d) của hàm số $y = 4x + 2$.

(Xem hình vẽ)



x	0	$-\frac{1}{2}$
y	2	0

b) Hàm số (1') là hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

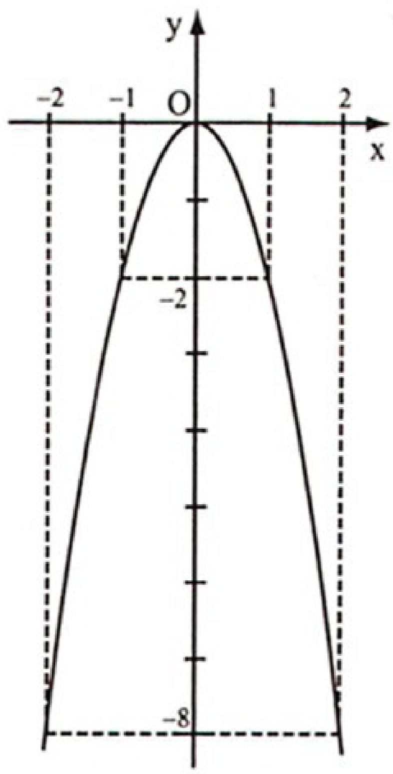
$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ 2mx + m = 0 \text{ với mọi } x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m(2x + 1) = 0 \text{ với mọi } x \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$

Khi đó (1') trở thành $y = -2x^2$.

• Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -2x^2$.

(Xem hình vẽ)



x	–2	–1	0	1	2
y	–8	–2	0	–2	–8

Ví dụ 27. Cho các hàm số :

$$y = 2mx + m + 1 \qquad (1)$$

$$y = (m-1)x + 3 \qquad (2)$$

a) Xác định m để hàm số (1) đồng biến, còn hàm số (2) nghịch biến.

b) Xác định m để đồ thị của hai hàm số song song với nhau.

c) Chứng minh rằng đồ thị (d) của hàm số (1) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

Giải

a) Hàm số (1) đồng biến và hàm số (2) nghịch biến

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

b) Đồ thị của hai hàm số song song với nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = m - 1 \\ m + 1 \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

c) Viết lại hàm số (1) dưới dạng $y = m(2x + 1) + 1$.

Ta thấy với mọi giá trị của m, khi $x = -\dfrac{1}{2}$ thì $y = 1$.

Vậy đồ thị (d) của hàm số (1) luôn đi qua một điểm cố định là điểm $M\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$.

Ví dụ 28. Xác định hàm số $y = ax + b$, biết đồ thị (d) của nó đi qua $A(2\,;\,1{,}5)$ và $B(8\,;\,-3)$. Khi đó hãy tính :

a) Góc α tạo bởi đường thẳng (d) và trục Ox ;

b) Khoảng cách h từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d).

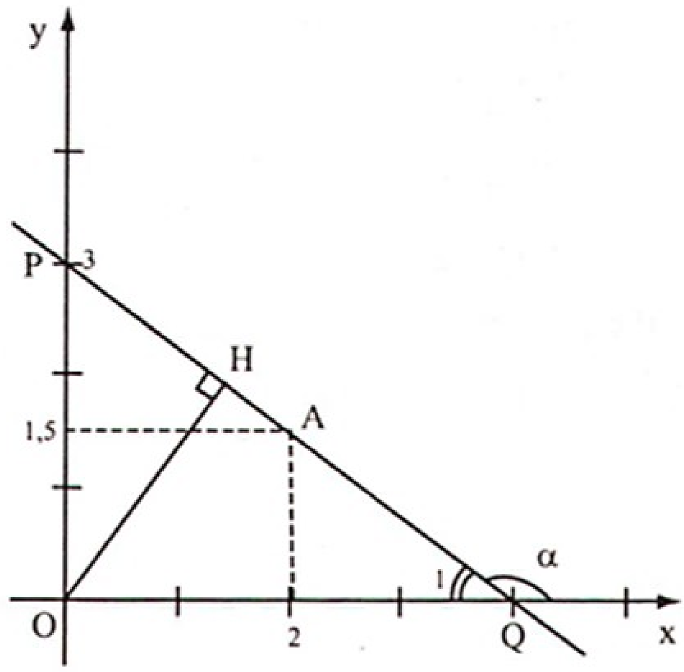
Giải

Vì (d) đi qua $A(2\,;\,1{,}5)$ và $B(8\,;\,-3)$ nên tọa độ của A và B phải thỏa mãn phương trình $y = ax + b$.

Thay $x = 2$; $y = 1{,}5$ rồi lại thay $x = 8$; $y = -3$ vào phương trình $y = ax + b$ ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} 1{,}5 = 2a + b \\ -3 = 8a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{4} \\ b = 3. \end{cases}$$

Vậy hàm số cần xác định là $y = -\frac{3}{4}x + 3$.



a) Đồ thị của hàm số $y = -\frac{3}{4}x + 3$ cắt trục tung tại điểm P có tung độ bằng 3 ; cắt trục hoành tại điểm Q có hoành độ là 4.

Xét Δ POQ vuông tại O có :

$$\tan \widehat{Q_1} = \frac{OP}{OQ} = \frac{3}{4} \approx \tan 36^\circ 52'$$

suy ra $\widehat{Q_1} \approx 36^\circ 52'$.

Do đó $\alpha \approx 180^\circ - 36^\circ 52' = 143^\circ 8'$.

b) Vẽ $OH \perp PQ$ ta có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} \text{ hay } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{25}{144}.$$

Do đó $h = \sqrt{\frac{144}{25}} = 2,4$.

Ví dụ 29. Cho parabol (P) : $y = ax^2$ và đường thẳng (d) : $y = x + 1,5$.

a) Tìm a biết rằng (P) cắt (d) tại điểm A có hoành độ bằng -1.

b) Tìm tọa độ giao điểm thứ hai B (B khác A) của (P) và (d).

c) Tính độ dài AB.

Giải

a) Đường thẳng (d) đi qua A có hoành độ bằng -1 nên ta thay $x = -1$ vào hàm số $y = x + 1,5$ được $y = -1 + 1,5 = 0,5$.

Vậy tọa độ của điểm A là $(-1 ; 0,5)$.

Parabol (P) đi qua A nên ta thay $x = -1$; $y = 0,5$ vào hàm số $y = ax^2$, được

$0,5 = a.(-1)^2$, suy ra $a = \frac{1}{2}$.

Vậy $y = \frac{1}{2}x^2$.

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{3}{2}$$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0.$

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = 3$.

Với $x_2 = 3$ thì $y_2 = 3 + 1,5 = 4,5$.

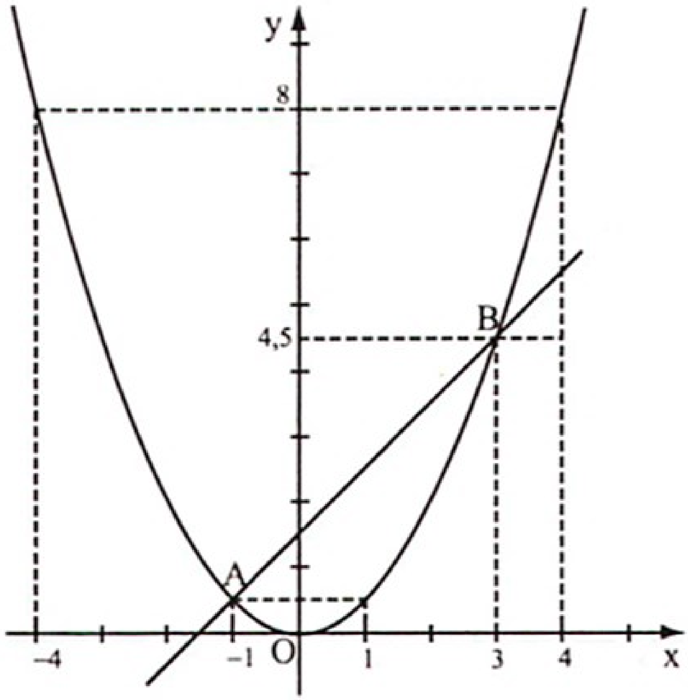
Vậy tọa độ của điểm B là (3 ; 4,5).

c) Ta có :

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$AB^2 = 16 + 16 = 32.$

Do đó $AB = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$



C. Bài tập

40. Cho hàm số y = ax + b.

a) Xác định các hệ số a và b, biết đồ thị của nó song song với đường thẳng $y = \frac{2}{3}x$ và đi qua điểm A(3 ; 4).

b) Vẽ đồ thị của hàm số vừa được xác định.

41. Cho đường thẳng (d) : $y = ax - 2$ $(a \neq 0)$;

a) Xác định hệ số a để đường thẳng (d) tạo với trục Ox một góc $\alpha = 45^\circ$.

b) Với giá trị vừa tìm được của a, tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d).

42. Cho hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.

a) Xác định hệ số a biết đồ thị (P) của nó đi qua A(4 ; 4).

b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A và tiếp xúc với (P).

43. Cho parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = -x + 2$.

a) Chứng minh rằng (d) và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B nằm về hai phía của trục tung.

b) Chứng minh rằng tam giác AOB là tam giác vuông. Tính diện tích của tam giác đó.

44. Cho parabol (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d) : $ax + y = 1$.

a) Chứng minh rằng (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Xác định a để AB có độ dài ngắn nhất. Tính độ dài ngắn nhất đó.

Chuyên đề 6

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

1. *Định nghĩa bất đẳng thức*

Ta gọi hệ thức dạng $a < b$ (hay $a > b$; $a \leq b$; $a \geq b$) là bất đẳng thức.

2. *Tính chất của bất đẳng thức*

1) $a < b \Leftrightarrow b > a$.

2) $a < b$; $b < c \Rightarrow a < c$.

3) $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$.

4) $a < b \Leftrightarrow a.c < b.c$ nếu $c > 0$.

$a < b \Leftrightarrow a.c > b.c$ nếu $c < 0$.

5) Cộng từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều được một bất đẳng thức cùng chiều.

6) Trừ từng vế của hai bất đẳng thức khác chiều được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức thứ nhất.

7) Nhân từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều mà hai vế không âm ta được một bất đẳng thức cùng chiều. Đặc biệt :

- $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$; $|a| > |b| \Rightarrow a^{2n} > b^{2n}$.
- $a > b \Rightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}$.

8) Nếu $a > b > 0$ thì $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

3. *Một số hằng bất đẳng thức hay dùng*

1) Nếu a và b là hai số cùng dấu thì

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ (dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow a = b).$$

2) Nếu a, b > 0 thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b).

3) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (dấu "=" xảy ra khi $a.b \geq 0$).

4) $|a - b| \geq |a| - |b|$ (dấu "=" xảy ra khi $a \geq b \geq 0$ hoặc $a \leq b \leq 0$).

5) Bất đẳng thức Cô-si

Với $a, b \geq 0$ thì $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ hay $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

(dấu "=" xảy ra khi a = b).

Vài dạng khác của bất đẳng thức Cô-si :

- $\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{a+b}$ (với a > 0 ; b > 0).
- $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$; $(a+b)^2 \geq 4ab$; $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
- $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

4. *Phương pháp chứng minh bất đẳng thức*

1) Phương pháp dùng định nghĩa của bất đẳng thức :

- Muốn chứng minh a < b, ta chứng minh a – b < 0.
- Muốn chứng minh a > b, ta chứng minh a – b > 0.

2) Phương pháp biến đổi tương đương :

$$A < B \Leftrightarrow A_1 < B_1 \Leftrightarrow A_2 < B_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow C < D.$$

Nếu bất đẳng thức cuối đúng thì bất đẳng thức đầu đúng.

3) Phương pháp vận dụng tính chất của bất đẳng thức và vận dụng những hằng bất đẳng thức quen thuộc :

Từ các bất đẳng thức đã biết ta dùng các tính chất của bất đẳng thức để suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

4) Phương pháp phản chứng :

Muốn chứng minh A < B, ta giả sử A ≥ B rồi suy ra một điều vô lí (mâu thuẫn với điều đã cho hoặc đã biết), từ đó suy ra điều giả sử là sai, điều phải chứng minh là đúng).

B. Một số ví dụ

Ví dụ 30. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

Giải

Cách thứ nhất :

Xét hiệu $H = (a + b + c) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$

$$H = \frac{2a + 2b + 2c - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ac}}{2}$$

$$H = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 + \left(\sqrt{c} - \sqrt{a}\right)^2}{2}.$$

$H \geq 0$ vì $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$; $\left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 \geq 0$; $\left(\sqrt{c} - \sqrt{a}\right)^2 \geq 0$.

Vậy $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ (dấu "=" xảy ra khi a = b = c).

Cách thứ hai : (biến đổi tương đương)

Ta có $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$

$\Leftrightarrow a + b + c - \sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{ca} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2a + 2b + 2c - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ca}}{2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 + \left(\sqrt{c} - \sqrt{a}\right)^2}{2} \geq 0$

(dấu "=" xảy ra khi a = b = c).

Bất đẳng thức cuối đúng nên bất đẳng thức đã cho đúng.

Cách thứ ba : (Dùng các tính chất của bất đẳng thức)

Vì a, b, c ≥ 0 nên theo bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ca}.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được :

$$2(a + b + c) \geq 2\left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}\right).$$

Suy ra $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ (dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$).

Cách thứ tư : (Phản chứng)

Giả sử $a + b + c < \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$.

Suy ra $a + b + c - \sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{ac} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2a + 2b + 2a - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ac}}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 + \left(\sqrt{c} - \sqrt{a}\right)^2}{2} < 0.$$

Điều này vô lí vì $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 + \left(\sqrt{c} - \sqrt{c}\right)^2 \geq 0$

Vậy điều giả sử là sai, suy ra bất đẳng thức đã cho là đúng.

Ví dụ 31. Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} > 1.$$

Giải. Vì a, b, c dương nên $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} < \dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

Do đó $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} < \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ (vì $\sqrt{a} > 0$).

Tương tự ta có : $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} < \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$; $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} < \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$.

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được :

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} < \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$$

Suy ra $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}>1.$

Ví dụ 32. Cho a > 0, b > 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Giải. Ta có $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\Leftrightarrow a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\ge\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ (vì $\sqrt{ab}>0$)

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(a-\sqrt{ab}+b)\ge\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

$\Leftrightarrow a-\sqrt{ab}+b\ge\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$ (dấu "=" xảy ra khi a = b).

Bất đẳng thức cuối đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng.

Ví dụ 33. Cho x, y > 0 thỏa mãn điều kiện x + y = 2.

Chứng minh rằng $x^2y^2(x^2+y^2)\le 2$.

Giải. Vì x, y > 0 nên $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ (bất đẳng thức Cô-si).

Suy ra $2\ge 2\sqrt{xy}$ (vì x + y = 2) hay $0<\sqrt{xy}\le 1$.

Do đó $0<xy\le 1$, dẫn tới $x^2y^2\le xy$.

Xét vế trái $x^2y^2(x^2+y^2)\le xy[(x+y)^2-2xy]$

$= xy(4-2xy)$ (do x + y = 2).

$= -2x^2y^2+4xy$

$= -2(x^2y^2-2xy+1-1)$

$= -2(xy-1)^2+2\le 2.$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x = y \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$

C. Bài tập

45. Cho $x \geq 0$, chứng minh rằng :

a) $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+1} - 1$; b) $\dfrac{x+5}{\sqrt{x+4}} > 2$.

46. Cho a, b, $c \geq 0$, chứng minh rằng :

a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$;

b) $\dfrac{a}{2b+3c} + \dfrac{2b+3c}{4a} \geq 1$.

47. Chứng minh rằng :

$$\frac{\sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \ldots + \frac{\sqrt{200}}{200} > 10 + 5\sqrt{2}\,.$$

48. Chứng minh rằng :

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4.$$

49. Cho $a \geq 1$, $b \geq 1$, chứng minh rằng :

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab\,.$$

50. Cho a, b, $c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a > c$; $b > c$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

51. Giải phương trình

$$\sqrt{(x^2-2x+5)(x^2-4x+7)} = x^2 - 3x + 6\,. \qquad (1)$$

Chuyên đề 7
GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. Kiến thức cần nhớ

1. Bất phương trình ẩn x có dạng $A(x) < B(x)$; $A(x) > B(x)$; $A(x) \leq B(x)$; $A(x) \geq B(x)$ trong đó A(x) và B(x) là hai biểu thức của cùng biến x.

2. Hai quy tắc biến đổi bất phương trình

a) Quy tắc chuyển vế.

b) Quy tắc nhân với một số :

Khi nhân hai vế của một bất phương trình với cùng một số khác 0 ta phải :

– Giữ nguyên chiều của bất đẳng thức nếu số đó dương ;

– Đổi chiều của bất đẳng thức nếu số đó âm.

3. Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng $ax + b < 0$ (dấu "$<$" có thể thay bởi dấu $>$; $\leq$; $\geq$), trong đó x là ẩn, a, b là các số đã cho, $a \neq 0$.

Bất phương trình $ax + b < 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm duy nhất :

$$x < -\frac{b}{a} \text{ nếu } a > 0 ;$$

$$x > -\frac{b}{a} \text{ nếu } a < 0.$$

4. Các trường hợp đặc biệt

• $0x < m$ (1) :

– Nếu $m \leq 0$ thì (1) vô nghiệm ;

– Nếu $m > 0$ thì (1) có nghiệm tùy ý.

• $0x > m$ (2) :

– Nếu $m < 0$ thì (2) có nghiệm tùy ý ;

– Nếu $m \geq 0$ thì (2) vô nghiệm.

5. Bất phương trình đưa được về dạng $ax + b < 0$ (hoặc $ax + b > 0$)

• Bất phương trình dạng tích :

Nếu bất phương trình thu gọn được về dạng $A(x).B(x) < 0$ hoặc $A(x).B(x) > 0$ thì lúc đó :

$$A(x).B(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x) > 0 \text{ ; } B(x) < 0 \\ A(x) < 0 \text{ ; } B(x) > 0. \end{array}\right.$$

$$A(x).B(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x) > 0 \text{ ; } B(x) > 0 \\ A(x) < 0 \text{ ; } B(x) < 0. \end{array}\right.$$

• Bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

– Tìm ĐKXĐ ;

– Chuyển tất cả các hạng tử sang một vế, vế kia là số 0 ;

– Thu gọn về dạng $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ hoặc $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$.

Khi đó :

$$\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x) > 0 \ ; \ B(x) < 0 \\ A(x) < 0 \ ; \ B(x) > 0. \end{array}\right.$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x) > 0 \ ; \ B(x) > 0 \\ A(x) < 0 \ ; \ B(x) < 0. \end{array}\right.$$

6. Giải bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp chung là xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Một số dạng đặc biệt :

Dạng 1 : $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases}$.

Dạng 2 : $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$

Dạng 3 : $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2$

$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 > [g(x)]^2$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 34. Giải bất phương trình

$$\frac{mx + 5}{12} + \frac{x - 1}{4} > 2. \qquad (1)$$

Giải

$(1) \Leftrightarrow mx + 5 + 3(x - 1) > 24$

$\Leftrightarrow (m + 3)x > 22.$

• Nếu $m > -3$ thì $x > \frac{22}{m + 3}$

• Nếu $m < -3$ thì $x < \frac{22}{m + 3}$

• Nếu $m = -3$ ta có $0.x > 22$, bất phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 35. Giải bất phương trình

$$\frac{2x}{x+1} - \frac{x-3}{x-1} > 1. \quad (1)$$

Giải. ĐKXĐ : $x \neq \pm 1$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} - \frac{x-3}{x-1} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x(x-1) - (x-3)(x+1) - (x^2-1)}{x^2-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x^2-1} > 0$$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$ (vì $4 > 0$)

$\Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Ví dụ 36. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2 - 3x} > x - 2. \quad (1)$$

Giải. ĐKXĐ : $x(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ hoặc $x \geq 3$.

• Với $x \leq 0$ thì $\sqrt{x(x-3)} \geq 0$ còn $x - 2 < 0$

nên $x \leq 0$ là nghiệm của (1).

• Với $x \geq 3$ thì cả hai vế đều không âm. Bình phương hai vế ta được :

$x^2 - 3x > x^2 - 4x + 4$

$\Leftrightarrow x > 4$ (thuộc khoảng đang xét).

Vậy nghiệm của (1) là $x \leq 0$ hoặc $x > 4$.

Ví dụ 37. Giải bất phương trình

$$|x^2 + 5x - 3| < x^2 + 7x - 11. \quad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 3 < x^2 + 7x - 11 & (*) \\ x^2 + 5x - 3 > -(x^2 + 7x - 11) & (**) \end{cases}$$

• Giải bất phương trình (*) ta được

$(*) \Leftrightarrow 2x > 8 \Leftrightarrow x > 4.$

• Giải bất phương trình (**) ta được

$$(**) \Leftrightarrow x^2 + 6x - 7 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+7) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 > 0 \text{ và } x + 7 > 0 \\ x - 1 < 0 \text{ và } x + 7 < 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \text{ và } x > -7 \\ x < 1 \text{ và } x < -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -7. \end{array}\right.$$

Nghiệm của bất phương trình (1) phải thỏa mãn cả (*) và (**) nên nghiệm của (1) là $x > 4$.

C. Bài tập

52. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn cả hai bất phương trình :

$$\frac{x+2}{5} - \frac{3(x-4)}{4} < 3 \qquad (1)$$

$$\frac{4x+2}{7} + \frac{11x+3}{12} < 5 \qquad (2).$$

53. Giải bất phương trình :

$$\frac{(m+1)x}{2} - \frac{3x+2}{5} \geq \frac{10m-6}{10} \text{ (m là tham số).} \qquad (1)$$

54. Cho bất phương trình :

$$2mx - 19 > x \text{ (m là tham số).} \qquad (1)$$

a) Giải bất phương trình khi $m = \sqrt{5}$.

b) Tìm các giá trị của m để bất phương trình nhận mọi giá trị $x > 1$ là nghiệm.

55. Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa :

a) $A = \sqrt{25 - x^2}$; b) $B = \sqrt{x^2 - 9}$;

c) $C = \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 - 9}$.

56. Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{6x+1}{3x-1} < 2$;

b) $\dfrac{4x+5}{x-4} \le 1$.

57. Giải các bất phương trình :

a) $|8x-5| < 3$;

b) $|5x+7| < 3x-1$;

c) $|2x-5| > x-1$;

d) $|x-4| > |2x+1|$.

58. Giải các bất phương trình :

a) $\sqrt{7x-5} < 4$;

b) $\sqrt{25x^2-20x+4} > 4x+1$;

c) $\sqrt{x^2+6x} > 2\sqrt{10}$.

Chuyên đề 8

TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

1. *Định nghĩa :*

Cho biểu thức f(x)

a) Nếu với mọi x thỏa mãn ĐKXĐ của f(x) mà :

- $f(x) \le m$ (m là hằng số)
- Tồn tại $x = x_0$ sao cho $f(x_0) = m$

thì ta nói *m là giá trị lớn nhất* (GTLN) của biểu thức f(x) và kí hiệu là max f = m.

b) Nếu với mọi x thỏa mãn ĐKXĐ của f(x) mà :

- $f(x) \ge m$ (m là hằng số)
- Tồn tại $x = x_0$, sao cho $f(x_0) = m$

thì ta nói *m là giá trị nhỏ nhất* (GTNN) của f(x) và kí hiệu là min f = m.

Chú ý : Khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa một biến cũng được mở rộng cho biểu thức chứa nhiều biến.

2. *Cách tìm GTLN, GTNN của một biểu thức*

a) Để tìm giá trị lớn nhất của biểu thức f(x) ta cần :

– Chứng minh $f(x) \leq m$ với mọi x, đồng thời chỉ rõ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi nào, chẳng hạn tại $x = x_0$.

– Kết luận : $\max f = m$ khi và chỉ khi $x = x_0$.

b) Để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức f(x) ta cần :

– Chứng minh $f(x) \geq m$ với mọi x, đồng thời chỉ rõ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi nào, chẳng hạn tại $x = x_0$.

– Kết luận : $\min f = m$ khi và chỉ khi $x = x_0$.

3. *Cách tìm hằng số m*

a) Dựa vào các nhận xét sau :

- $A^2 \geq 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A = 0$.
- $A^2 + m \geq m$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A = 0$.
- $-A^2 + m \leq m$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A = 0$.
- Với a và b *cùng dấu* thì $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$).
- Với a và b *khác dấu* thì $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$, (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = -b$).

b) Từ bất đẳng thức Cô-si : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ta suy ra :

- Với hai số dương a và b, nếu tích ab không đổi, ab = k (k là hằng số dương) thì $\min(a + b) = 2\sqrt{k}$ (khi và chỉ khi a = b).
- Với hai số dương a và b, nếu tổng a + b không đổi, a + b = k (k là hằng số) thì : $\max(a.b) = \frac{k^2}{4}$ (khi và chỉ khi a = b).

c) Đối với tam thức bậc hai hoặc phân thức có mẫu và tử có bậc không quá hai, ta có thể dùng *phương pháp miền giá trị* của hàm số. Để tìm được miền giá trị này ta sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai là $\Delta \geq 0$ (xem ví dụ 38).

4. *Chú ý :* Nếu $A > 0$ thì

$$A \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \frac{1}{A} \text{ nhỏ nhất ;}$$

$$A \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{1}{A} \text{ lớn nhất.}$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 38. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 5x^2 - 20x + 30.$$

Giải

Cách 1. Vận dụng tính chất $A^2 \geq 0$.

Ta có $P = 5(x^2 - 4x + 6)$

$= 5(x^2 - 4x + 4 + 2)$

$= 5(x-2)^2 + 10 \geq 10$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Vậy min $P = 10$ khi $x = 2$.

Cách 2 : Vận dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai là $\Delta \geq 0$.

Biểu thức P nhận giá trị thực khi và chỉ khi phương trình sau phải có nghiệm :

$5x^2 - 20x + 30 = P$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 5x^2 - 20x + 30 - P = 0$ (2)

Xét $\Delta' = 100 - 5(30 - P) = 5P - 50$

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 5P - 50 \geq 0 \Leftrightarrow P \geq 10$.

Do đó min $P = 10$ khi và chỉ khi phương trình có nghiệm kép $x = \dfrac{-b'}{a} = 2$.

Ví dụ 39. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{x + 4\sqrt{x} + 20}{2(\sqrt{x} + 2)}.$$

Giải. ĐKXĐ : $x \geq 0$.

Ta có $Q = \dfrac{x + 4\sqrt{x} + 20}{2(\sqrt{x} + 2)} = \dfrac{x + 4\sqrt{x} + 4 + 16}{2(\sqrt{x} + 2)}$

$$Q = \frac{(\sqrt{x} + 2)^2 + 16}{2(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{2} + \frac{8}{\sqrt{x} + 2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với hai số dương $\dfrac{\sqrt{x} + 2}{2}$ và $\dfrac{8}{\sqrt{x} + 2}$ ta được

$$Q \geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{x}+2}{2}.\frac{8}{\sqrt{x}+2}} = 2\sqrt{4} = 4.$$

Vậy min Q = 4 khi và chỉ khi $\frac{\sqrt{x}+2}{2} = \frac{8}{\sqrt{x}+2} \Leftrightarrow x = 4$.

Ví dụ 40. Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi là 100 m, hình chữ nhật nào có diện tích lớn nhất ? Tính diện tích lớn nhất đó.

Giải. Gọi a và b là hai kích thước của hình chữ nhật.

Ta có $a + b = 50$.

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{50}{2} = 25.$$

Suy ra $ab \leq 625$.

Do đó max (ab) = 625 khi và chỉ khi a = b, nghĩa là hình chữ nhật đó là hình vuông.

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là $S = 625\ m^2$, khi và chỉ khi hình chữ nhật đó là hình vuông.

Ví dụ 41. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{15}{\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 10}}.$$

Giải. ĐK : $x \geq 0$.

Ta có $A = \frac{15}{\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2 + 9}} > 0$

Suy ra A lớn nhất $\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x}-1)^2 + 9}$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn ĐK).

Lúc đó max $A = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5$ khi và chỉ khi $x = 1$.

Ví dụ 42. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = |x - 2| + |x - 5|.$$

Giải. Ta có $A = |x-2| + |x-5| = |x-2| + |5-x|$.

Áp dụng bất đẳng thức $|a| + |b| \geq |a+b|$ ta được

$A \geq |x - 2 + 5 - x| = |3| = 3$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x-2)(5-x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5$.

Vậy min A = 3 khi và chỉ khi $2 \leq x \leq 5$.

Ví dụ 43. Cho $x + y + z = 6$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = x^2 + y^2 + z^2.$$

Giải. Ta đặt $x = 2 + a$; $y = 2 + b$; $z = 2 + c$

Suy ra $x + y + z = 6 + a + b + c$.

Mặt khác $x + y + z = 6$ nên $a + b + c = 0$.

Ta có $B = x^2 + y^2 + z^2 = (2+a)^2 + (2+b)^2 + (2+c)^2$

$= 12 + 4(a+b+c) + (a^2 + b^2 + c^2)$

$= 12 + (a^2 + b^2 + c^2)$ (vì $a + b + c = 0$)

Do đó $B \geq 12$ (vì $a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$)

Vậy min B = 12 khi và chỉ khi $a = b = c = 0$ hay $x = y = z = 2$.

Nhận xét : Nếu $x + y + z = k$ thì ta đặt biến mới là a, b, c sao cho

$$x = \frac{k}{3} + a \ ; \ y = \frac{k}{3} + b \ ; \ z = \frac{k}{3} + c.$$

Ví dụ 44. Cho $x \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + \dfrac{1}{x}$.

Giải

Cách giải dẫn đến bế tắc :

Ta có $P = x + \dfrac{1}{x} \geq 2\sqrt{x.\dfrac{1}{x}} = 2.\sqrt{1} = 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$.

Giá trị $x = 1$ không thỏa mãn điều kiện $x \geq 2$.

Cách giải đúng :

Ta có $P = x + \dfrac{1}{x} = \left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{3x}{4} \geq 2\sqrt{\dfrac{x}{4}.\dfrac{1}{x}} + \dfrac{3x}{4}$, suy ra

$P \geq 2.\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{3.2}{4}$ (vì $x \geq 2$).

$P \geq 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{1}{x} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ (thoả mãn).

Vậy $\min P = \frac{5}{2}$ khi và chỉ khi $x = 2$.

C. Bài tập

59. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức

a) $A = -3x^2 - 6x + 2$;

b) $B = \frac{23}{4x^2 - 5x + 3}$;

c) $C = -\sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{2}}$.

60. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = -\frac{3x + \sqrt{x} + 6}{\sqrt{x}}.$$

61. Tìm cặp số (x ; y) thỏa mãn phương trình sau sao cho y đạt giá trị nhỏ nhất

$$2x^2 - 12x - y + 19 = 0. \qquad (1)$$

62. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2x}{x^2 - 2x + 4}.$$

63. Cho hai bộ số (a, b) và (m, n) trong đó a, b, m, n khác 0.

a) Chứng minh rằng $(am + bn)^2 \leq (a^2 + b^2)(m^2 + n^2)$.

b) Áp dụng : Cho các số dương x và y thỏa mãn điều kiện $x + 2\sqrt{y} = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + y$.

64. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $A = |x + 3| - |x - 4|$.

65. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = x^2 + 3x + \frac{1}{x} \text{ với } x > 0.$$

66. Cho $x \geq 4$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$C = x + \frac{1}{x+1}.$$

67. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = a$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$.

68. Cho biểu thức $A = \frac{x^2 + 3y^2}{xy}$ trong đó $x, y > 0$ thỏa mãn $x \geq 3y$. Tìm min A.

69. Cho biểu thức $B = 3x^2 - x + \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$ trong đó $x > 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của B.

Chuyên đề 9
GIẢI TOÁN CÓ NỘI DUNG SỐ HỌC

A. Kiến thức cần nhớ

I. Phép chia hết và phép chia có dư

1. *Định nghĩa*

Cho $a, b, q \in \mathbb{Z}, b \neq 0$

$a \vdots b \Leftrightarrow a = b.q$;

$a \not\vdots\, b \Leftrightarrow a = b.q + r$ trong đó $0 < r < |b|, r \in \mathbb{Z}$.

2. *Tính chất chia hết*

Cho $a, b, x, y, m \in \mathbb{Z}$

1) $a \vdots b\ ;\ b \vdots m \Rightarrow a \vdots m$

2) $a \vdots xy \Rightarrow a \vdots x$ và $a \vdots y$

3) $a \vdots x\ ;\ b \vdots y \Rightarrow ab \vdots xy$

4) $a \vdots m$; $b \vdots m \Rightarrow (ax \pm by) \vdots m$

Đặc biệt, nếu $(a \pm b) \vdots m$ và $a \vdots m$ thì $b \vdots m$.

5) $a \not\vdots m$; $b \vdots m \Rightarrow (a \pm b) \not\vdots m$

6) $ab \vdots m$ mà $(a ; m) = 1$ thì $b \vdots m$.

7) $a \vdots x$ và $a \vdots y$ mà $(x ; y) = 1$ thì $a \vdots xy$

8) Nếu a và b chia cho m có cùng số dư thì hiệu $a - b$ chia hết cho m.

Nhận xét

- Trong n số nguyên liên tiếp luôn có một và chỉ một số chia hết cho n.
- Tích của n số nguyên liên tiếp chia hết cho n.

II. Số chính phương

1. *Định nghĩa*

Số chính phương là số bằng bình phương của một số nguyên.

Ví dụ số 81 là một số chính phương, vì $81 = 9^2$.

2. *Tính chất của số chính phương*

1) Số chính phương không có tận cùng bằng các chữ số 2 ; 3 ; 7 ; 8.

2) Số chính phương chia cho 3, chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1 ; chia cho 5 dư 0, dư 1 hoặc dư 4.

3) Số chính phương lẻ chia cho 4, chia cho 8 đều dư 1.

Ví dụ : số 25 là số chính phương lẻ.

25 chia cho 4 được thương là 6 dư 1 ;

25 chia cho 8 được thương là 3 dư 1.

III. Nguyên lí Đi-rich-lê

1. Nếu nhốt $n + 1$ con thỏ vào n cái lồng $(n \in \mathbb{N}^*)$ thì ít nhất cũng có một lồng nhốt từ hai con thỏ trở lên.

Tổng quát : Nếu nhốt a con thỏ vào b cái lồng mà $a = b.q + r$ $(0 < r < b)$ thì ít nhất cũng có một lồng nhốt từ $q + 1$ con thỏ trở lên.

Ví dụ : Từ đẳng thức $13 = 3.4 + 1$ suy ra nếu nhốt 13 con thỏ vào 3 cái lồng thì ít nhất cũng có một cái lồng nhốt từ 5 con thỏ trở lên.

2. Áp dụng vào chia hết : Trong $n + 1$ số tự nhiên bao giờ cũng có thể chọn ra hai số mà hiệu của chúng chia hết cho n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 45. Cho hai số tự nhiên, mỗi số có 3 chữ số, khi chia cho 7 thì có cùng một số dư. Viết hai số tự nhiên đó liền nhau thì được một số có 6 chữ số. Chứng minh rằng số có 6 chữ số này chia hết cho 7.

Giải. Gọi hai số tự nhiên có ba chữ số đó là $\overline{abc}$ và $\overline{mnp}$. Vì các số này chia cho 7 có cùng một số dư nên :

$$\overline{abc} = 7k + r\ ;\ \overline{mnp} = 7l + r.$$

Ta có $\overline{abcmnp} = 1000\overline{abc} + \overline{mnp}$

$$= 1000(7k + r) + 7l + r$$

$$= 7(1000k + l) + 1001r.$$

Vì $7 \vdots 7$; $1001 \vdots 7$ nên $\overline{abcmnp} \vdots 7$.

Ví dụ 46. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì :

a) $9^n + 1 \not\vdots\ 40$;

b) $n^2 + n + 2 \not\vdots\ 9$.

Giải

a) Ta có $9^n + 1 = (8 + 1)^n + 1 = B(8) + 1^n + 1 = B(8) + 2 \not\vdots\ 4$

Suy ra $9^n + 1 \not\vdots\ 40$.

b) Xét các trường hợp số dư của n khi chia cho 3 :

- Nếu $n = 3k$ thì $n^2 + n + 2 = 9k^2 + 3k + 2 \not\vdots\ 3$.
- Nếu $n = 3k + 1$ thì $n^2 + n + 2 = (3k + 1)^2 + (3k + 1) + 2$

  $= 9k^2 + 9k + 4 \not\vdots\ 3$.
- Nếu $n = 3k + 2$ thì $n^2 + n + 2 = (3k + 2)^2 + (3k + 2) + 2$

  $= 9k^2 + 15k + 8 \not\vdots\ 3$.

Vậy $n^2 + n + 2 \not\vdots\ 3$ suy ra $n^2 + n + 2 \not\vdots\ 9$.

Lưu ý **:** Trong cách giải của câu a, ta đã dùng tính chất sau :

$$(a + b)^n = B(a) + b^n = B(b) + a^n.$$

Ví dụ 47. Tìm $n \in \mathbb{Z}$ sao cho $n^2 + 1 \vdots (n + 1)$.

Giải. Ta có $n^2 + 1 = n^2 - 1 + 2 = (n - 1)(n + 1) + 2$.

Do đó $n^2 + 1 \vdots (n + 1) \Leftrightarrow 2 \vdots (n + 1)$.

Vậy $n + 1 \in Ư(2) = \{1 ; -1 ; 2 ; -2\}$.

$n + 1$	1	-1	2	-2
n	0	-2	1	-3

Do đó $n \in \{-3 ; -2 ; 0 ; 1\}$.

Ví dụ 48. Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên liên tiếp cộng với 1 luôn là một số chính phương.

Giải. Gọi bốn số nguyên liên tiếp lần lượt là n, n + 1, n + 2, và n + 3.

Ta có $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$

$$= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2.$$

Rõ ràng $(n^2 + 3n + 1)^2$ là một số chính phương.

Ví dụ 49. Chứng minh rằng tổng các bình phương của 6 số nguyên liên tiếp không thể là số chính phương.

Giải

Gọi 6 số nguyên liên tiếp lần lượt là

$$a - 3, a - 2, a - 1, a, a + 1 \text{ và } a + 2.$$

Ta có $S = (a - 3)^2 + (a - 2)^2 + (a - 1)^2 + a^2 + (a + 1)^2 + (a + 2)^2$

$$S = 6a^2 - 6a + 19 = 6a(a - 1) + 16 + 3.$$

Vì $a(a - 1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, do đó $6a(a - 1)$ chia hết cho 4. Hiển nhiên 16 chia hết cho 4.

Suy ra S chia cho 4 dư 3.

Do đó S không là số chính phương, vì số chính phương chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

Ví dụ 50. Cho ba số nguyên a, b, c. Chứng minh rằng tích $P = (a - b)(b - c)(c - a)$ là một số chẵn.

Giải

Chia ba số nguyên cho 2 thì ít nhất cũng có hai trong ba số đó có cùng số dư. Hiệu của hai số này chia hết cho 2. Hiệu này là $a - b$ hoặc $b - c$ hoặc $c - a$. Do đó P là một số chẵn.

C. Bài tập

70. Cho một số có ba chữ số trong đó chữ số hàng trăm và chữ số hàng chục đều là số lẻ. Chứng minh rằng hiệu của số có ba chữ số này với số đó viết theo thứ tự ngược lại thì chia hết cho 198.

71. Chứng minh rằng $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + 19^3 \;\vdots\; 20$

72. Cho các số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_5$ và $b_1, b_2, \ldots, b_5$ cũng là các số nguyên đó nhưng lấy theo thứ tự khác.

Chứng minh rằng tích $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\ldots(a_5 - b_5) \;\vdots\; 2$.

73. Cho biểu thức $P = (a + b)(b + c)(c + a) - abc$. Chứng minh rằng :

a) Có thể biểu diễn P dưới dạng $(a + b + c)(ab + bc + ca) - 2abc$.

b) Nếu $a + b + c \;\vdots\; 4$ thì $P \;\vdots\; 4$.

74. Chứng minh rằng tích của một số chính phương với số tự nhiên đứng liền trước nó thì chia hết cho 12.

75. Chứng minh rằng các số sau là số chính phương :

a) $M = \underbrace{11\ldots1}_{2n \text{ chữ số}} + \underbrace{44\ldots4}_{n \text{ chữ số}} + 1$.

b) $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ chữ số}}2 . \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ chữ số}}4 + 1$.

76. Tìm số chính phương $\overline{abcd}$ biết $\overline{ab} - \overline{cd} = 4$.

77. Tìm số chính phương có bốn chữ số, hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số cuối giống nhau.

78. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $(n!)^4 + 7$ không thể là số chính phương.

79. Cho dãy số $7, 7^2, 7^3, \ldots, 7^{1001}$ (1)

Chứng minh trong dãy này có một số có tận cùng là 001.

80. Chứng minh rằng trong 32 số nguyên bất kì luôn tìm được hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 60.

PHẦN HAI. CÁC CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC

Chuyên đề 10
CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC

A. Kiến thức cần nhớ

1. *Chứng minh tổng (hoặc hiệu) hai đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng thứ ba.* Bạn có thể:

- Chia đoạn thẳng lớn nhất thành hai phần, sao cho một phần bằng đoạn thẳng thứ nhất và chứng minh phần còn lại bằng đoạn thẳng thứ hai.

- Dựng tổng của hai đoạn thẳng cho trước rồi chứng minh tổng này bằng đoạn thẳng thứ ba.

2. *Chứng minh tổng (hoặc hiệu) hai góc bằng góc thứ ba*:

- Ta có thể làm tương tự như chứng minh tổng (hoặc hiệu) hai đoạn thẳng bằng đoạn thẳng thứ ba.

- Dùng định lí về góc nội tiếp: Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

3. *Chứng minh hai hệ thức hình học bằng nhau*:

a) Dùng định lí Ta-lét: Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì tạo ra những cặp đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

b) Hai tam giác đồng dạng thì các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ, các cặp góc tương ứng bằng nhau.

c) Dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông.

d) *Dùng tính chất:* Đường tròn (O) và một điểm M cố định không nằm trên đường tròn. Qua M kẻ hai đường thẳng. Đường thẳng thứ nhất cắt (O) tại A và B. Đường thẳng thứ hai cắt (O) tại C và D.

Ta có MA.MB = MC.MD.

e) *Dùng tính chất:* Nếu từ một điểm M ở ngoài đường tròn, vẽ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB thì MT^2 = MA.MB.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm M bất kì trên cung nhỏ BC. Chứng minh rằng MB + MC = MA.

Phân tích tìm lời giải. Để chứng minh AM = BM + CM, lẽ tự nhiên chúng ta có hai ý tưởng: thứ nhất, tách AM thành hai đoạn, đoạn thứ nhất bằng BM và chứng minh đoạn thứ hai bằng CM; thứ hai, có thể dựng một đoạn thẳng bằng BM + CM rồi chứng minh đoạn thẳng đó bằng AM. Thật vậy, ta có lời giải sau:

Giải

Cách 1 (h.1). Trên tia MA lấy điểm D sao cho MD = MB.

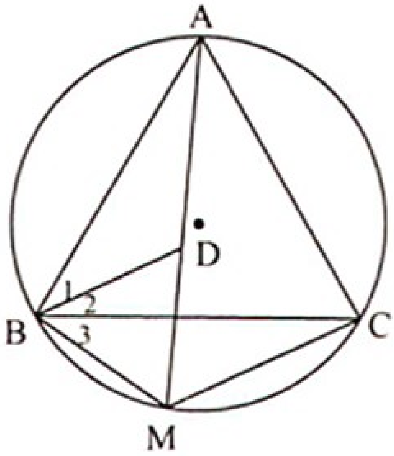
ΔBMD có MD = MB, $\widehat{BMD} = \widehat{BCA} = 60^0$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$) $\Rightarrow \Delta$BMD đều $\Rightarrow$ BD = BM ; $\widehat{MBD} = 60^0$.

Xét ΔABD và ΔCBM có AB = BC;

$\widehat{B_1} = \widehat{B_3}\ (= 60^0 - \widehat{B_2})$; BD = BM

nên Δ ABD = Δ CBM (c.g.c) $\Rightarrow$ AD = MC.

Vậy MB + MC = MD + AD = MA.



Hình 1

Cách 2 (h.2). Trên tia đối của tia MB, lấy điểm E sao cho ME = MC.

Tứ giác ABMC nội tiếp có $\widehat{BAC} = 60^0$ nên

$\widehat{BMC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{CME} = 60^0$

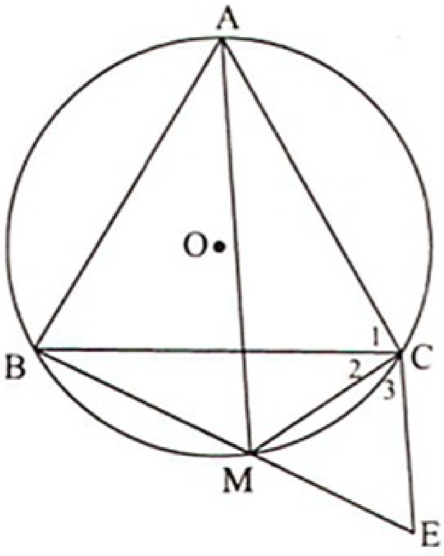
$\Rightarrow \Delta$CME đều $\Rightarrow$ CM = CE; $\widehat{C_3} = 60^0$.

Xét Δ ACM và Δ BCE có AC = BC,

$\widehat{ACM} = \widehat{BCE}\ \left(= 60^0 + \widehat{C_2}\right)$, CM = CE nên

Δ ACM = Δ BCE (c.g.c)

$\Rightarrow$ AM = BE = BM +ME hay AM = BM + MC.



Hình 2

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, trực tâm H. Người ta dựng hình bình hành BHCD và gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành đó.

a) Chứng minh tứ giác ABDC nội tiếp được.

b) So sánh góc BAH và OAC (O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

c) Gọi G là giao điểm của AI và OH. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC.

d) Tìm điều kiện ràng buộc giữa các góc B và C để OH song song với BC.

Giải (h.3)

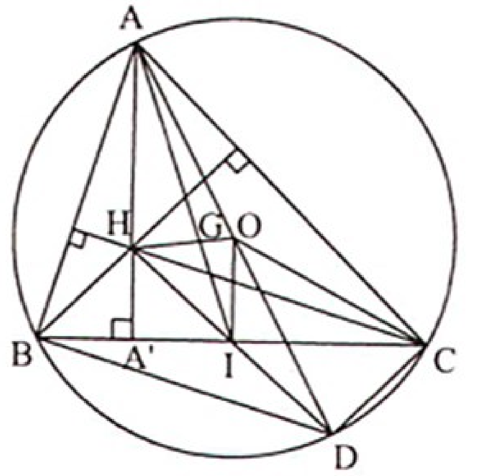
a) Ta có $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = \widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^0$ nên tứ giác ABDC nội tiếp được.

b) Tam giác OAC cân tại O nên

$$\widehat{OAC} = \frac{180^0 - \widehat{AOC}}{2} = 90^0 - \widehat{ABC} = \widehat{BAH}.$$

Nhận xét. Bạn có thể chứng minh

$\Delta A'BA \backsim \Delta CDA$.



Hình 3

c) Do DB // CH nên DB $\perp$ AB, suy ra D đối xứng với A qua O.

Xét tam giác DAH có OI // AH (cùng vuông góc với BC) và OA = OD nên OI là đường trung bình. Suy ra OI = $\frac{1}{2}$AH. Áp dụng định lí Ta-lét ta có:

$$\frac{IG}{GA} = \frac{OI}{AH} = \frac{1}{2}.$$

Vậy G là trọng tâm của tam giác ABC.

d) Gọi A' là giao điểm của AH và BC. Ta có OH // BC và OIA'H là hình chữ nhật nên $HA' = OI \Leftrightarrow HA' = \frac{1}{2}HA \Leftrightarrow HA' = \frac{1}{3}AA'$

$$\Leftrightarrow \frac{HA'}{BA'} \cdot \frac{BA'}{AA'} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cot\widehat{BHA'} . \cot\widehat{ABC} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cot C . \cot B = \frac{1}{3} \;\; (\widehat{BHA'} = \widehat{C} \text{ vì cùng phụ với } \widehat{HBC}).$$

Nhận xét. Thực chất câu d) là cho $HA' = \frac{1}{3}AA'$, nên để tìm mối quan hệ giữa góc B và góc C mà biết tỉ số của hai đoạn thẳng nhất thiết phải dùng tỉ số lượng giác. Từ cách giải trên bạn có thể giải được câu tổng quát sau: Tìm điều kiện ràng buộc giữa các góc B và C để AA' = m.HA' (với m > 1).

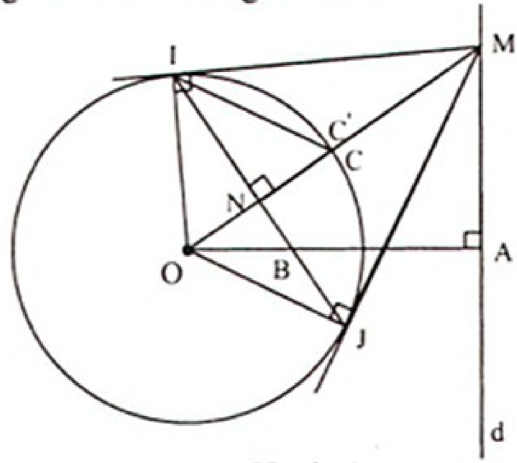
Ví dụ 3. Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm A ở ngoài đường tròn. Từ một điểm M chuyển động trên đường thẳng d vuông góc với OA tại A, vẽ các tiếp tuyến MI, MJ với đường tròn (I, J là các tiếp điểm). Dây IJ cắt OM tại N và cắt OA tại B.

a) Chứng minh $OA.OB = OM.ON = R^2$.

b) Gọi C là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MIJ. Chứng minh C thuộc nửa đường tròn cố định.

c) Cho góc MIJ bằng α. Chứng minh diện tích tứ giác MIOJ bằng $R^2.\tan\alpha$.

Giải (h.4)



Hình 4

a) MI, MJ là tiếp tuyến nên MI = MJ và MO là đường phân giác của $\widehat{IMJ} \Rightarrow$ MO cũng là đường cao trong tam giác MIJ $\Rightarrow MO \perp IJ$.

ΔONB và ΔOAM có $\widehat{ONB} = \widehat{OAM} \left(= 90^0\right)$,

$\widehat{MOA}$ chung $\Rightarrow \Delta ONB \backsim \Delta OAM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{ON}{OA} = \dfrac{OB}{OM} \Rightarrow OA.OB = ON.OM.$ (1)

ΔOIM có $\widehat{OIM} = 90^0; IN \perp OM$ nên $OI^2 = OM.ON$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông). (2)

Từ (1) và (2) ta có $OM.ON = OA.OB = R^2$.

b) Gọi C' là giao điểm của đoạn thẳng OM với đường tròn (O) ta có OM là đường phân giác của $\widehat{IOJ}$ nên $\overset{\frown}{IC'} = \overset{\frown}{JC'}$ từ đó suy ra $\widehat{MIC'} = \widehat{JIC'}$ hay IC' là đường phân giác của $\widehat{MIJ}$. Mặt khác MC' là đường phân giác của $\widehat{IMJ} \Rightarrow$ C' là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta MIJ \Rightarrow C' \equiv C$. Vậy C thuộc nửa đường tròn tâm O cố định.

c) Ta có $\widehat{MIJ} = \widehat{IOM} \Rightarrow \widehat{IOM} = \alpha$.

ΔIOM vuông tại I nên $IM = OI.\tan\widehat{IOM} \Rightarrow IM = R.\tan\alpha$.

Ta có $S_{MIOJ} = 2.S_{MIO} = 2.\dfrac{1}{2}.OI.MI = 2.\dfrac{1}{2}.R.R\tan\alpha = R^2\tan\alpha$.

> ***Nhận xét.*** Để chứng minh một đẳng thức tích của các đoạn thẳng, bạn có thể gán cho các đoạn thẳng ấy vào một cặp tam giác đồng dạng. Kĩ thuật để nhận ra cặp tam giác đồng dạng là chuyển đẳng thức tích về dạng tỉ số. Khi đó mỗi tam giác được xét sẽ có cạnh hoặc là nằm cùng một vế, hoặc cùng

nằm ở tử thức hoặc là nằm cùng ở mẫu thức. Chẳng hạn OA.OB = ON.OM $\Leftrightarrow \dfrac{ON}{OA} = \dfrac{OB}{OM}$ khi đó bạn chứng minh được ΔONB $\backsim$ ΔOAM hoặc ΔONA $\backsim$ ΔOBM. Tuy nhiên bạn nên chọn cặp tam giác đã có.

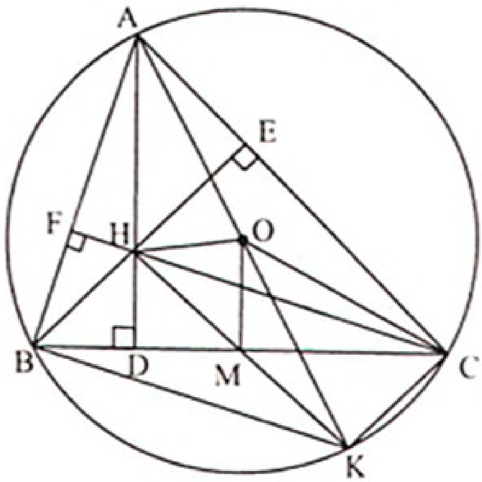
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O; R) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a) $BH.BE + CE.CA = BC^2$.

b) $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2 = CH^2 + AB^2$.

c) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABH, ACH, BCH có bán kính bằng nhau.

Giải (h.5)



Hình 5

a) Δ BDH và Δ BEC có $\widehat{BDH} = \widehat{BEC} = 90^0$

$\widehat{CBE}$ chung nên $\Delta BDH \backsim \Delta BEC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BD}{BE} \Rightarrow BH.BE = BD.BC$. (1)

ΔCEB và ΔCDA có $\widehat{CDA} = \widehat{BEC} = 90^0$

$\widehat{BCA}$ chung nên $\Delta CEB \backsim \Delta CDA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CE}{CD} = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow CE.AC = CD.BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$$BH.BE + CE.CA = BD.BC + CD.BC = (BD + CD).BC = BC^2.$$

b) Kẻ đường kính AK $\Rightarrow$ KC $\perp$ AC $\Rightarrow$ KC // BH; KB $\perp$ AB $\Rightarrow$ KB // CH

$\Rightarrow$ BHCK là hình bình hành.

Gọi M là giao điểm của HK và BC suy ra OM là đường trung bình của Δ AHK

$\Rightarrow$ AH = 2.OM.

Do đó: $AH^2 + BC^2 = 4.OM^2 + 4.MC^2 = 4.OC^2 = 4.R^2$.

Tương tự như vậy ta được: $BH^2 + AC^2 = 4.R^2$; $CH^2 + AB^2 = 4.R^2$.

Suy ra $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2 = CH^2 + AB^2$.

c) Ta có Δ BHC = Δ CKB nên Δ BHC và ΔCKB có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng nhau. Từ đó suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp Δ BHC bằng R.

Tương tự ΔAHB, ΔAHC cũng có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

> ***Nhận xét.*** Để chứng minh $BH.BE + CE.CA = BC^2$, bạn có thể suy luận như sau $BH.BE + CE.CA = BC(x + y)$ với $x + y = BC$. Sau đó chứng minh $BH.BE = BC.x$, $CE.CA = BC.y$ bằng cách chọn các cặp tam giác đồng dạng. Lưu ý rằng BH, BE, BC đã là độ dài các cạnh của tam giác vuông nên chọn x cũng là độ dài cạnh tam giác vuông, từ đó ta có cách chứng minh trên. Cách làm trên có thể áp dụng cho các câu chứng minh tổng tích các cặp đoạn thẳng.

C. Bài tập

1. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác trong của góc B cắt đường tròn tại D, tia phân giác trong của góc C cắt đường tròn tại E, hai tia phân giác này cắt nhau tại F. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của dây DE với các cạnh AB, AC.

a) Chứng minh các tam giác EBF, ADF là các tam giác cân.

b) Chứng minh tứ giác DKFC nội tiếp và FK song song với AB.

c) Tứ giác AIFK là hình gì? Tại sao?

d) Tìm điều kiện của tam giác ABC để tứ giác AEFD là hình thoi, đồng thời có diện tích gấp ba lần diện tích tứ giác AIFK.

2. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn đó ta kẻ tiếp tuyến Ax và dây AC bất kì. Tia phân giác của góc CAx cắt nửa đường tròn tại D, hai tia AD và BC cắt nhau tại E. Tia BD cắt Ax tại F.

a) Chứng minh rằng tam giác ABE cân.

b) Gọi K là giao điểm của AC và BC. Chứng minh rằng tứ giác AKEF là hình thoi.

c) Giả sử $\sin\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}$, chứng minh rằng $AK = 2.KC$.

3. Cho đường tròn (O) có một dây AB cố định và điểm M bất kì trên cung lớn AB. Dựng đường tròn (O_1) qua M và tiếp xúc với AB tại A, đường tròn (O_2) qua M và tiếp xúc với AB tại B. Gọi N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O_1) và (O_2). Gọi I, S lần lượt là giao điểm của tia MN với AB và đường tròn (O). Chứng minh rằng :

a) $IA = IB$.

b) $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = 180^0$.

c) Tứ giác ANBS là hình bình hành.

4. Cho đường tròn (O), trên đó có điểm A cố định. Kẻ tia Ax là tiếp tuyến của đường tròn. Lấy điểm M trên Ax, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn (O). Gọi I là trung điểm của MA và K là giao điểm thứ hai của BI với đường tròn (O). Tia MK cắt đường tròn (O) tại điểm C (khác điểm K).

a) Chứng minh rằng $IA^2 = IK.IB$.

b) Chứng minh rằng tam giác MIK đồng dạng với tam giác BIM.

c) Chứng minh BC song song với AM.

d) Xác định vị trí của điểm M trên tia Ax sao cho AK vuông góc với MB.

5. Cho đoạn thẳng AD = a. Gọi I là trung điểm của AD, kẻ tia Ix vuông góc với AD. Một đường tròn (O) bất kì bán kính R ($R > \frac{a}{2}$) tiếp xúc với AD tại A cắt Ix tại B và C (B nằm giữa I và C).

a) Chứng minh rằng IC.IB không đổi khi đường tròn thay đổi.

b) Chứng minh B là trực tâm của tam giác ACD. Có nhận xét gì về trực tâm của tam giác ABC khi đường tròn (O) thay đổi ?

c) Gọi D' là điểm đối xứng của D qua đường thẳng AC. Chứng minh tứ giác ABCD' nội tiếp.

d) Giả sử $\cos\widehat{CAI} = \frac{1}{2}$. Chứng minh tứ giác ADCD' là hình thoi.

6. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của DE, K là giao điểm của BC và AE. Chứng minh rằng:

a) HA là tia phân giác của góc BHC.

b) AH.AK = AD.AE.

c) $\dfrac{2}{AK} = \dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{AE}$.

d) BD.CE = BE.CD.

e) $\dfrac{1}{AE} + \dfrac{1}{KE} = \dfrac{2}{DE}$.

Chuyên đề 11
CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP VÀ NHIỀU ĐIỂM CÙNG NẰM TRÊN ĐƯỜNG TRÒN

A. Kiến thức cần nhớ

1. *Tứ giác nội tiếp*

- Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).
- Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm là tứ giác nội tiếp.
- Tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0 là tứ giác nội tiếp.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc bằng nhau là tứ giác nội tiếp.

2. *Chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn*

- Lợi dụng các tam giác vuông có cạnh huyền chung.
- Chứng minh các đỉnh của một đa giác cùng nằm trên một đường tròn.
- Sử dụng cung chứa góc.
- Chứng minh các tứ giác nội tiếp.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 5. Cho đường tròn tâm O đường kính AD. Kẻ hai dây cung AC và DB cắt nhau tại điểm E nằm trong đường tròn. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

a) Các tứ giác ABEH, DCEH nội tiếp được.

b) E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH.

c) Năm điểm B, C, I, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

Giải (h.6)

a) $\widehat{ABD}=90^0$, $\widehat{ACD}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD).

$EH \perp AD \Rightarrow \widehat{EHA}=\widehat{EHD}=90^0$.

Suy ra: $\widehat{ABD}+\widehat{EHA}=180^0$, mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác ABEH nội tiếp.

Ta cũng có $\widehat{ACD} + \widehat{EHD} = 180^0$ mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác DCEH nội tiếp.

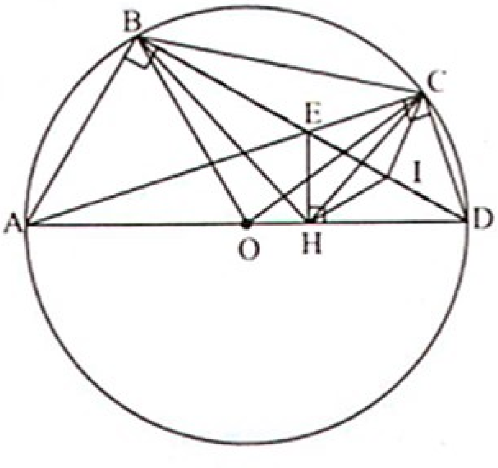
b) Xét đường tròn (O) ta có

$\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$; $\widehat{ECB} = \widehat{EDA}$.

Mặt khác: $\widehat{CAD} = \widehat{EBH}$ (tứ giác ABEH nội tiếp), $\widehat{EDA} = \widehat{ECH}$ (tứ giác DCEH nội tiếp).

Từ đó suy ra $\widehat{EBH} = \widehat{EBC}$; $\widehat{ECB} = \widehat{ECH}$,

hay E là giao điểm hai đường phân giác của ΔBCH. Vậy E là tâm đường tròn nội tiếp ΔBCH.



Hình 6

c) Tứ giác ABEH nội tiếp nên $\widehat{BHE} = \widehat{BAE} \Rightarrow \widehat{BHC} = 2.\widehat{BAC}$.

Xét đường tròn (O), ta có $\widehat{BOC} = 2.\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BOC}$ mà H và O nằm cùng phía đối với BC, cùng nhìn BC dưới một góc bằng nhau suy ra BCHO nội tiếp. (1)

ΔECD vuông tại C có CI là đường trung tuyến suy ra IC = ID = IE $\Rightarrow \widehat{CIE} = 2.\widehat{CDE} \Rightarrow \widehat{CIB} = \widehat{COB}$ mà I và O nằm cùng phía với BC cùng nhìn BC dưới một góc bằng nhau suy ra BCIO nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) suy ra B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

> ***Nhận xét***. Để chứng minh năm điểm cùng nằm trên một đường tròn, bạn nên chứng minh hai tứ giác nội tiếp. Chẳng hạn để chứng minh B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn, ta chứng minh BCHO, BCIO nội tiếp vì khi đó H và I sẽ cùng thuộc đường tròn ngoại tiếp của tam giác BCO.

Ví dụ 6. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn (CD > AB). P là điểm chính giữa của cung AB (cung không chứa điểm C, D). Hai dây PC, PD lần lượt cắt dây AB tại E và F. Các dây AD, PC kéo dài cắt nhau tại I. Các dây BC, PD kéo dài cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác CDFE nội tiếp được.

b) Tứ giác IKCD nội tiếp được.

c) IK song song với AB.

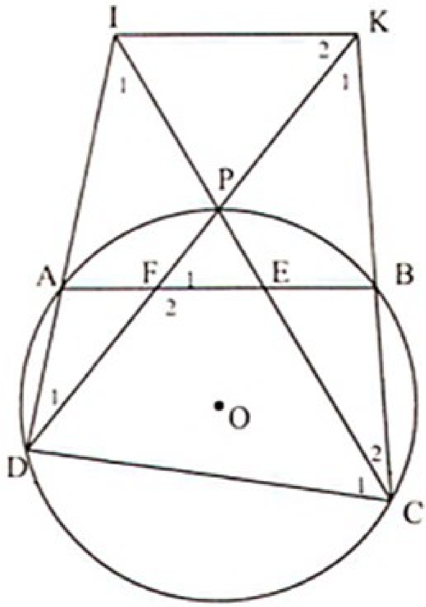
Giải (h.7)

a) Ta có: $\widehat{F_1} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{PB} + \text{sđ}\overset{\frown}{AD}}{2}$; $\widehat{C_1} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{PAD}}{2} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{PA} + \text{sđ}\overset{\frown}{AD}}{2}$

mà $\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{PB} \Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{C_1}$.

Mặt khác $\widehat{F_1} + \widehat{F_2} = 180^0$ nên $\widehat{F_2} + \widehat{C_1} = 180^0$ suy ra tứ giác CDFE nội tiếp được.

Nhận xét. Khi chứng minh tứ giác nội tiếp không phải trường hợp có góc vuông, bạn nên chứng minh một góc trong của tứ giác bằng góc ngoài kề với góc ở đỉnh đối diện.



Hình 7

b) Xét đường tròn (O) có:

$$\widehat{C_2} = \frac{sđ\overset{\frown}{PB}}{2}\ ;\ \widehat{D_1} = \frac{sđ\overset{\frown}{AP}}{2}$$

mà $\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{PB} \Rightarrow \widehat{C_2} = \widehat{D_1}$.

Xét tứ giác CDIK có $\widehat{C_2} = \widehat{D_1}$ mà C, D là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn IK dưới một góc bằng nhau nên tứ giác CDIK nội tiếp.

Nhận xét. Bạn cũng có thể chứng minh $\widehat{I_1} = \widehat{K_1}$.

c) Tứ giác CDIK nội tiếp nên $\widehat{C_1} = \widehat{K_2}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung ID) mà $\widehat{C_1} = \widehat{F_1} \Rightarrow \widehat{K_2} = \widehat{F_1} \Rightarrow IK \,//\, AB$.

Nhận xét. Khi đã chứng minh được tứ giác nội tiếp, bạn có thể vận dụng được các góc nội tiếp của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

Ví dụ 7. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và hai điểm C, D thuộc nửa đường tròn sao cho C là điểm chính giữa của cung AM và góc COD bằng 90^0. Gọi E là giao điểm của AM và OC; F là giao điểm của BM và OD.

a) Tứ giác OEMF là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh D là điểm chính giữa của cung MB.

c) Một đường thẳng d tiếp xúc với nửa đường tròn tại M cắt tia OC, OD lần lượt tại I, K. Chứng minh các tứ giác OBKM, OAIM nội tiếp được.

d) Giả sử tia AM cắt tia BD tại S. Xác định vị trí của C và D sao cho năm điểm M, O, B, K, S cùng thuộc một đường tròn.

Giải (h.8) a) ΔAOM cân (OA = OM) có OE là tia phân giác của $\widehat{AOM}$ nên OE cũng là đường cao suy ra OE $\perp$ AM. Ta lại có $\widehat{EMF} = 90^0$, $\widehat{EOF} = 90^0$ nên tứ giác MEOF là hình chữ nhật.

b) Ta có $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^0 \Rightarrow \widehat{O_1} + \widehat{O_4} = 90^0$,

mà $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow \widehat{O_3} = \widehat{O_4} \Rightarrow \overset{\frown}{MD} = \overset{\frown}{DB}$.

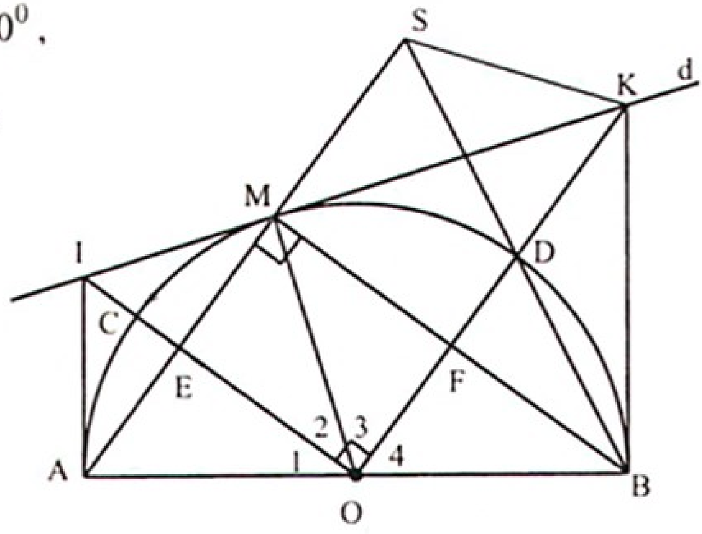
c) ΔOAI và ΔOMI có $OA = OM$,

$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$, OI chung

nên $\Delta OAI = \Delta OMI$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{OMI}$, mà $\widehat{OMI} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{OAI} + \widehat{OMI} = 180^0$.



Hình 8

Vậy tứ giác OAIM là tứ giác nội tiếp.

Tương tự ta có tứ giác BOMK là tứ giác nội tiếp.

d) Năm điểm M, O, B, K, S cùng thuộc đường tròn khi và chỉ khi tứ giác MBKS nội tiếp

$$\Leftrightarrow \widehat{SMK} = \widehat{SBK} \Leftrightarrow \widehat{IMA} = \widehat{SBK} \Leftrightarrow \frac{sđ\overset{\frown}{AM}}{2} = \frac{sđ\overset{\frown}{BD}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{MD} \Leftrightarrow sđ\overset{\frown}{AC} = 30^0; sđ\overset{\frown}{BD} = 60^0.$$

Ví dụ 8. Cho đường tròn tâm O và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh BC, CA, AB. Gọi giao điểm của BM, IK là P; giao điểm của CM, IH là Q.

a) Chứng minh rằng các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp được;

b) Chứng minh rằng $MI^2 = MH.MK$;

c) Chứng minh tứ giác IPMQ nội tiếp rồi suy ra $PQ \perp MI$;

d) Nếu KI = KB, chứng minh IH = IC.

Giải (h.9)

a) * $\widehat{BIM} = \widehat{BKM} = 90^0$ suy ra tứ giác BIMK nội tiếp.

* $\widehat{CIM} = \widehat{CHM} = 90^0$ suy ra tứ giác CIMH nội tiếp.

b) Tứ giác BIMK nội tiếp nên $\widehat{IKM} = \widehat{IBM}; \widehat{KIM} = \widehat{KBM}$. (1)

Tứ giác CIMK nội tiếp nên $\widehat{ICM} = \widehat{IHM}; \widehat{MIH} = \widehat{MCH}$. (2)

Xét đường tròn tâm (O) có: $\widehat{KBM} = \widehat{BCM}; \widehat{MBI} = \widehat{MCH}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\widehat{KIM} = \widehat{IHM}; \widehat{MKI} = \widehat{MIH}$

do đó Δ MIK $\backsim$ Δ MHI (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MK}{MI} = \dfrac{MI}{MH} \Rightarrow MI^2 = MK.MH$.

c) * Ta có $\widehat{PMQ} + \widehat{PIQ} = \widehat{BMC} + \widehat{PIM} + \widehat{QIM}$

$= \widehat{BMC} + \widehat{MCI} + \widehat{MBC} = 180^0$

hay $\widehat{PMQ} + \widehat{PIQ} = 180^0$

suy ra tứ giác MPIQ nội tiếp.

* Từ đó ta có $\widehat{MPQ} = \widehat{MIQ} \Rightarrow \widehat{MPQ} = \widehat{MBC}$

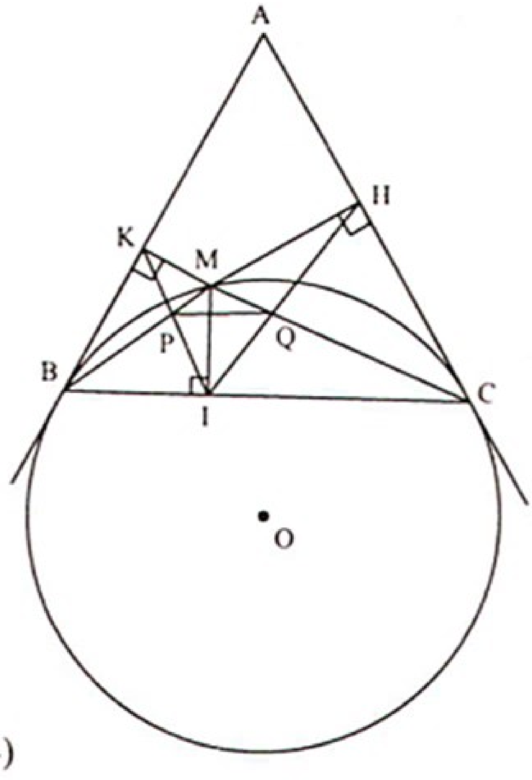
$\Rightarrow$ PQ // BC mà MI $\perp$ BC nên MI $\perp$ PQ.

d) * Từ IK = KB $\Rightarrow \widehat{KBI} = \widehat{KIB} \Rightarrow \widehat{ICH} = \widehat{KIB}$. (4)

* Mặt khác PQ // BC $\Rightarrow \widehat{KIB} = \widehat{IPQ}$. (5)

* Tứ giác MPIQ nội tiếp nên $\widehat{IPQ} = \widehat{IMQ}$. (6)

* Tứ giác IMHC nội tiếp nên $\widehat{IMQ} = \widehat{IHC}$. (7)



Hình 9

Từ (4), (5), (6), (7) suy ra $\widehat{ICH} = \widehat{IHC}$. Vậy ΔIHC cân tại I nên IC = IH.

Nhận xét. Từ câu b), với kĩ thuật của của *chuyên đề 16*, bạn có thể giải được câu sau: Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để tích MI.MK.MH đạt giá trị lớn nhất.

C. Bài tập

7. Cho đường tròn (O; R) có dây AB < 2R. Trên tia AB lấy điểm C sao cho AC > AB. Từ C kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn (O) tại P, K. Gọi I là trung điểm của AB.

a) Chứng minh rằng tứ giác CPOK nội tiếp.

b) Chứng minh rằng C, P, I, O, K cùng nằm trên một đường tròn.

c) Giả sử PA song song với CK. Chứng minh rằng tia đối của tia BK là tia phân giác của góc CBP.

8. Cho đường tròn (O; R) có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (khác điểm O). Đường thẳng CM cắt đường tròn

(O; R) tại điểm thứ hai N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N với đường tròn ở điểm P. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác OMNP nội tiếp được.

b) Năm điểm O, M, N, P, D cùng nằm trên một đường tròn.

c) Tích CM.CN không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

d) Khi M di động trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên một đoạn thẳng cố định.

9. Cho hình thang ABCD (AD // BC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại P. Chứng minh rằng năm điểm A, O, I, B, P cùng nằm trên một đường tròn.

10. Cho tam giác vuông ABC ($\widehat{A} = 90^0$), đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên các cạnh AB, AC. Tia Ex vuông góc với BE và tia Cy vuông góc với BC cắt nhau tại điểm F. Chứng minh rằng năm điểm B, D, E, C, F cùng nằm trên một đường tròn.

11. Cho ΔABC ($AC > AB$, $\widehat{BAC} > 90^0$). Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Các đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại điểm thứ hai D; tia BA cắt đường tròn (K) tại điểm thứ hai E; tia CA cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai F.

a) Chứng minh B, C, D thẳng hàng.

b) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp.

c) Chứng minh ba đường thẳng AD, BF, CE đồng quy.

d) Gọi H là giao điểm thứ hai của tia DF với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Hãy so sánh DH và DE.

12. Cho tam giác ABC vuông tại A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn (O) đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm thứ hai là F, G. Chứng minh rằng :

a) Các tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp.

b) AD.AB = AG.AE.

c) AC // FG.

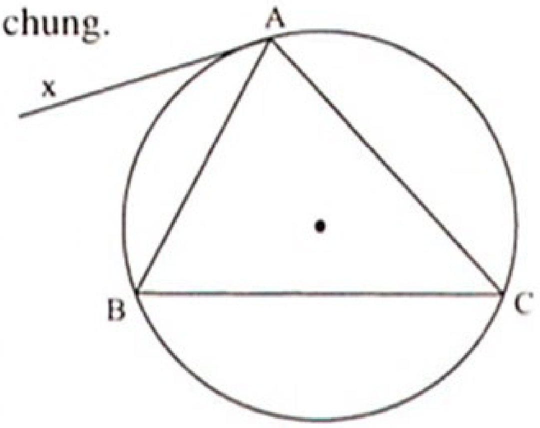
d) AC, DE và BF đồng quy.

Chuyên đề 12
CHỨNG MINH QUAN HỆ TIẾP XÚC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN HOẶC HAI ĐƯỜNG TRÒN

A. Kiến thức cần nhớ

1. *Các cách chứng minh đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn*

- Đường thẳng và đường tròn chỉ có một điểm chung.
- Khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn.
- Đường thẳng vuông góc với bán kính tại điểm đầu của bán kính.
- Cho ΔABC, nếu có tia Ax nằm khác phía với C bờ AB mà $\widehat{BAx} = \widehat{BCA}$ thì tia Ax là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (h.10).



Hình 10

2. *Các cách chứng minh hai đường tròn tiếp xúc nhau*

- Nếu đoạn thẳng nối tâm hai đường tròn bằng tổng của hai bán kính thì hai đường tròn tiếp xúc ngoài.
- Nếu đoạn thẳng nối tâm hai đường tròn bằng hiệu của hai bán kính thì hai đường tròn tiếp xúc trong.
- Nếu hai đường tròn cùng tiếp xúc với một đường thẳng tại một điểm thì hai đường tròn tiếp xúc nhau.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Vẽ hai đường tròn (O) và (O') có đường kính lần lượt là BH và CH. Các đường tròn trên cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng:

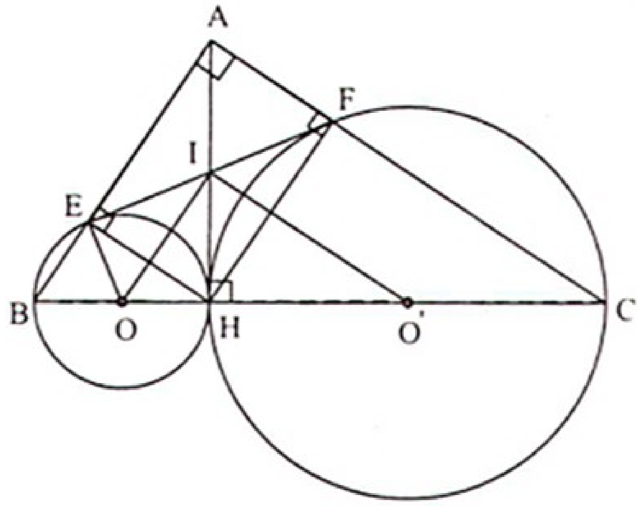
a) Tứ giác AEHF là hình chữ nhật.

b) AE.AB = AC.AF.

c) EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

Giải (h.11)

a) Ta có $\widehat{BEH} = 90^0$; $\widehat{HFC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra $\widehat{HEA} = 90^0$; $\widehat{HFA} = 90^0$ mà $\widehat{EAF} = 90^0$ nên tứ giác AEHF là hình chữ nhật.



Hình 11

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$AH^2 = AB.AE$; $AH^2 = AC.AF$, từ đó suy ra AB.AE = AC.AF.

c) Gọi I là giao điểm của AH và EF, thì ta có IE = IH.

Xét ΔIEO và ΔIHO, ta có IE = IH; IO chung; OH = OE suy ra $\Delta IEO = \Delta IHO$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{IEO} = \widehat{IHO} \Rightarrow \widehat{IEO} = 90^0$ mà OE là bán kính đường tròn (O) nên IE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Tương tự như vậy ta có IF là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Từ đó suy ra EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

> ***Nhận xét.*** Khi chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn, bạn có thể dựa vào một tiếp tuyến đã có. Chẳng hạn trong bài có thể suy ra AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn, vậy muốn chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn, bạn nên chứng minh $\widehat{IEO} = 90^0$ bằng cách ghép vào hai tam giác bằng nhau.

Ví dụ 10. Cho đường tròn (O; R) có dây AB < 2R. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và C là một điểm thuộc đoạn thẳng AB (C khác A và B). Tia MC cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng:

a) $MA^2 = MC.MD$.

b) MB.BD = BC.MD.

c) MA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

d) Tổng bán kính của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và BCD không đổi khi C di động.

Giải (h.12)

a) Ta có $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB} \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MDA}$.

ΔMAC và ΔMDA có $\widehat{AMD}$ chung, $\widehat{MAB} = \widehat{MDA}$

$\Rightarrow \Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.MD$.

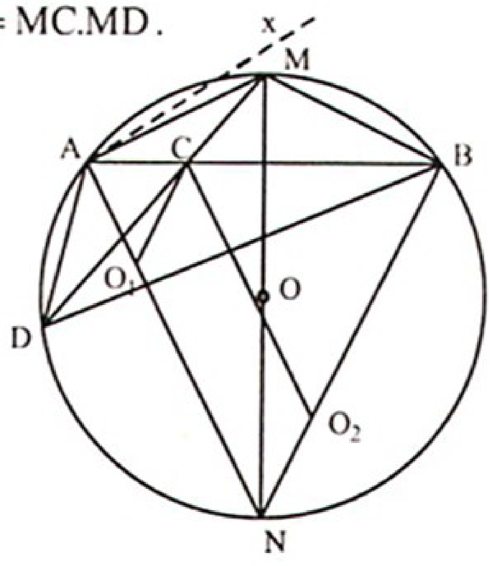
b) Tương tự, ta cũng có $\Delta MBC \backsim \Delta MDB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MD} = \dfrac{BC}{DB} \Rightarrow MB.BD = MD.BC$.

c) Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm M, vẽ tia Ax là tia tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ACD \Rightarrow \widehat{CAx} = \widehat{CDA}$.

Mà $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{MDA}$

$\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{CDA} \Rightarrow \widehat{CAx} = \widehat{CAM}$ mà AM, Ax nằm cùng nửa mặt phẳng bờ AC nên hai tia AM, Ax trùng nhau.



Hình 12

Vậy AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔACD.

d) Chứng minh tương tự, ta có BM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔACD, ΔBCD. Suy ra $O_1A \perp AM$, $O_2B \perp BM$ (tính chất tiếp tuyến).

Kẻ MN là đường kính của đường tròn (O) thì $AN \perp AM$; $BN \perp BM$

$\Rightarrow$ A, O_1, N thẳng hàng, B, O_2, N thẳng hàng.

Ta có ΔAO_1C cân tại $O_1 \Rightarrow \widehat{O_1AC} = \widehat{O_1CA}$,

ΔNAB cân tại $N \Rightarrow \widehat{NAB} = \widehat{NBA}$

suy ra $\widehat{O_1CA} = \widehat{NBA} \Rightarrow O_1C \parallel BN$.

Tương tự như vậy, ta có $O_2C \parallel AN$ từ đó suy ra CO_1NO_2 là hình bình hành do đó $CO_2 = O_1N$.

Tổng hai bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔACD và ΔBCD là:

$$O_1A + O_2C = O_1A + O_1N = AN \text{ không đổi.}$$

Nhận xét. Qua bài này, bạn có thể nhận biết được một tia là tiếp tuyến của đường tròn thông qua bài sau : Cho tam giác ACD. Trên tia đối của tia CD lấy điểm M. Tia AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD nếu thoả mãn một trong hai điều kiện sau :

a) Góc ADC bằng góc MAC;

b) $MA^2 = MC.MD$.

Ví dụ 11. Hai đường tròn (O; R) và (O'; r) tiếp xúc ngoài tại C (R > r) gọi AC và BC là hai đường kính đi qua C của đường tròn (O) và (O'). DE là dây cung của đường tròn (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Tia DC cắt đường tròn (O') tại điểm thứ hai là F.

a) Tứ giác ADBE là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh ba điểm B, F, E thẳng hàng.

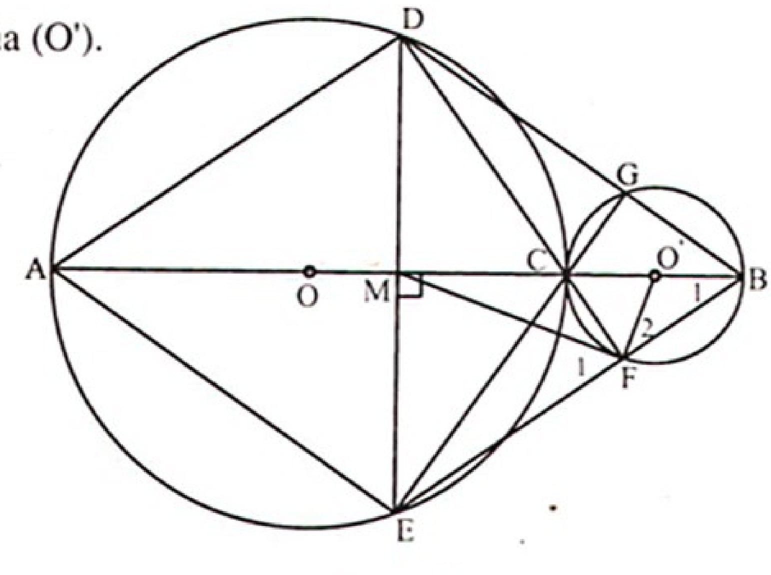
c) DB cắt đường tròn (O') tại điểm thứ hai là G. Chứng minh DF, EG và AB đồng quy.

d) Chứng minh MF là tiếp tuyến của (O').

Giải (h.13)

a) Tứ giác ADBE là hình thoi vì AM = MB; MD = ME và DE $\perp$ AB.

b) Ta có BE // DA. Nối BF ta có $\widehat{ADF} = \widehat{BFD} = 90^0 \Rightarrow$ BF // DA. Như vậy BE // DA và BF // DA mà qua B chỉ có duy nhất một đường thẳng song song với DA do đó ba điểm B, F, E phải thẳng hàng.



Hình 13

c) Ta có CG vuông góc với DB, mặt khác EC vuông góc với DB. Nhưng qua C chỉ tồn tại duy nhất một đường vuông góc với DB cho nên E, C, G phải thẳng hàng và DF, EG, AB phải đồng quy tại điểm C, chính là trực tâm của tam giác EDB.

d) Nhận thấy $\widehat{MEF} = \widehat{F_1}$ và $\widehat{O'BF} = \widehat{F_2}$ mà $\widehat{MEF} + \widehat{O'BF} = 90^0$ nên $\widehat{F_1} + \widehat{F_2} = 90^0$, suy ra $\widehat{MFO'} = 90^0$. Vậy MF là tia tiếp tuyến của đường tròn tâm O'.

Ví dụ 12. Cho nửa đường tròn đường kính AB trên đó có một điểm M. Trên đường kính AB lấy một điểm C sao cho AC < CB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm M, người ta kẻ các tia Ax, By vuông góc với AB; đường thẳng qua M vuông góc với MC cắt Ax tại P; đường thẳng qua C vuông góc với CP cắt By tại Q. Gọi D là giao điểm của CP và AM; E là giao điểm của CQ và BM.

a) Chứng minh rằng các tứ giác ACMP, CDME nội tiếp được.

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng AB, DE song song.

c) Chứng minh rằng ba điểm P, M, Q thẳng hàng.

d) Ngoài điểm M ra, các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMP, EMQ còn điểm chung nào nữa không? Tại sao?

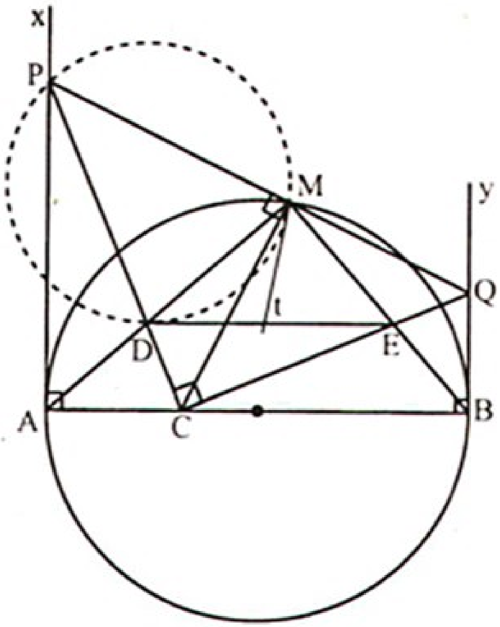
Giải (h.14)

a) Tứ giác ACMP có $\widehat{A} = \widehat{M} = 90^0$ nên nội tiếp được.

Tứ giác CDME có $\widehat{C} = \widehat{M} = 90^0$ nên nội tiếp được.

b) Do các tứ giác ACMP và CDME nội tiếp được nên $\widehat{MAC} = \widehat{MPC}$, $\widehat{MDE} = \widehat{MCE}$ mà $\widehat{MPC} = \widehat{MCE}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{MCP}$) nên $\widehat{MAC} = \widehat{MDE}$. Vậy AB song song với DE.

c) Do $\widehat{MBQ} = \widehat{MAC}$ (vì cùng phụ $\widehat{ABM}$) và $\widehat{MAC} = \widehat{MDE} = \widehat{MCQ}$ nên $\widehat{MCQ} = \widehat{MBQ}$. Suy ra tứ giác CMQB nội tiếp do đó $\widehat{CMQ} = 90^0$. Vậy P, M, Q thẳng hàng.



Hình 14

d) Trên nửa mặt phẳng bờ MC không chứa điểm D kẻ tia tiếp tuyến Mt của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMP suy ra $\widehat{AMt} = \widehat{MPD}$ mà $\widehat{MQC}$ phụ với $\widehat{MPC}$ nên $\widehat{BMt} = \widehat{MQC}$. Suy ra Mt tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác EMQ. Do đó hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMP và EMQ tiếp xúc nhau. Vậy có duy nhất một điểm M là điểm chung của hai đường tròn nói trên.

Nhận xét. Bạn có thể chứng minh được DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMP, EMQ.

C. Bài tập

13. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R). Từ A kẻ đường thẳng d không đi qua tâm O, cắt đường tròn (O; R) tại B và C (B nằm giữa A và C). Các tiếp tuyến với (O; R) tại B và C cắt nhau tại D. Từ D kẻ DH vuông góc với AO (H nằm trên AO) cắt cung nhỏ BC tại M. Gọi E là giao điểm của DO và BC.

a) Chứng minh DHOC là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh OH.OA = OE.OD.

c) Chứng minh AM là tiếp tuyến của (O; R).

14. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài tại A. Một đường thẳng d tiếp xúc với (O_1), (O_2) lần lượt tại B và C.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

c) Chứng minh góc O_1MO_2 bằng 90^0.

d) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MO_1O_2 tiếp xúc với đường thẳng d.

15. Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R và một điểm C trên đường tròn (C không trùng với A và B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C, kẻ tia Ax tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC; P là giao điểm của AC, BM. Tia BC cắt các tia AM, Ax lần lượt tại N và Q.

a) Chứng minh ΔABN cân;

b) Tứ giác APNQ là hình gì? Tại sao?

c) Gọi K là điểm chính giữa của cung AB không chứa C. Hỏi có thể xảy ra ba điểm Q, M, K thẳng hàng được không? Tại sao?

d) Xác định vị trí của điểm C để đường tròn ngoại tiếp ΔMNQ tiếp xúc với đường tròn (O).

16. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại A và B (O, O' thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Một đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) và (O') tương ứng tại C và D (A nằm giữa C và D). Các tiếp tuyến tại C và D của hai đường tròn cắt nhau tại K. Nối KB cắt CD tại I. Kẻ Ix song song với KD cắt BD tại E.

a) Chứng minh rằng ΔBOO' đồng dạng với ΔBCD.

b) Chứng minh tứ giác BCKD nội tiếp.

c) Chứng minh AE là tiếp tuyến của đường tròn (O ; R).

17. Cho tam giác vuông ABC nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AB. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho CD = AC.

a) Chứng minh tam giác ABD cân.

b) Đường thẳng vuông góc với AC tại A cắt đường tròn (O) tại E. Trên tia đối của tia EA lấy điểm F sao cho EF = AE. Chứng minh rằng ba điểm D, B, F thẳng hàng.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp Δ ADF tiếp xúc với đường tròn (O).

18. Cho đường tròn (O) đường kính AB, d_1, d_2, là các đường thẳng lần lượt qua A, B và cùng vuông góc với đường thẳng AB. Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc d_1, d_2, sao cho $\widehat{MON} = 90^0$.

a) Chứng minh rằng $AM.BN = \dfrac{AB^2}{4}$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

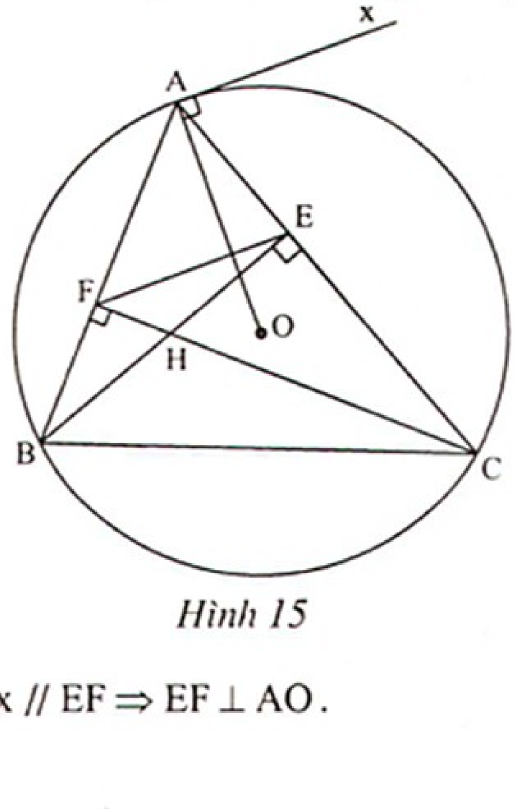
Chuyên đề 13
CHỨNG MINH ĐIỂM CỐ ĐỊNH

A. Kiến thức cần nhớ

- Trước hết xác định ba loại yếu tố: *cố định, không đổi* và *thay đổi*. Phán đoán điểm cố định.
- Để dự đoán điểm cố định, ta vẽ hai vị trí của đường thẳng (thường chọn vị trí đặc biệt) và tìm giao điểm S của chúng.
- Dựa vào giả thiết để tìm mối quan hệ giữa điểm cố định (dự đoán) và các yếu tố khác của đề bài.
- Trình bày lời giải, chứng tỏ S là điểm cố định (là giao điểm của hai đường thẳng cố định hoặc nằm trên một tia cố định và cách gốc một khoảng không đổi,...).

B. Một số ví dụ

Ví dụ 13. Cho đường tròn (O; R) có dây BC < 2R cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC. Kẻ BE và CF là đường cao của ΔABC cắt nhau tại H. Chứng minh rằng khi A di động thì đường thẳng qua A và vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định.



Hình 15

Giải (h.15). Ta có tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn đường kính BC $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AEF}$.

Kẻ Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O; R)

thì $Ax \perp AO$ và $\widehat{ABC} = \widehat{CAx} \Rightarrow \widehat{CAx} = \widehat{AEF} \Rightarrow Ax \parallel EF \Rightarrow EF \perp AO$.

Vậy đường thẳng qua A vuông góc với EF luôn đi qua điểm O cố định.

Nhận xét. Thực chất bài này bắt nguồn từ bài toán chứng minh $EF \perp AO$. Nếu gọi M là trung điểm của BC thì ta có kết quả quen thuộc là AH // OM và AH = 2.OM. Từ đó ta có câu hỏi hay và khó sau đây:

- Chứng minh rằng khi A di động thì đường thẳng qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF và vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định.
- Chứng minh rằng khi A di động thì đường thẳng qua H và vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định.

Ví dụ 14. Cho đường tròn (O; R) và một đường thẳng d nằm ngoài đường tròn. I là một điểm di động trên d. Đường tròn đường kính IO cắt đường tròn (O ; R) tại hai điểm M, N. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

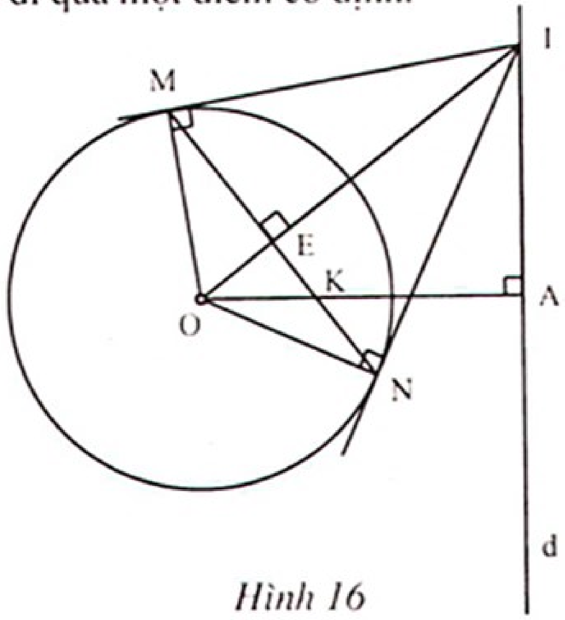
Giải (h.16)

Đường tròn đường kính IO, cắt đường tròn (O; R) tại M, N $\Rightarrow \widehat{IMO} = \widehat{INO} = 90^0 \Rightarrow$ IM, IN là tiếp tuyến của đường tròn (O ; R). Gọi E là giao của IO và MN thì IE là đường phân giác của $\widehat{MIN}$ suy ra IE cũng là đường cao của tam giác cân MIN

$\Rightarrow IE \perp MN$.

ΔOMI có $\widehat{OMI} = 90^0$; $ME \perp OI$ nên

$OM^2 = OE.OI$. (1)



Hình 16

Kẻ $OA \perp d$ tại A, gọi K là giao điểm của OA và MN thì $\Delta OEK \backsim \Delta OAI$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OE}{OA} = \frac{OK}{OI} \Rightarrow OA.OK = OE.OI. \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $OK.OA = OM^2 = R^2$.

Từ đó suy ra $OK = \dfrac{R^2}{OA}$ mà OA không đổi nên OK không đổi, do đó K là điểm cố định phải tìm.

Ví dụ 15. Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Một đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn qua B và C. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn. Đường thẳng MN cắt AO và AC lần lượt tại H và K.

a) Chứng minh M, N di động trên một đường đường tròn cố định.

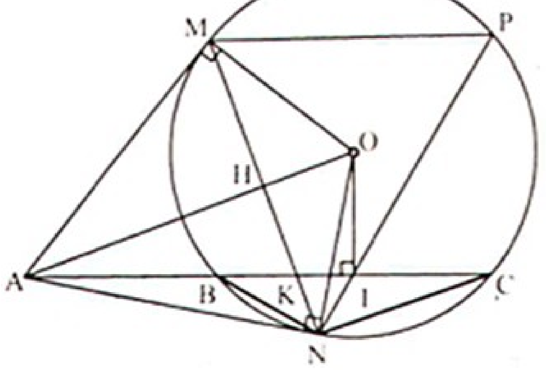
b) Gọi I là trung điểm của BC. NI cắt đường tròn (O) tại P. Chứng minh MP // BC.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK luôn đi qua hai điểm cố định.

Giải (h.17)

a) Vì AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{ANB} = \widehat{BCN}$ mà $\widehat{CAN}$ chung nên $\Delta ANB \backsim \Delta ACN$ (g.g) suy ra $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AB}{AN}$

$\Rightarrow AN^2 = AB.AC$ mà AM = AN (tính chất tiếp tuyến). Suy ra M, N nằm trên đường tròn tâm A bán kính $\sqrt{AB.AC}$ cố định.



Hình 17

b) $\widehat{ANO} = 90^0$; $\widehat{AIO} = 90^0$ nên tứ giác AOIN nội tiếp đường tròn đường kính AO, suy ra $\widehat{AON} = \widehat{AIN}$.

Mặt khác $\widehat{AON} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON}$; $\widehat{MPN} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON}$ nên $\widehat{AIN} = \widehat{MPN}$ suy ra MP // BC.

c) Theo câu a), ta có $AN^2 = AB.AC$. (1)

Mặt khác ΔANO vuông tại N có $NH \perp AO$ nên $AN^2 = AH.AO$. (2)

$\Delta AHK \backsim \Delta AIO$ (vì $\widehat{OAI}$ chung, $\widehat{AHK} = \widehat{AIO} = 90^0$)

$\Rightarrow \dfrac{AH}{AI} = \dfrac{AK}{AO} \Rightarrow AH.AO = AI.AK$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AB.AC = AI.AK \Rightarrow AK = \dfrac{AB.AC}{AI}$ mà AB, AC, AI cố định

$\Rightarrow$ AK không đổi $\Rightarrow$ K cố định.

Tứ giác OIKH nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp ΔOHK luôn đi qua K và I cố định.

Nhận xét. Nhiều bài toán chứng minh điểm cố định được xuất phát từ những đẳng thức tích. Vì vậy khi làm dạng toán này, ngoài việc phán đoán điểm cố định bạn cần liên hệ tới những kết quả mà bạn có thể làm được.

Chẳng hạn ở *ví dụ 14*, bạn phán đoán điểm K cố định thì bạn cần liên hệ tới kết quả đơn giản là: OK.OA = OE.OI và $OE.OI = R^2$. Ở *ví dụ 15* bạn dễ dàng có điểm I cố định, bạn phán đoán điểm tiếp theo là K cố định thì bạn cần liên hệ tới kết quả đơn giản là: AK.AI = AH.AO; $AN^2 = AH.AO$ và $AN^2 = AB.AC$. Từ đó ta có cách chứng minh trên.

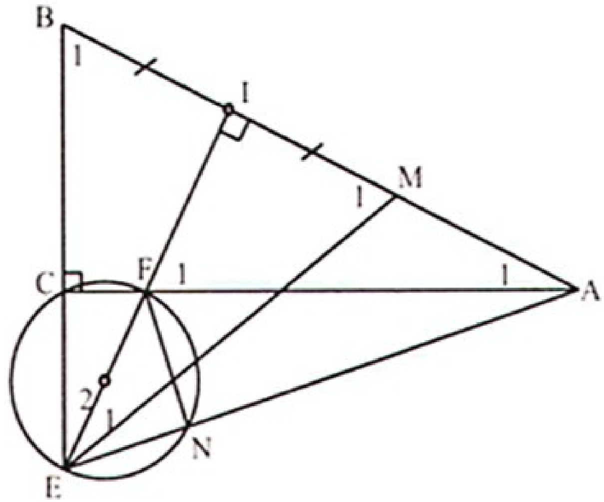
Ví dụ 16. Cho tam giác ABC vuông tại C và BC < CA. Gọi I là điểm trên AB và IB < IA. Kẻ đường thẳng d đi qua I và vuông góc với AB. Gọi giao điểm của d với AC, BC lần lượt là F và E. Gọi M là điểm đối xứng với B qua I.

a) Chứng minh rằng ΔIME đồng dạng với ΔIFA và IE.IF = IA.IB.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF cắt AE tại N. Chứng minh rằng F, N, B thẳng hàng.

c) Cho AB cố định, C thay đổi sao cho $\widehat{BCA} = 90^0$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp ΔAEF luôn đi qua hai điểm cố định và tâm đường tròn này nằm trên đường thẳng cố định.

Giải (h.18)



Hình 18

a) Ta có IE là đường trung trực của BM

$\Rightarrow \Delta EBM$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{M_1}$.

Mà $\widehat{B_1} = \widehat{F_1}$ (cùng phụ với $\widehat{A_1}$)

$\Rightarrow \Delta\, IME \backsim \Delta IFA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{IM}{IF} = \dfrac{IE}{IA} \Rightarrow IE.IF = IA.IM$

$\Rightarrow IE.IF = IA.IB.$

b) Ta có $\widehat{ECF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ENF} = 90^0$.

Xét ΔBAE có EI, AC là các đường cao cắt nhau tại F nên BF $\perp$ EA mà FN $\perp$ EA $\Rightarrow$ B, F, N thẳng hàng.

Ta có $\widehat{E_1} = \widehat{A_1}$ suy ra tứ giác AMFE nội tiếp.

Từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp ΔAEF luôn qua hai điểm A, M cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF luôn nằm trên đường trung trực của AM cố định.

C. Bài tập

19. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định với OA = 2R. Một đường kính BC quay quanh O sao cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I. Đường thẳng AB, AC lại cắt đường tròn (O; R) lần lượt tại D và E. Nối DE cắt đường thẳng OA tại K.

a) Chứng minh rằng OI.OA = OB.OC và AK.AI = AE.AC.

b) Tính độ dài đoạn thẳng OI và AK theo R.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A khi BC quay quanh O.

20. Cho đường tròn (O; R), một dây cung CD có trung điểm H. Trên tia đối của tia DC lấy một điểm S và qua S kẻ các tiếp tuyến SA, SB với đường tròn. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng SO, OH lần lượt tại E, F. Gọi I là giao điểm của AB và CD.

a) Chứng minh tứ giác SEHF nội tiếp được.

b) Chứng minh $OH.OF = R^2$.

c) Chứng minh SI.SH = SC.SD.

d) Khi S di động trên tia đối của tia DC chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

21. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AO. Đường thẳng Cx vuông góc với đường thẳng AB, Cx cắt nửa đường tròn trên tại I. Gọi K là điểm bất kì nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C và I), tia AK cắt nửa đường tròn đã cho tại M. Tiếp tuyến với nửa đường tròn tâm O tại điểm M cắt Cx tại N. Gọi D là giao điểm của BM và Cx.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh tam giác MNK cân.

c) Tính diện tích Δ ABD khi K là trung điểm của đoạn thẳng CI.

d) Chứng minh rằng khi K di động trên đoạn thẳng CI thì đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD đi qua một điểm cố định khác A.

22. Cho đường tròn (O) và điểm A khác O nằm trong đường tròn. Một đường thẳng thay đổi đi qua A nhưng không đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm M, N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN luôn đi qua một điểm cố định khác O.

23. Cho điểm M bất kì trên nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R, qua điểm H cố định trên đoạn OB, vẽ đường thẳng d vuông góc với AB. Gọi giao điểm của MA, MB và tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) với d lần lượt là D, C và I. Gọi E là giao điểm của AC và đường tròn (O). Gọi K là giao điểm OI và ME.

a) Chứng minh rằng IE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Cho M di chuyển trên đường tròn (M không trùng với A; B). Chứng minh rằng tích OI.OK không đổi và ME luôn đi qua một điểm cố định.

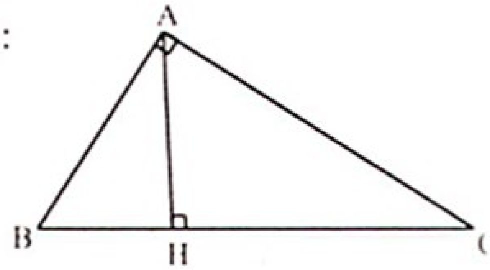
Chuyên đề 14
CÁC BÀI TẬP CÓ NỘI DUNG TÍNH TOÁN

A. Kiến thức cần nhớ

Để giải các bài tập tính toán, các bạn cần nắm vững các kiến thức sau:

1. *Các hệ thức lượng trong tam giác vuông.*

ΔABC vuông tại A, có AH là đường cao (h.19a) thì:

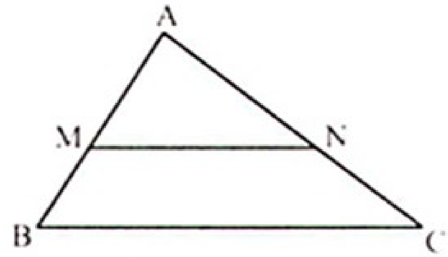


Hình 19 a

- $AB^2 = BC.BH$; $AC^2 = CH.BC$
- $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- $AB.AC = BC.AH$
- $AH^2 = BH.CH$
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

2. *Định lí Ta-lét:*

Cho ΔABC có $MN \parallel BC$ ($M \in AB, N \in AC$) (h.19b).



Hình 19 b

Ta có:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} ;$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} ; \frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC}.$$

3. *Tính chất đường phân giác trong tam giác:*

ΔABC có AD là phân giác $\Rightarrow \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$.

4. *Tam giác đồng dạng:*

$$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} ;\ \widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'}.$$

5. *Các tỉ số lượng giác.*

6. *Công thức tính chu vi, diện tích các hình:* tam giác, hình chữ nhật, hình vuông, hình thang, hình bình hành, hình thoi, hình tròn.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 17. Cho đường tròn (O; R) và một điểm S ở ngoài đường tròn. Từ S vẽ hai tiếp tuyến SA, SB với đường tròn (A, B là tiếp điểm). Vẽ đường thẳng a đi qua S cắt đường tròn (O; R) tại hai điểm M, N với M nằm giữa hai điểm S và N (đường thẳng a không đi qua tâm O). Gọi H là giao của SO và AB. Gọi I là trung điểm của MN. Hai đường thẳng OI và AB cắt nhau tại E.

a) Chứng minh tứ giác IHSE nội tiếp.

b) Chứng minh $OI.OE = R^2$.

c) Cho biết $SO = 2R$ và $MN = R\sqrt{3}$. Tính diện tam giác ESM theo R.

Giải (h.20)

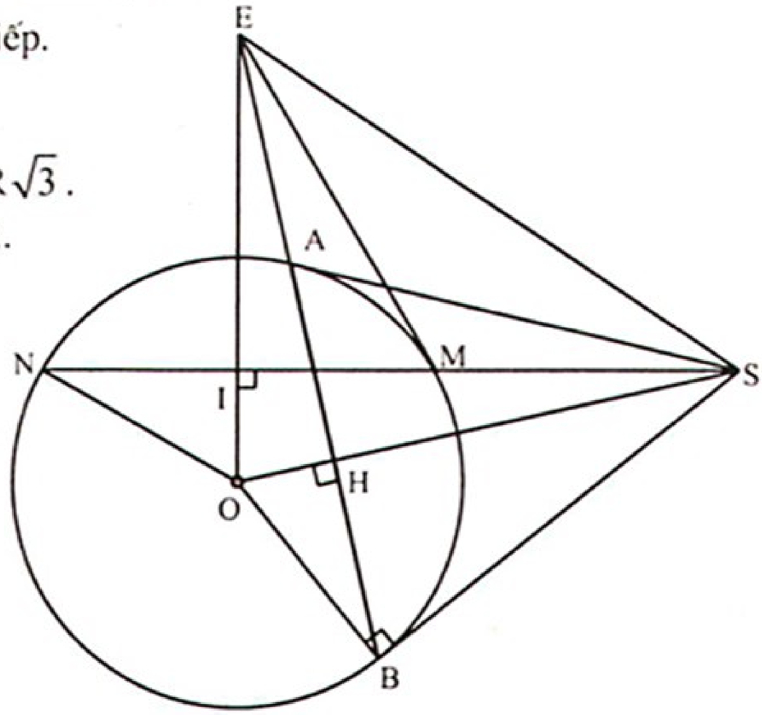
a) Ta có $\widehat{SHE} = \widehat{SIE} = 90^0$ suy ra tứ giác IHSE nội tiếp đường tròn đường kính SE.

b) ΔOHE và ΔOIS có

$\widehat{OHE} = \widehat{OIS} = 90^0$; $\widehat{SOE}$ chung

$\Rightarrow \Delta OHE \backsim \Delta OIS$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OH}{OI} = \dfrac{OE}{OS} \Rightarrow OI.OE = OH.OS$. (1)



Hình 20

Mặt khác, ΔOBS vuông tại B, $BH \perp OS$ nên $OH.OS = OB^2 = R^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OI.OE = R^2$.

c) $MN = R\sqrt{3} \Rightarrow IM = IN = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng định lí Py-ta-go trong các tam giác vuông ta có:

$$OI^2 + IN^2 = ON^2 \Rightarrow OI^2 + \frac{3R^2}{4} = R^2 \Rightarrow OI^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow OI = \frac{R}{2}.$$

$$OI^2 + IS^2 = OS^2 \Rightarrow \frac{R^2}{4} + IS^2 = 4R^2 \Rightarrow IS^2 = \frac{15R^2}{4} \Rightarrow IS = \frac{R\sqrt{15}}{2}.$$

Suy ra: $SM = SI - IM = \dfrac{R(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{2}$. (3)

Áp dụng câu b), $OI.OE = R^2 \Rightarrow \dfrac{R}{2}.OE = R^2 \Rightarrow OE = 2R$. (4)

Từ (3) và (4) ta có diện tích ΔESM là

$$S_{ESM} = \frac{1}{2}.\frac{3R}{2}.\frac{R(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{2} = \frac{3R^2(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{8}.$$

Nhận xét. Để tính độ dài đoạn thẳng, bạn nên sử dụng định lí Py-ta-go và tam giác đồng dạng để tính tất cả độ dài các đoạn thẳng có thể.

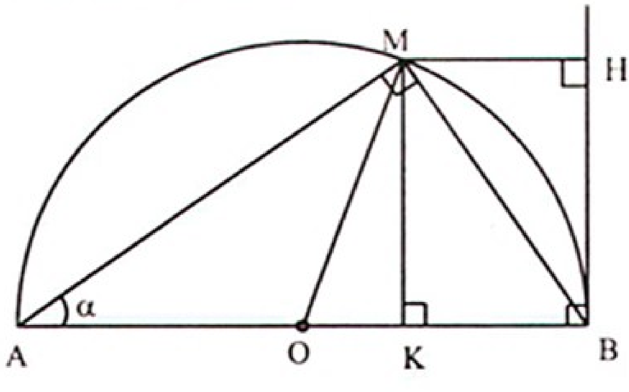
Ví dụ 18. Cho một nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi M là một điểm bất kì trên nửa đường tròn đó sao cho $\widehat{MAB} = \alpha$ $(\alpha < 45^0)$. Từ M vẽ MH vuông góc với tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn.

a) Tính các đoạn MA, MB, MH theo R và α.

b) Tính MH theo R và 2α.

c) Chứng minh hệ thức $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ và $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

Giải (h.21)



Hình 21

a) Ta có $\widehat{AMB} = 90^0$ nên

$MA = AB.\cos\alpha = 2R.\cos\alpha$,

$MB = AB.\sin\alpha = 2R.\sin\alpha$.

Ta có $\widehat{MHB} = 90^0$ và $\widehat{MBH} = \widehat{MAB} = \alpha$

nên $MH = MB.\sin\alpha = 2R.\sin^2\alpha$.

b) Kẻ $MK \perp AB$ thì ta có

$OK = OM.\cos 2\alpha = R.\cos 2\alpha$.

Mà $BK = OB - OK = R - R.\cos 2\alpha = R(1 - \cos 2\alpha)$.

Mặt khác BHMK là hình chữ nhật nên $MH = BK = R(1 - \cos 2\alpha)$.

c) Từ câu a) và câu b) ta có:

$R.(1 - \cos 2\alpha) = 2R.\sin^2\alpha\ (= MH) \Rightarrow 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ hay $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Từ công thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

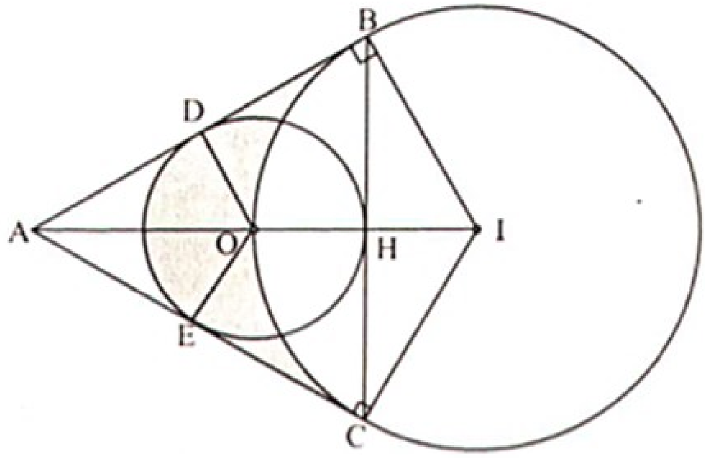
nên $\cos 2\alpha = 1 - 2.(1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$.

Ví dụ 19. Cho đường tròn (O; R) và một đường tròn tâm I bán kính 2R đi qua tâm O. Các tiếp tuyến chung ADB và AEC của hai đường tròn đó cắt nhau tại A, tiếp xúc với đường tròn lớn tại B, C và với đường tròn nhỏ tại D, E.

a) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC và xác định dạng của nó.

b) Tính diện tích hình BOCEDB (hình bao gồm cung BOC của đường tròn lớn, đoạn thẳng CE, cung ED của đường tròn nhỏ và đoạn thẳng DB).

Giải (h.22)



Hình 22

a) AB và AC là tiếp tuyến của đường tròn (I) $\Rightarrow AB = AC$

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

ΔABI có OD // BI (vì cùng vuông góc với AB)

$$\Rightarrow \frac{AO}{AI} = \frac{OD}{BI} = \frac{R}{2R} \Rightarrow \frac{AO}{AI} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{1}{2}AI \Rightarrow AO = OI = 2R \Rightarrow AI = 4R.$$

Xét ΔABI có $AB^2 = AI^2 - IB^2 = 16R^2 - 4R^2 = 12R^2$

$\Rightarrow AB = 2R\sqrt{3} \Rightarrow AC = 2R\sqrt{3}$.

Gọi H là giao điểm của AI và BC suy ra AH là đường phân giác của ΔABC cân tại A, do đó AH là đường cao, đường trung tuyến.

Xét ΔABI có $\widehat{ABI} = 90^0$, $BH \perp AI$ nên $AI.IH = IB^2 \Rightarrow 4R.IH = 4R^2 \Rightarrow IH = R$.

Xét ΔBHI vuông tại H nên $BH^2 = BI^2 - IH^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

$\Rightarrow BH = R\sqrt{3} \Rightarrow BC = 2R\sqrt{3} \Rightarrow AB = AC = BC = 2R\sqrt{3} \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

b) ΔABI có DO là đường trung bình nên $AD = DB = \frac{1}{2}AB = R\sqrt{3}$.

Suy ra diện tích tứ giác ADOE là $S_1 = 2S_{ADO} = 2.\frac{1}{2}.AD.OD = R^2\sqrt{3}$.

Tứ giác ADOE có $\widehat{A} = 60^0$; $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^0$ nên $\widehat{DOE} = 120^0$.

Do đó diện tích hình quạt DOE là $S_2 = \frac{\pi R^2 n}{360^0} = \frac{\pi R^2.120^0}{360^0} = \frac{\pi R^2}{3}$.

Từ đó suy ra diện tích hình giới hạn bởi AD, AE và cung nhỏ DE là :

$$S_3 = S_1 - S_2 = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{R^2(3\sqrt{3} - \pi)}{3}.$$

Tương tự, ta có diện tích tứ giác ABIC là $S_4 = 2.S_{ABI} = 2.\frac{1}{2}AB.BI = 4R^2\sqrt{3}$.

Diện tích hình quạt BIC là $S_5 = \frac{4\pi R^2}{3}$.

Diện tích hình BOCED là:

$$S = S_4 - S_5 - S_3 = 4R^2\sqrt{3} - \frac{4\pi R^2}{3} - \frac{R^2(3\sqrt{3}-\pi)}{3} = R^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right).$$

C. Bài tập

24. Cho đường tròn (O; R) đường kính AC. Vẽ dây BD vuông góc với AC tại K (K nằm giữa A và O). Lấy E trên cung nhỏ CD (E không trùng với C, D). Gọi H là giao điểm của AE và BD.

a) Chứng minh tứ giác CEHK nội tiếp.

b) Chứng minh $AD^2 = AH.AE$.

c) Cho BD = 12cm, BC = 10cm. Tính diện tích hình tròn (O; R).

d) Đặt $\widehat{BCD} = \alpha$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, vẽ tam giác MBC cân tại M. Tính số đo góc MBC theo α để điểm M thuộc đường tròn (O; R).

25. Cho đoạn thẳng AB = 2a có trung điểm O. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn (O) đường kính AB và nửa đường tròn (O') đường kính AO. Trên đường tròn (O') lấy điểm M (khác A và O), tia OM cắt đường tròn (O) tại C. Gọi D là giao điểm thứ hai của CA với nửa đường tròn (O').

a) Chứng minh tam giác ADM cân.

b) Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn (O) cắt OD tại E. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng EA đối với các nửa đường tròn (O) và (O').

c) Đường thẳng AM và OD cắt nhau tại H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác COH cắt nửa đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N. Chứng minh ba điểm A, M, N thẳng hàng.

d) Tại vị trí của M sao cho ME song song với AB. Hãy tính độ dài đoạn thẳng OM theo a.

26. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Từ một điểm M trên cung nhỏ BC kẻ một tiếp tuyến thứ ba cắt AB, AC lần lượt tại P, Q.

a) Chứng minh rằng khi điểm M chuyển động trên cung nhỏ BC thì chu vi tam giác APQ có giá trị không đổi.

b) Cho biết $\widehat{BAC} = 60^0$ và bán kính của đường tròn (O) bằng 6cm. Tính độ dài của tiếp tuyến AB và diện tích phần mặt phẳng được giới hạn bởi hai tiếp tuyến AB, AC và cung nhỏ BC.

27. Cho ba điểm A, B, C theo thứ tự đó trên một đường thẳng với AB = 2BC. Vẽ hai nửa đường tròn tâm O và O' có đường kính lần lượt là AB và BC thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là AC, tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc với nửa đường tròn (O) và nửa đường tròn (O') lần lượt tại F và G, tiếp tuyến này cắt các tiếp tuyến với hai nửa đường tròn vẽ từ A và C theo thứ tự tại D và E. Tiếp tuyến chung trong ở B cắt DE tại I.

a) Chứng minh các tam giác OIO', DOI, IO'E là các tam giác vuông.

b) Tính BI, GE và AD theo O'C = R.

c) Tính diện tích hình thang ACED và diện tích phần ở trong hình thang này nhưng ngoài hai nửa hình tròn theo O'C = R.

Chuyên đề 15
QUỸ TÍCH VÀ DỰNG HÌNH

A. Kiến thức cần nhớ

1. *Các quỹ tích cơ bản*

Để tìm quỹ tích (tập hợp điểm) trong mặt phẳng, người ta thường dựa vào các quỹ tích cơ bản. Ta có một số quỹ tích cơ bản sau đây:

Quỹ tích 1: Quỹ tích những điểm cách đều hai điểm A và B cố định là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Quỹ tích 2: Quỹ tích những điểm cách đều hai cạnh của một góc là đường phân giác của góc đó.

Quỹ tích 3: Quỹ tích những điểm cách đều đường thẳng xy cố định một khoảng bằng a cho trước là hai đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng bằng a.

Quỹ tích 4: Quỹ tích những điểm cách đều điểm O cố định một khoảng R cho trước là đường tròn có tâm là O và bán kính bằng R.

Quỹ tích 5: Quỹ tích những điểm nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc α không đổi ($0 < \alpha < 180^0$) là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng AB.

Đặc biệt, nếu $\alpha = 90^0$ thì ta nhận được:

Quỹ tích 5a: Quỹ tích những điểm nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

2. *Các bước giải một bài toán quỹ tích*

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn tính chất τ là một hình H nào đó, ta phải chứng minh hai phần :

- *Phần thuận* : Mọi điểm có tính chất τ đều thuộc hình H.

  Giới hạn: Căn cứ vào các vị trí đặc biệt của M, xem điểm M thuộc cả hình H hay chỉ thuộc một phần H_1 của hình H.

- *Phần đảo* : Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất τ

- *Kết luận* : Quỹ tích (tập hợp) các điểm M có tính chất τ là hình H.

Trong các đề thi vào lớp 10, người ta thường không yêu cầu học sinh phải làm các bài toán quỹ tích hoàn chỉnh, mà chỉ hỏi "Điểm M có tính chất a chuyển động trên đường nào ?". Trong trường hợp này, nội dung của bài toán tương ứng với phần thuận (kèm theo giới hạn nếu có).

3. *Các bước để giải bài toán dựng hình*

Bài toán dựng hình (bằng thước và compa) đầy đủ gồm bốn bước:

- *Phân tích:* Giả sử hình đó đã dựng được, trước hết vẽ phác một hình gần giống hình cần dựng trên những nét cơ bản, khi cần thiết phải vẽ thêm những đường liên quan, nghiên cứu tỉ mỉ mối quan hệ phụ thuộc giữa các điều kiện trong hình, dựa vào đó xem những yếu tố nào của hình có thể dựng được ngay, điểm nào còn phải dựng thì phải thỏa mãn hai điều kiện.

- *Cách dựng*: Nêu thứ tự từng bước dựng hình dựa vào các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản. Đồng thời thể hiện các bước dựng đó trên hình vẽ.

- *Chứng minh*: Dùng lập luận để chứng minh hình dựng được bằng phương pháp đã trình bày là hoàn toàn phù hợp với các điều kiện đã cho của bài toán.

- *Biện luận*: Phân tích mối quan hệ giữa các điều kiện đã cho và hình đã dựng được. Chỉ rõ trong trường hợp nào bài toán dựng được và dựng được bao nhiêu hình thỏa mãn điều kiện của đề bài.

Trong chương trình toán Trung học cơ sở, chỉ yêu cầu học sinh trình bày hai phần : cách dựng và chứng minh. Trong một số trường hợp, bài toán dựng hình là một trong nhiều câu của bài toán. Khi đó, để giảm nhẹ yêu cầu của bài toán dựng hình, trong đề toán thường chỉ nêu cách dựng (có vẽ hình minh họa).

B. Một số ví dụ

Ví dụ 20. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC. Trên cung nhỏ AC lấy điểm M. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AM và AB, đường thẳng IK cắt CM tại H. Tìm quỹ tích điểm H.

Giải (h.23)

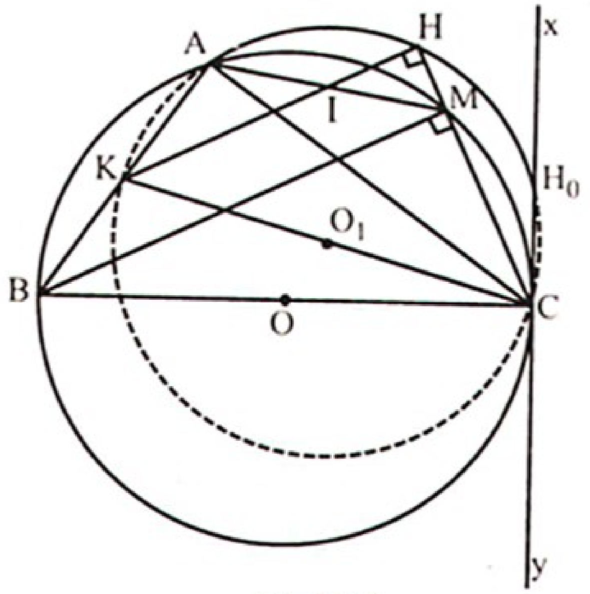
Phần thuận. Giả sử điểm H thỏa mãn điều kiện đề bài, ta có:

IK là đường trung bình của tam giác ABM

$\Rightarrow IK \parallel BM$.

Mà $\widehat{BMC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{KHC} = 90^0 \Rightarrow$ H thuộc đường tròn (O_1) đường kính KC

$\Rightarrow H \in (O_1)$, ngoại tiếp ΔACK cố định.



Hình 23

Giới hạn : Khi M tiến tới điểm A thì H tiến tới điểm A, khi M tiến tới điểm C thì H tiến tới điểm H_0 là giao điểm thứ hai của đường tròn (O_1) với tiếp tuyến xy tại C của đường tròn (O), suy ra điểm H thuộc cung AH_0.

Phần đảo. Lấy điểm H bất kì trên cung AH_0. Ta phải chứng minh tồn tại điểm M thuộc cung AC của đường tròn (O) có điểm I là trung điểm AM và KH đi qua trung điểm I của AM. Kẻ CH cắt đường tròn (O) tại M, MA cắt HK tại I. Ta có $KH \parallel BM$ (vì cùng vuông góc với CM). Trong ΔABM có KB = KA, $KI \parallel MB \Rightarrow$ AI = MI.

Kết luận. Quỹ tích những điểm H thỏa mãn điều kiện của bài toán là cung AH_0 của đường tròn đường kính CK.

Ví dụ 21. Cho tam giác cân ABC (AB = AC > BC) nội tiếp đường tròn (O) và một điểm M bất kì trên cung nhỏ AC. Tia Bx vuông góc với AM và cắt CM tại D.

a) Chứng minh $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$.

b) Chứng minh rằng tam giác BMD cân.

c) Chứng minh rằng khi M di động trên cung nhỏ AC thì độ lớn góc BDC không đổi và D thuộc một đường tròn cố định.

d) Xác định vị trí của M để tứ giác ABMD là hình thoi.

Giải (h.24)

a) $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ (vì cùng bù với $\widehat{AMC}$).

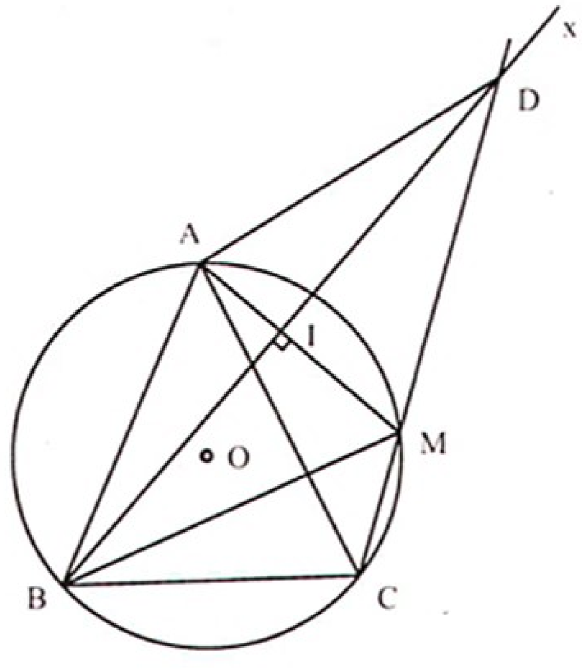
b) Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$ (góc nội tiếp), $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (giả thiết), mà $\widehat{AMD} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMD}$.

ΔBMD có MA vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên ΔBMD cân tại M.

c) * ΔBMD cân tại M $\Rightarrow$ $\widehat{BMC} = 2.\widehat{BDC}$

mà $\widehat{BMC} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BDC} = \frac{1}{2}.\widehat{BAC}$.

Vậy khi M di động trên cung nhỏ AC thì độ lớn góc $\widehat{BDC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ không đổi.



Hình 24

* ΔBMD cân tại M có MA là đường cao $\Rightarrow$ MA là đường trung trực $\Rightarrow$ AB = AD. Vậy khi M di động trên cung nhỏ AC thì D thuộc đường tròn (A; AB) cố định.

Nhận xét. Bạn có thể dùng cung chứa góc.

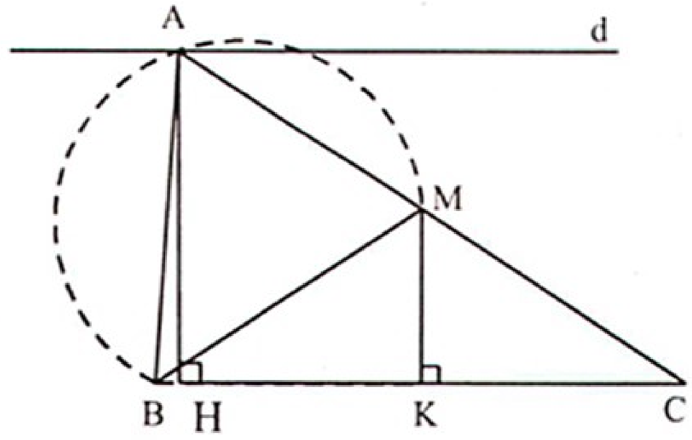
$\widehat{BDC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ không đổi; B, C cố định $\Rightarrow$ D nhìn BC dưới một góc không đổi $\Rightarrow$ D thuộc cung chứa góc $\frac{1}{2}\widehat{BAC}$ dựng trên đoạn BC.

d) Gọi I là giao điểm của Bx và AM. Vì IB = ID và AM $\perp$ BD nên ABMD là hình thoi khi và chỉ khi IA = IM $\Leftrightarrow$ Δ BAM cân tại B $\Leftrightarrow$ BO $\perp$ AM $\Leftrightarrow$ M đối xứng với A qua đường thẳng BO.

Ví dụ 22. Dựng tam giác ABC biết $\widehat{A} = 60^0$, đường cao AH = 4cm, đường trung tuyến BM = 3cm.

Giải (h.25)

Phân tích. Giả sử Δ ABC dựng được thỏa mãn đề bài $\widehat{A} = 60^0$, đường cao AH = 4cm, đường trung tuyến BM = 3cm.



Hình 25

Kẻ MK ⊥ BC suy ra MK là đường trung bình của $\Delta AHC \Rightarrow MK = \frac{1}{2}.AH = 2cm$.

Δ BMK dựng được vì biết : $\widehat{K} = 90^0; MK = 2cm; BM = 3cm$.

Điểm A thỏa mãn hai điều kiện :

* A thuộc cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn thẳng BM.

* A thuộc đường thẳng d // BK và cách BC một khoảng bằng 4cm.

Từ đó dựng được điểm C.

Cách dựng:

- Dựng Δ BMK với $\widehat{K} = 90^0; BM = 3cm; MK = 2cm$.
- Dựng cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn thẳng BM (khác phía với BK).
- Dựng đường thẳng d // BK và cách BK là 3cm.
- Gọi A là giao điểm của d và cung chứa góc 60^0.
- C là giao điểm của AM và BK, khi đó ΔABC là tam giác phải dựng.

Chứng minh: Theo cách dựng $\widehat{A} = 60^0; AH = 4cm$.

Δ CAH có MK // AH và $MK = \frac{1}{2}.AH \Rightarrow CM = \frac{1}{2}.CA$.

Từ đó suy ra BM là đường trung tuyến, BM = 3cm, thỏa mãn điều kiện đề bài.

Biện luận: Bài toán có hai nghiệm hình.

C. Bài tập

28. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi I là trung điểm của cạnh BC, OI kéo dài cắt đường tròn (O) tại M. Hai đường cao AD và CE cắt nhau tại H, nối ED, kéo dài AD cắt đường tròn (O) tại F.

a) Chứng minh điểm M nằm chính giữa cung nhỏ BC.

b) Chứng minh tia AM vừa là phân giác của góc BAC vừa là phân giác của góc FAO.

c) Chứng minh H và F đối xứng với nhau qua cạnh BC.

d) Từ đề bài và các chứng minh trên suy ra cách dựng tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính bằng 2,5cm; biết BC = 4cm; góc giữa đường phân giác của góc A và đường cao xuất phát từ A bằng 15^0. Vẽ hình minh họa.

29. Cho hình thang ABCD (AD // BC và AD > BC) nội tiếp đường tròn tâm O, các cạnh AB, DC kéo dài cắt nhau tại điểm I. Các tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại các điểm B, D cắt nhau tại điểm K.

a) Chứng minh rằng góc IBK bằng góc CDK.

b) Chứng minh IK // BC.

c) Hình thang ABCD phải thỏa mãn điều kiện gì để tứ giác AIKD là hình bình hành? Tại sao? Vẽ hình minh họa.

d) Cho trước đường tròn tâm O và một dây BD (không đi qua O). Hãy dựng hình thang ABCD nội tiếp đường tròn tâm O sao cho tứ giác BIKC (thoả mãn các điều kiện trên) là hình bình hành. Vẽ hình minh họa.

30. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự ấy và một đường thẳng d vuông góc với AC tại A. Vẽ đường tròn đường kính BC và trên đó lấy điểm M bất kì. Tia CM cắt đường thẳng d tại D. Tia AM cắt đường tròn tại điểm thứ hai là N. Tia DB cắt đường tròn tại điểm thứ hai là P.

a) Chứng minh rằng tứ giác ABMD nội tiếp được.

b) Chứng minh tích CM.CD không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

c) Chứng minh rằng AD // NP.

d) Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác MAC thuộc đường tròn cố định khi M di động.

31. Cho đường tròn (O; R) có AB là đường kính cố định, còn CD là đường kính thay đổi. Gọi d là tiếp tuyến với đường tròn tại B. Đường thẳng AD, AC cắt d lần lượt tại Q và P.

a) Chứng minh tứ giác CPQD nội tiếp.

b) Chứng minh trung tuyến AI của tam giác APQ vuông góc với CD.

c) Tìm quỹ tích tâm E của đường tròn ngoại tiếp tam giác CPD.

32. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R; OC là bán kính vuông góc với AB, Gọi P là điểm di động trên đoạn OC (P khác C và O). Tia AP cắt đường tròn tại M, tiếp tuyến tại M với đường tròn cắt đường thẳng OC tại D.

a) Chứng minh tam giác DMP cân.

b) Nêu cách dựng điểm P để PO = PM, khi đó xác định độ lớn các góc của tam giác AMB.

c) Nêu cách dựng điểm M để MB = MP, khi đó tính diện tích tam giác AMB.

d) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMP nằm trên một đường thẳng cố định.

Chuyên đề 16
BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Sử dụng mối quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc.

Từ điểm A ở ngoài đường thẳng d kẻ AH vuông góc với d. Với bất kỳ điểm B trên đường thẳng d ta có $AH \le AB$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi B trùng với H.

2. Sử dụng quy tắc ba điểm.

Với ba điểm bất kì A, B, C ta luôn có $AB \le AC + CB$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi C là một điểm thuộc đoạn thẳng AB.

3. Sử dụng bất đẳng thức trong đường tròn.

Trong đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

4. Sử dụng bất đẳng thức đại số: với x, y là các số không âm, ta có:

- $\dfrac{x^2+y^2}{2} \ge xy$.
- $\dfrac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$.
- $\dfrac{x^2+y^2}{2} \ge \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \ge xy$.

Dấu "=" xảy ra với các bất đẳng thức trên khi $x = y$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 23. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng d thay đổi đi qua A cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại M và N (A nằm giữa M và N).

a) Chứng minh rằng góc MBN có giá trị không đổi.

b) Tìm vị trí của đường thẳng d để chu vi tam giác MBN lớn nhất.

c) Tìm vị trí của đường thẳng d để diện tích tam giác MBN lớn nhất.

Giải (h.26)

a) Xét (O), ta có $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$ không đổi.

Xét (O'), ta có $\widehat{ANB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AO'B}$ không đổi.

Suy ra $\widehat{AMB}+\widehat{ANB}=\frac{1}{2}.\left(\widehat{AOB}+\widehat{AO'B}\right)$ không đổi.

Xét tam giác MBN có

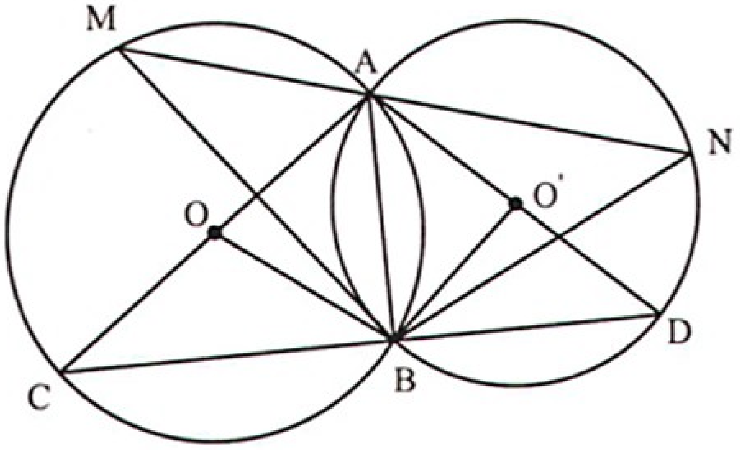
$\widehat{MBN}+\widehat{AMB}+\widehat{ANB}=180^0$.

Suy ra $\widehat{MBN}$ không đổi.

b) Kẻ đường kính AC của đường tròn (O), đường kính AD của đường tròn (O') ⇒ C, D cố định.

Ta có $\widehat{ABC}=90^0;\widehat{ABD}=90^0$

⇒ C, B, D thẳng hàng,



Hình 26

mà $\widehat{AMB}=\widehat{ACB};\widehat{ANB}=\widehat{ADC}$ suy ra $\Delta ACD \backsim \Delta BMN$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MN}{CD}=\frac{BM}{AC}=\frac{BN}{AD}=\frac{MN+BM+BN}{CD+AC+AD}\le 1 \text{ (vì } BN \le AD).$$

Suy ra $MN + BM + BN \le CD + AC + AD$.

Do đó chu vi tam giác BMN lớn nhất bằng chu vi tam giác ACD khi BN là đường kính hay MN // CD.

c) Ta có $\Delta BMN \backsim \Delta ACD \Rightarrow \frac{S_{BMN}}{S_{ACD}}=\left(\frac{BN}{AD}\right)^2\le 1$.

Do đó $S_{BMN} \le S_{ACD}$.

Vậy diện tích tam giác BMN lớn nhất bằng diện tích tam giác ACD khi BN là đường kính hay MN // CD.

> ***Nhận xét.*** Khi MN thay đổi, ta có $\widehat{MBN};\widehat{BMN}$ không đổi nên ta có tam giác BMN luôn tự đồng dạng với chính nó. Một tam giác tự đồng dạng có chu vi (hoặc diện tích) lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) khi một cạnh lớn nhất (hoặc nhỏ nhất). Từ đó ta có định hướng để chứng minh.

Ví dụ 24. Tìm một hình chữ nhật nội tiếp đường tròn có diện tích lớn nhất.

Giải (h.27). Giả sử hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn (O; R).

Cách 1. Kẻ $AH \perp DB$. Ta có $S_{ABCD} = 2.S_{ABD}$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=2.\frac{1}{2}.BD.AH=2R.AH\le 2R.AO=2R^2.$$

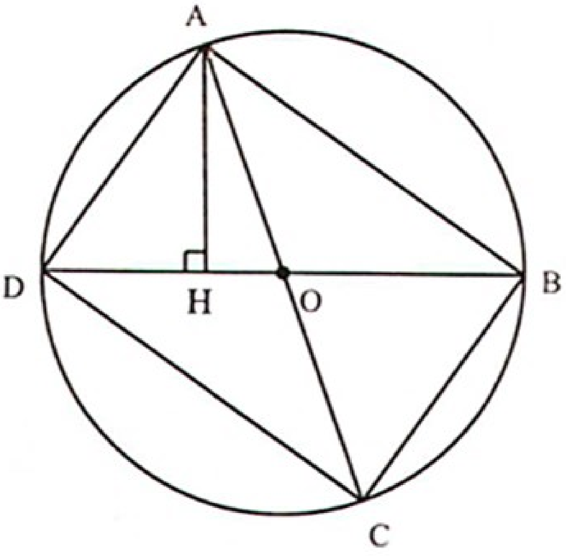
Vậy diện tích hình chữ nhật ABCD lớn nhất bằng $2R^2$ khi $H \equiv O$ hay ABCD là hình vuông.

Cách 2. ΔABC vuông tại B theo định lí Py-ta-go, ta có: $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 4R^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$S_{ABCD} = AB.BC \le \frac{AB^2 + BC^2}{2} = \frac{4R^2}{2} = 2R^2.$$

Vậy diện tích hình chữ nhật ABCD lớn nhất bằng $2R^2$ khi AB = BC hay ABCD là hình vuông.



Hình 27

Nhận xét: Ý tưởng của hai lời giải trên là:

- Nếu tam giác có một cạnh không đổi thì diện tích lớn nhất khi đường cao ứng với cạnh đó lớn nhất.
- Các yếu tố về cạnh có tổng bình phương không đổi (tổng hai cạnh không đổi hoặc tích hai cạnh không đổi) thì ta có thể vận dụng bất đẳng thức đại số.

Ví dụ 25. Trên đường tròn (O; R) có dây BC < 2R cố định. Xác định vị trí điểm A trên cung lớn BC để:

a) Chu vi Δ ABC lớn nhất.

b) Diện tích ΔABC lớn nhất.

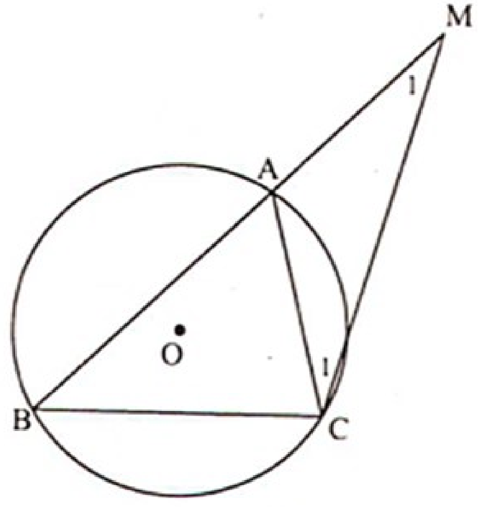
Giải

a) (h.28) Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$. Vì BC cố định nên α không đổi.

Trên tia đối của tia AB lấy AM = AC.

Suy ra ΔAMC cân tại A

$$\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{C_1} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\alpha$$



Hình 28

$\Rightarrow$ M thuộc cung chứa góc $\frac{1}{2}\alpha$ dựng trên đoạn thẳng BC (phần nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A).

Ta có chu vi ΔABC là AB + AC + BC = BM + BC.

Chu vi ΔABC lớn nhất $\Leftrightarrow$ BM lớn nhất $\Leftrightarrow$ BM là đường kính của đường tròn chứa cung chứa góc $\frac{1}{2}\alpha \Leftrightarrow \widehat{BCM} = 90^0 \Leftrightarrow AB = AC = AM$.

Hay A là điểm chính giữa cung lớn BC của đường tròn (O; R).

b) (h.29) *Cách 1*. Kẻ $AH \perp BC$, $OM \perp BC$.

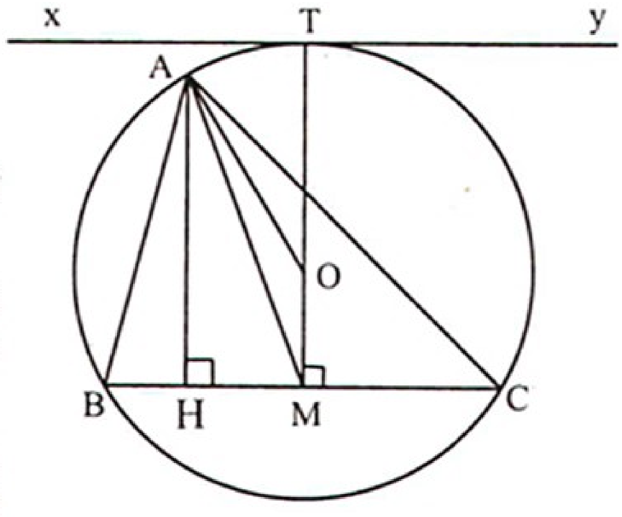
Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH \le \frac{1}{2}BC.AM \le \frac{1}{2}BC.(AO + OM)$.

Mà BC, AO, OM không đổi nên diện tích ΔABC lớn nhất bằng $\frac{1}{2}BC(AO + OM)$.

Khi $H \equiv M$; A, O, M thẳng hàng $\Leftrightarrow A \equiv T$ là điểm chính giữa của cung lớn BC.

Cách 2. Kẻ tiếp tuyến xy // BC tiếp xúc với cung lớn BC tại T, khi đó T là điểm chính giữa của cung lớn BC.

Nếu A trùng với T thì AH là khoảng cách giữa xy và BC. Nếu A không trùng với T thì AH nhỏ hơn khoảng cách giữa xy và BC.



Hình 29

Mà $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH$ nên S_{ABC} lớn nhất $\Leftrightarrow$ AH lớn nhất $\Leftrightarrow$ A trùng với T.

Ví dụ 26. Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định. Lấy điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI = \frac{2}{3}AO$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt đoạn thẳng MN tại E.

a) Chứng minh rằng tứ giác IECB nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $AM^2 = AE.AC$.

c) Xác định vị trí điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Giải (h.30)

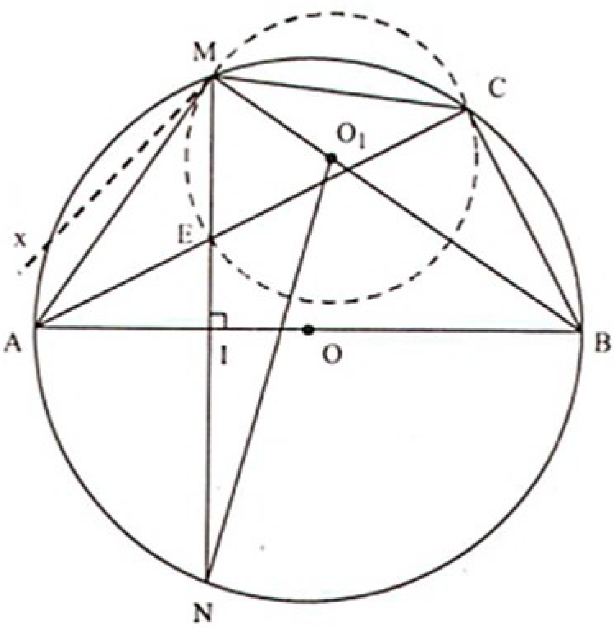
a) Ta có $\widehat{EIB} = 90^0$; $\widehat{ECB} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác IECB nội tiếp đường tròn đường kính BE.

b) Ta có $AB \perp MN \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$ nên $\widehat{AMN} = \widehat{ACM}$.

Lại có $\widehat{CAM}$ chung nên $\Delta AME \backsim \Delta ACM$(g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE.AC$.

c) Trên nửa mặt phẳng bờ ME có chứa điểm A, ta vẽ tiếp tuyến Mx của đường tròn ngoại tiếp $\Delta MCE \Rightarrow \widehat{EMx} = \widehat{ECM}$ mà $\widehat{EMA} = \widehat{ECM}$ (chứng minh câu b) $\Rightarrow \widehat{EMx} = \widehat{EMA} \Rightarrow$ MA và tia Mx trùng nhau $\Rightarrow$ MA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMCE.



Hình 30

Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $MCE \Rightarrow O_1M \perp MA$. Mặt khác ta có $BM \perp MA \Rightarrow M, O_1, B$ thẳng hàng $\Rightarrow NO_1$ nhỏ nhất khi $NO_1 \perp BM$. Khi đó ta xác định được điểm C như sau: Kẻ $NO_1 \perp MB$ tại O_1. Vẽ đường tròn tâm O_1 bán kính O_1M cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C.

C. Bài tập

33. Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Vẽ tiếp tuyến Ax. Lấy điểm M trên nửa đường tròn. Tia BM cắt Ax tại C. Xác định vị trí điểm M để 2.BM + BC đạt giá trị nhỏ nhất.

34. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn, vẽ MH vuông góc với AB. Xác định vị trí điểm M để:

a) Diện tích tam giác OMH lớn nhất.

b) Chu vi tam giác OMH lớn nhất.

35. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R và điểm C thuộc nửa đường tròn. Kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của H trên AC và BC. Tìm vị trí của điểm C để:

a) Độ dài đoạn EF lớn nhất.

b) Tứ giác CEHF có diện tích lớn nhất.

36. Cho đoạn thẳng AB và điểm M nằm giữa A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB dựng các hình vuông AMCD và MBEF. Hai đường thẳng AF và BC cắt nhau tại N.

a) Chứng minh AF vuông góc với BC. Suy ra điểm N nằm trên hai đường tròn ngoại tiếp các hình vuông AMCD và MBEF.

b) Chứng minh ba điểm D, N, E thẳng hàng và MN $\perp$ DE tại N.

c) Cho A, B cố định còn M di động trên đoạn thẳng AB. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

d) Tìm vị trí điểm M sao cho đoạn thẳng MN có độ dài lớn nhất.

37. Cho đường tròn (O; R) và dây cung BC < 2R cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn (O; R) (A không trùng với B và C). Tia phân giác của góc ACB cắt đường tròn (O; R) tại điểm D khác C, lấy điểm I thuộc đoạn CD sao cho DI = DB. Đường thẳng BI cắt đường tròn (O; R) tại K khác điểm B.

a) Chứng minh rằng ΔKAC cân.

b) Chứng minh đường thẳng AI luôn đi qua một điểm E cố định, từ đó hãy xác định vị trí của A để độ dài AI là lớn nhất.

c) Tìm vị trí của A để ΔABC có chu vi lớn nhất.

38. Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Lấy điểm M nằm trên tia đối của tia BA. Kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB.

a) Chứng minh rằng các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

b) Đoạn thẳng OM cắt đường tròn tại I. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.

c) Đường thẳng qua O vuông góc với OM cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P và Q. Xác định vị trí của điểm M trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác MPQ đạt giá trị nhỏ nhất.

39. Cho đường tròn tâm O và đường tròn tâm I cố định cắt nhau tại hai điểm A và B. Biết rằng đường tròn (I) đi qua điểm O. Vẽ hai đường kính AE và BF của đường tròn (O). Gọi C là một điểm di động trên cung EF của đường tròn (O) ($\overset{\frown}{EF}$ không chứa điểm A) với C khác E và F. Đường thẳng CO cắt đường tròn (O) và đường tròn (I) lần lượt tại K và D (K khác C; D khác O).

a) Chứng minh rằng $\widehat{CAD} + \widehat{OBK} = 180^0$.

b) Chứng minh K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABD.

c) Xác định vị trí của điểm C trên cung EF sao cho diện tích tứ giác ACBD lớn nhất.

PHẦN BA. MỘT SỐ ĐỀ THAM KHẢO

ĐỀ SỐ 1

Bài 1. Thu gọn các biểu thức sau:

a) $A=\left(\sqrt{6}+3\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+\dfrac{7+4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$;

b) $B=\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}-\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}}$;

c) $C=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}$.

Bài 2. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Tháng trước, hai tổ sản xuất được 800 chi tiết máy. Tháng này, tổ I vượt mức 9%, tổ II vượt mức 10% nên cả hai tổ đã sản xuất được 875 chi tiết máy. Hỏi tháng trước mỗi tổ đã sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy ?

Bài 3. Cho các đường thẳng $(d_1): y = (m-1)x + 2$,

$$(d_2): y = 3x - m.$$

a) Tìm giá trị của m để $(d_1) // (d_2)$.

b) Tìm giá trị của m để (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm M(5; 12).

c) Với giá trị vừa tìm được của m ở câu b) thì (d_1) và (d_2) lần lượt cắt trục hoành tại A và B. Tính diện tích tam giác MAB.

Bài 4. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Tiếp tuyến tại C trên nửa đường tròn cắt hai tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn lần lượt tại D và P (C khác A và B).

a) Chứng minh tam giác DOP vuông.

b) Gọi E là giao điểm của đường thẳng BP và AC. Chứng minh rằng BP = PE.

c) Chứng minh rằng BD vuông góc với OE.

d) Gọi F là giao điểm của BD với nửa đường tròn (O; R). Chứng minh EF là tiếp tuyến của nửa đường tròn đó.

Bài 5. Cho x không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x-4\sqrt{x}+\frac{x+16}{\sqrt{x}+3}+10.$$

ĐỀ SỐ 2

Bài 1. Cho biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \dfrac{1}{1-\sqrt{x}} + \dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}$.

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh rằng $P < \dfrac{1}{3}$.

c) Tìm x để $P = \dfrac{2}{7}$

Bài 2. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Quãng đường AB dài 60 km. Một ô tô chạy liên tục từ A đến B rồi lại chạy từ B về A hết tất cả 2 giờ 12 phút. Biết vận tốc lúc về nhỏ hơn vận tốc lúc đi là 10 km/h. Tính vận tốc lúc đi và lúc về.

Bài 3. Cho đường thẳng (d) : $y = (m + 2)x + m + 1$ và parabol (P): $y = -x^2$.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì (d) luôn đi qua điểm $M(-1; -1)$.

b) Tìm giá trị của m để (d) và (P) tiếp xúc với nhau. Tìm tọa độ của tiếp điểm.

c) Vẽ đường thẳng (d) và parabol (P) ứng với giá trị của m vừa tìm được ở câu b).

Bài 4. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Lấy điểm H thuộc tia đối của tia BA, qua H dựng đường thẳng d vuông góc với AB. Lấy điểm C cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Vẽ một dây EF bất kì qua C, các tia AE, AF cắt đường thẳng d lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh tứ giác BEMH nội tiếp.

b) Chứng minh rằng AE.AM = AF.AN.

c) Chứng minh rằng khi EF thay đổi thì đường tròn ngoại tiếp ΔAMN luôn đi qua một điểm cố định khác điểm A.

d) Cho biết AB = 4cm, HB = 1cm, BC = 1cm. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.

Bài 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng :

$$\sin A + \sin B + \sin C < 2(\cos A + \cos B + \cos C).$$

ĐỀ SỐ 3

Bài 1. Cho biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}-\frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right)\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

a) Rút gọn P.

b) Cho y > 0 và y = 4x. Tính giá trị của biểu thức P.

c) Tìm x, y để $P+\frac{1}{P}=2$.

Bài 2. Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $8x^2+2x-1=0$;

b) $x^4-4x^2-5=0$;

c) $5x^2-2\sqrt{10}x+2=0$;

d) $\begin{cases}5x+4y=13\\3x-2y=10.\end{cases}$

Bài 3. Cho hàm số y = (m – 2)x + 1 có đồ thị là đường thẳng (d).

a) Tìm các giá trị của m để hàm số đã cho là hàm số nghịch biến.

b) Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) đi qua điểm M(2; 3).

c) Xác định m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Bài 4. Cho tam giác ABM cân tại M, nội tiếp đường tròn tâm O. Trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho MC = MB. Nối AC cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D. Gọi E là điểm đối xứng của D qua A.

a) Chứng minh rằng: $\widehat{BEC}=2.\widehat{ACB}$.

b) Chứng minh rằng: $CD.CA=\frac{BC^2}{4}$.

c) Các tia BE và MA cắt nhau tại F. Chứng minh AE = EF và BF = AC.

d) Tam giác ABM cần có thêm điều kiện gì để tứ giác MDFE là hình bình hành ?

Bài 5. Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}}\geq\frac{1}{2}$ với a, b là các số dương.

ĐỀ SỐ 4

Bài 1. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right) : \left(1 - \dfrac{x^2-2x-1}{x^2-2x+1}\right)$.

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P khi $x = 13 - 4\sqrt{3}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 2. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một ca nô chạy xuôi dòng và ngược dòng trên sông với vận tốc riêng không đổi. Nếu ca nô chạy xuôi dòng trong 2 giờ rồi ngược dòng trong 3 giờ thì được tổng cộng 195 km. Nếu ca nô chạy xuôi dòng trong 3 giờ rồi ngược dòng trong 2 giờ thì được tổng cộng 205 km. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước.

Bài 3. Cho phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$. (1)

a) Giải phương trình khi $m = 3$.

b) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

c) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2$.

Bài 4. Cho đường tròn (O) bán kính R và một dây BC cố định (BC < 2R). Gọi A là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Lấy điểm M bất kì trên cung nhỏ AC, kẻ tia Bx vuông góc với tia MA ở I và cắt tia CM tại D.

a) Chứng minh góc AMD bằng góc ABC và MA là tia phân giác của góc BMD.

b) Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và góc BDC có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

c) Tia DA cắt BC ở E và cắt đường tròn (O) ở F, chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF.

d) Chứng minh tích $\mathcal{P} = AE.AF$ không đổi khi M di động. Tính $\mathcal{P}$ theo bán kính R và góc $ABC = \alpha$.

Bài 5. Cho (P): $y = -x^2$. Đường thẳng $y = m$ cắt (P) tại hai điểm A, B. Tìm m để tam giác AOB đều và tính diện tích tam giác ABO.

ĐỀ SỐ 5

Bài 1. Cho biểu thức

$$P = \left[\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{x^2-x-5}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\right] : \frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+5\sqrt{x}+6}.$$

a) Rút gọn P.

b) Tìm $x \in \mathbf{Z}$ để $P < 0$.

c) Tìm các giá trị của x và y sao cho: $P.\left(x-4\right)+4y^2-4xy+9+\left|2x-y-3\right|=0$.

Bài 2. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một tổ công nhân theo kế hoạch phải sản xuất 2160 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng do mỗi ngày tổ đó đã sản xuất vượt mức 8 sản phẩm nên đã hoàn thành kế hoạch sớm được 3 ngày. Tính năng xuất dự định theo kế hoạch.

Bài 3. Cho phương trình $x^2-(3m-1)x+2m^2-m=0$.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị của m để $x_1^2+x_2^2=2$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $x_1^2+x_2^2$.

Bài 4. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R và C, D là hai điểm di động trên nửa đường tròn sao cho C thuộc cung AD và $\widehat{COD}=60^0$ (C khác A và D khác B). Gọi M là giao điểm của tia AC và BD, N là giao điểm của dây AD và BC. Gọi H là trung điểm của CD.

a) Chứng minh tứ giác CMDN nội tiếp.

b) Chứng minh tổng các khoảng cách từ A, B đến đường thẳng CD là không đổi.

c) Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng H, I, O thẳng hàng và $DI=\frac{R\sqrt{3}}{3}$.

d) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MCD theo R.

Bài 5. Cho x và y là hai số thực không âm thoả mãn $x^2+y^2=4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$A=\frac{xy}{x+y+2}.$$

ĐỀ SỐ 6

Bài 1. Cho biểu thức $P = 3.\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$.

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh $P > 2$.

c) Tìm m để có x thỏa mãn $P.\sqrt{x} = m$.

Bài 2. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} mx - y = 2 & (1) \\ x + my = 5 & (2) \end{cases}$$

a) Chứng tỏ hệ đã cho luôn có nghiệm duy nhất với mọi m.

b) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

c) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x ; y)$ thỏa mãn $x + y = 5$.

Bài 3. Cho parabol (P) : $y = \dfrac{1}{2}x^2$

và đường thẳng (d): $y = x + 4$.

a) Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

c) Tính góc α tạo bởi đường thẳng (d) và trục hoành.

Bài 4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Điểm C thuộc nửa đường tròn (O) (CB < CA, C khác B). Gọi D là điểm chính giữa của cung AC, E là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh tam giác ABE cân tại B.

b) Gọi F là điểm thuộc đường thẳng AC sao cho C là trung điểm của AF. Chứng minh $\widehat{EFA} = \widehat{EBD}$.

c) Gọi H là giao điểm của AC và BD, EH cắt AB tại K, KC cắt EF tại I. Chứng minh rằng tứ giác EIBK nội tiếp.

d) Chứng minh rằng $\dfrac{HF}{BC} = \dfrac{EI}{BI} + \dfrac{EK}{BK}$.

Bài 5. Giải phương trình $10\sqrt{x^3+1} = 3\left(x^2+2\right)$.

ĐỀ SỐ 7

(Thi tuyển sinh lớp 10, THPT Thành phố Hà Nội, năm học 2012 - 2013)

Bài I (*2,5 điểm*).

1. Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của biểu thức A khi x = 36.

2. Rút gọn biểu thức $B = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \dfrac{4}{\sqrt{x}-4}\right) : \dfrac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0$, $x \neq 16$).

3. Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức B(A – 1) là số nguyên.

Bài II *(2,0 điểm). Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai người cùng làm chung một công việc trong $\dfrac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc.

Bài III (*1,5 điểm*).

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 2 \\ \dfrac{6}{x} - \dfrac{2}{y} = 1. \end{cases}$

2. Cho phương trình: $x^2 - (4m-1)x + 3m^2 - 2m = 0$ (ẩn x). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 7$.

Bài IV (*3,5 điểm*). Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Bán kính CO vuông góc với AB, M là một điểm bất kì trên cung nhỏ AC (M khác A và C), BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

1. Chứng minh tứ giác CBKH là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$.

3. Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho BE = AM. Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C.

4. Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A. Cho P là một điểm nằm trên d sao cho hai điểm P, C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và $\frac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK.

Bài V (*0,5 điểm*)**.** Với x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện $x \geq 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{x^2 + y^2}{xy}$.

ĐỀ SỐ 8

(Thi tuyển sinh lớp 10, THPT TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 - 2013)

Câu 1 (*2 điểm*) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $2x^2 - x - 3 = 0.$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$

c) $x^4 + x^2 - 12 = 0.$

d) $x^2 - 2\sqrt{2}.x - 7 = 0$.

Câu 2 (*1,5 điểm*)

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (D): $y = -\frac{1}{2}x + 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) ở câu trên bằng phép tính.

Câu 3 (*1,5 điểm*) Thu gọn các biểu thức sau :

$$A = \frac{1}{x + \sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x - 1} - \frac{1}{x - \sqrt{x}} \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

$$B = \left(2 - \sqrt{3}\right)\sqrt{26 + 15\sqrt{3}} - \left(2 + \sqrt{3}\right)\sqrt{26 - 15\sqrt{3}}.$$

Câu 4 (1,5 *điểm*) Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (x là ẩn số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm m để biểu thức $M = \frac{-24}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5 (*3,5 điểm*) Cho đường tròn (O) và M là điểm nằm ngoài đường tròn (O). Đường thẳng MO cắt (O) tại E và F (ME < MF). Vẽ cát tuyến MAB và tiếp tuyến MC của (O) (C là tiếp điểm, A nằm giữa hai điểm M và B, A và C nằm khác phía đối với đường thẳng MO).

a) Chứng minh rằng MA.MB = ME.MF.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm C lên đường thẳng MO. Chứng minh tứ giác AHOB nội tiếp.

c) Trên nửa mặt phẳng bờ OM có chứa điểm C, vẽ nửa đường tròn đường kính MF; nửa đường tròn này cắt tiếp tuyến tại E của (O) ở K. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng CO và KF. Chứng minh rằng đường thẳng MS vuông góc với đường thẳng KC.

d) Gọi P và Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác EFS và ABS và T là trung điểm của KS. Chứng minh ba điểm P, Q, T thẳng hàng.

ĐỀ SỐ 9

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên Đại học sư phạm Hà Nội, năm học 2012-2013, vòng 1)

Câu 1 (*2 điểm*). Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right).\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{ với } a>b>0.$$

a) Rút gọn P.

b) Biết $a-b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Câu 2 (*2 điểm*). Trên quãng đường AB dài 210 km, tại cùng một thời điểm, một xe máy khởi hành từ A đi về B và một ô tô khởi hành từ B đi về A. Sau khi gặp nhau, xe máy đi tiếp 4 giờ nữa thì đến B và ô tô đi tiếp 2 giờ 15 phút nữa thì đến A. Biết rằng xe máy và ô tô không thay đổi vận tốc trên suốt chặng đường. Tính vận tốc của xe máy và của ô tô.

Câu 3 (*2 điểm*). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y=-x^2$ và đường thẳng (d): $y=mx-m-2$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm có hoành độ phân biệt x_1, x_2.

b) Tìm m để $|x_1-x_2|=\sqrt{20}$.

Câu 4 (*3 điểm*). Cho tam giác ABC. Đường tròn (ω) có tâm O và tiếp xúc với các đoạn thẳng AB, AC tương ứng tại K, L. Tiếp tuyến (d) của đường tròn (ω) tại điểm E thuộc cung nhỏ KL cắt các đường thẳng AL, AK tương ứng tại M, N. Đường thẳng KL cắt OM tại P và cắt ON tại Q.

a) Chứng minh rằng $\widehat{MON} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng MQ, NP và OE cùng đi qua một điểm.

c) Chứng minh KQ.PL = EM.EN.

Câu 5 (*1 điểm*). Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $\sqrt{xy}(x-y) = x+y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = x + y.

ĐỀ SỐ 10

(Tuyển sinh lớp 10 chuyên tỉnh Đồng Nai, năm học: 2012 - 2013, vòng 1)

Câu 1 (*2,5 điểm*)

1) Giải các phương trình:

a) $x^4 - x^2 - 20 = 0$.

b) $\sqrt{x+1} = x - 1$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} |x| + |y-3| = 1 & (1) \\ y - |x| = 3. & (2) \end{cases}$

Câu 2 (*2,0 điểm*) Cho parapol $y = x^2$ (P) và đường thẳng y = mx (d), với m là tham số.

1) Tìm các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 9.

2) Tìm các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm mà khoảng cách giữa hai điểm này bằng $\sqrt{6}$.

Câu 3 (*2,0 điểm*)

1) Tính $P = \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right).\frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}$.

2) Chứng minh $a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + a^2b^3$, biết rằng $a + b \geq 0$.

Câu 4 (*3,5 điểm*) Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính AH, đường tròn này cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại D và E.

1) Chứng minh tứ giác BDEC là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh ba điểm D, O, E thẳng hàng.

3) Cho biết AB = 3cm, BC = 5cm. Tính diện tích tứ giác BDEC.

Phần bốn. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

ĐẠI SỐ

Chuyên đề 1

1. Trục căn thức ở mẫu rồi tính :

a) $\dfrac{15(\sqrt{6}+1)}{5}+\dfrac{8(\sqrt{6}-2)}{2}+\dfrac{6(3+\sqrt{6})}{3}-9\sqrt{6}$

$=3\sqrt{6}+3+4\sqrt{6}-8+6+2\sqrt{6}-9\sqrt{6}=1.$

b) $\dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}-\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-(\sqrt{5})^2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2\sqrt{6}}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}.$

2. a) $\sqrt{(3+\sqrt{5})^2}-\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=(3+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5}.$

b) $\sqrt{(\sqrt{5}+1).\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}=\sqrt{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\sqrt{4}=2.$

3. a) $\left(\sqrt[3]{2}+1\right)^3+\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^3=(2+3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+1)+(2-3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}-1)$

$=4+6\sqrt[3]{2}.$

b) $x=\dfrac{6\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\right)}{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\dfrac{6.\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\right)}{6}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$;

$y=\dfrac{2\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)}{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\dfrac{2\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)}{2}=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}.$

$A = x^3y - xy^3 = xy(x+y)(x-y) = \left(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4}\right).2.\sqrt[3]{4}.2\sqrt[3]{2} = 8\left(2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\right).$

4. $P = \dfrac{2\sqrt{x} + \left|\sqrt{x} - 1\right|}{(3\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$

ĐKXĐ : $x \geq 0$; $x \neq \dfrac{1}{9}$.

• Nếu $\sqrt{x} - 1 \geq 0$ hay $x \geq 1$ thì $P = \dfrac{2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1}{(3\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$

$= \dfrac{3\sqrt{x} - 1}{(3\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}.$

• Nếu $\sqrt{x} - 1 < 0$ hay $x < 1$ thì $P = \dfrac{2\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{(3\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$

$= \dfrac{\sqrt{x} + 1}{(3\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \dfrac{1}{3\sqrt{x} - 1}.$

Với $x = \dfrac{4}{9} < 1$ thì $P = \dfrac{1}{3\sqrt{x} - 1} = \dfrac{1}{3.\dfrac{2}{3} - 1} = 1.$

Với $x = \dfrac{9}{4} > 1$ thì $P = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} = \dfrac{1}{\dfrac{3}{2} + 1} = \dfrac{2}{5}.$

5. ĐKXĐ : $x \geq 0$; $x \neq 4$.

a) $P = \dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}.$

b) $x = \sqrt{(\sqrt{5} + 2)^2} - \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = \sqrt{5} + 2 - (\sqrt{5} - 2) = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 2.$

Do đó $P = \dfrac{4.2}{2 + 3} = \dfrac{8}{5}.$

c) $P = 2 \Leftrightarrow \dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} = 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 6$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3$

$\Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

6. ĐKXĐ : $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$.

a) $P = \dfrac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}$.

b) $P > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ 3 - \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 9$ và $x \neq 4$.

c) $P < 1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} - 1 < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{x} - 3}{3 - \sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 3} > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x} - 3 > 0 \text{ và } \sqrt{x} - 3 > 0 \\ 2\sqrt{x} - 3 < 0 \text{ và } \sqrt{x} - 3 < 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} > \dfrac{3}{2} \text{ và } \sqrt{x} > 3 \\ \sqrt{x} < \dfrac{3}{2} \text{ và } \sqrt{x} < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{9}{4} \text{ và } x > 9 \\ x < \dfrac{9}{4} \text{ và } x < 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 9 \\ x < \dfrac{9}{4}. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta có $P < 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 9 \\ 0 \leq x < \dfrac{9}{4}. \end{array}\right.$

7. ĐKXĐ : $x \geq 0$; $x \neq 1$.

a) $P = \dfrac{x + 2}{x\sqrt{x} + 1} + \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} - \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$

$= \ldots = \dfrac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$.

b) Ta có $\sqrt{x} \geq 0$; $x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ nên $P \geq 0$ do đó $|P| = P$.

Suy ra $|P| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow (2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ hoặc $x = 4$.

c) $P < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} - 1 < 0$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-(\sqrt{x} - 1)^2}{x - \sqrt{x} + 1} < 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng đúng (vì $x \neq 1$) nên $P < 1$.

8. ĐKXĐ : $x \geq 0$; $x \neq 1$.

a) $P = \frac{\sqrt{x} + 2 + x - \sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} : \frac{x - 1 - x + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)}$

$P = \frac{x + 8}{\sqrt{x} + 1}$.

b) $P = \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{9}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - 1 + \frac{9}{\sqrt{x} + 1}$

$P = \sqrt{x} + 1 + \frac{9}{\sqrt{x} + 1} - 2$

$P \geq 2\sqrt{(\sqrt{x} + 1).\frac{9}{\sqrt{x} + 1}} - 2 = 6 - 2 = 4$.

Vậy min $P = 4$ khi $\sqrt{x} + 1 = \frac{9}{\sqrt{x} + 1}$ hay $(\sqrt{x} + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 3$

$\Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Lưu ý : Phương pháp tìm giá trị nhỏ nhất của P trong câu này là dùng bất đẳng thức Cô-si (xem chuyên đề 6).

c) $P.\frac{x - 1}{x^2 + 8x} = \frac{x + 8}{\sqrt{x} + 1}.\frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{x(x + 8)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$.

Điều kiện bổ sung là $x \neq 0$.

Ta có $P.\frac{x-1}{x^2+8x} < -2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x} < -2$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x} + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+\sqrt{x}-1}{x} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{x} < 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 1 < 0$ (vì $\sqrt{x} + 1 > 0$)

$\Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$. Kết hợp các điều kiện ta có $0 < x < \frac{1}{4}$.

Chuyên đề 2

9. a) Ta có $2x - 5y = 3$ suy ra $x = \frac{5y+3}{2}$.

Nghiệm tổng quát của phương trình (1) là :

$$\text{(I)} \begin{cases} x = \dfrac{5t+3}{2} \\ y = t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Muốn có một nghiệm cụ thể ta cho t một giá trị nào đó rồi thay vào (I).

b) Tìm nghiệm nguyên của (1)

Ta có $2x - 5y = 3$ suy ra $x = \frac{5y+3}{2} = \frac{4y+y+3}{2} = 2y + \frac{y+3}{2}$.

Muốn có giá trị nguyên của x thì ta phải có

$$\frac{y+3}{2} = t \quad (t \in \mathbb{Z}).$$

Suy ra $y = 2t - 3$ $(t \in \mathbb{Z})$.

Khi đó $x = 2(2t - 3) + t = 5t - 6$.

Do đó công thức nghiệm nguyên của (1) là :

$$\begin{cases} x = 5t - 6 \\ y = 2t - 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}).$$

10. Ta có $|2x + 7y - 17| \geq 0$; $(5x - 3y + 19)^2 \geq 0$

mà $|2x + 7y - 17| + (5x - 3y + 19)^2 = 0$ nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x + 7y - 17 = 0 \\ 5x - 3y + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3. \end{cases}$$

11. Vì $x = 2$ là nghiệm của (1) nên $4 + (2a - 5).2 - 3b = 0$ hay $4a - 3b = 6$.

Vì $x = -3$ là nghiệm của (1) nên $9 + (2a - 5).(-3) - 3b = 0$ hay $6a + 3b = 24$.

Do đó ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4a - 3b = 6 \\ 6a + 3b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2. \end{cases}$$

12. ĐK : $x \neq \pm y$.

Đặt (I) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = a \\ \dfrac{1}{x-y} = b \end{cases}$ ta được $\begin{cases} 27a + 21b = 2 \\ 81a - 105b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{27} \\ b = \dfrac{1}{21} \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{27} \\ \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn ĐK).

13.

- Nếu $y \geq 2$ thì hệ phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{cases} 3x - (y - 2) = 3 \\ 6x + 5y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x + 5y = 7. \end{cases}$$

Giải hệ này được $y = \dfrac{9}{7} < 2$ (loại).

- Nếu $y < 2$ thì hệ phương trình đã cho trở thành :

$\begin{cases} 3x + y - 2 = 3 \\ 6x + 5y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 5y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ (thỏa mãn ĐK).

14. a) Thay $x = 4$ vào hệ phương trình đã cho ta được :

$$\begin{cases} 12 + my = 10 \\ 4 - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ y = -1. \end{cases}$$

Vậy khi m = 2 thì hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1. \end{cases}$

b) Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi :

$$\frac{3}{1} \neq \frac{m}{-1} \text{ hay } m \neq -3.$$

Xét hệ phương trình :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 32 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1. \end{cases}$$

Thay x = 6 ; y = 1 vào phương trình 3x + my = 10 ta được

3.6 + m = 10 suy ra m = –8 (thỏa mãn điều kiện m ≠ –3).

Vậy khi m = –8 thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (6 ; 1) thỏa mãn điều kiện 5x + 2y = 32.

15. ĐK : $xyz \neq 0$

Viết hệ đã cho dưới dạng

$$\text{(I)} \begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{6} & (1) \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{3} & (2) \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{3}{2} & (3) \end{cases}$$

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{11}{3}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6} \qquad (4)$$

Trừ từng vế của phương trình (4) lần lượt với từng vế của hệ (I) ta được

$$\begin{cases} \dfrac{1}{z} = 1 \\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1. \end{cases}$$

Chuyên đề 3

16. a) Đặt $x^2 + x - 1 = t$ thì $x^2 + x + 2 = t + 3$

Phương trình đã cho trở thành $t(t + 3) = 40$

hay $t^2 + 3t - 40 = 0$ có nghiệm $t_1 = 5$; $t_2 = -8$

· Với $t_1 = 5$ thì $x^2 + x - 1 = 5$ hay $x^2 + x - 6 = 0$ có nghiệm $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.

· Với $t_2 = -8$ thì $x^2 + x - 1 = -8$ hay $x^2 + x + 7 = 0$, vô nghiệm.

Vậy $S = \{-3 ; 2\}$.

b) ĐKXĐ : $x \neq 0$.

Đặt $x + \dfrac{1}{x} = t$ thì $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = t^2$ hay $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Phương trình đã cho trở thành :

$$t^2 - 2 + 2t - 6 = 0 \text{ hay } t^2 + 2t - 8 = 0 \text{ có nghiệm } t_1 = 2 ; t_2 = -4.$$

• Với $t_1 = 2$ thì $x + \dfrac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$ có nghiệm $x = 1$.

• Với $t_2 = -4$ thì $x + \dfrac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$ có nghiệm

$$x_1 = -2 + \sqrt{3} \ ; \ x_2 = -2 - \sqrt{3}.$$

Vậy $S = \{1 ; -2 + \sqrt{3} ; -2 - \sqrt{3}\}$.

17. a) Thay $x = 3$ vào phương trình (1) ta được

$9 + 3(m - 5) - 3(m - 2) = 0$ hay $0.m = 0$ đúng với mọi m.

Vậy $x = 3$ là một nghiệm của (1) với mọi giá trị của m.

b) $\Delta = (m - 5)^2 + 12(m - 2) = (m + 1)^2$.

Phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow (m + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

c) Thay $x = 1 - \sqrt{2}$ vào phương trình (1) ta được

$$\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 + (m - 5)(1 - \sqrt{2}) - 3(m - 2) = 0$$

hay $(2 + \sqrt{2})m = 4 + 3\sqrt{2}$, dẫn tới $m = \dfrac{4 + 3\sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.

18. a) Phương trình $x^2 + 5x + 6 = 0$ có $\Delta = 1 > 0$ nên có hai nghiệm phân biệt. Theo hệ thức Vi–ét ta có :

$$x_1 + x_2 = -5 \text{ ; } x_1x_2 = 6$$

Do đó $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-5)^2 - 12 = 13.$

Ta có $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (-5)^2 - 24 = 1.$

Suy ra $x_1 - x_2 = \pm 1.$

Vậy $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \pm 1.(-5) = \pm 5.$

b) Phương trình $7x^2 - x + 2 = 0$ có $\Delta < 0$ nên không có nghiệm.

Do đó không thể tính được giá trị của các biểu thức đã cho.

19. a) Ta có $a = 1 + \sqrt{2} > 0$; $c = 1 - \sqrt{2} < 0$ nên phương trình (1) có *hai nghiệm trái dấu* (hơn nữa vì $S < 0$ nên nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn).

b) $\Delta' = 11 > 0$; $P = \dfrac{1}{5} > 0$; $S = \dfrac{-8}{5} < 0$ nên phương trình (2) có *hai nghiệm âm phân biệt*.

c) $\Delta' = 0$; $S = 2\sqrt{2} > 0$ nên phương trình (3) có *nghiệm kép dương*.

20. a) Nếu $m = -4$ thì phương trình trở thành $14x - 2 = 0$, có nghiệm $x = \dfrac{1}{7}$.

Nếu $m \neq -4$ thì (1) là phương trình bậc hai.

$\Delta' = m^2 - 4m + 17 = (m - 2)^2 + 13 > 0$ với mọi m.

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.

b) Phương trình (1) có nghiệm $x = 1$

$\Leftrightarrow a + b + c = 0$

$\Leftrightarrow m + 4 - 2(m - 3) - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 8.$

Khi đó $x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-2}{m + 4} = \dfrac{-2}{12} = -\dfrac{1}{6}.$

21. a) $\Delta' = (m + 1)^2 - 2m = m^2 + 1 > 0$ suy ra đpcm.

b) $x_1 + x_2 = -2(m + 1) = -2m - 2$; $x_1x_2 = 2m.$

Do đó $x_1 + x_2 + x_1x_2 = -2$ (không phụ thuộc m)

Suy ra $x_2 + x_1x_2 = -(2 + x_1).$

$x_2(1 + x_1) = -(2 + x_1)$

$x_2 = \dfrac{-(2 + x_1)}{1 + x_1}$ (với $x_1 \neq -1$).

c) $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = [-2(m + 1)]^2 - 4m$

$$A = 4(m^2 + m + 1) = 4\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]$$

$$A = 4\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + 3 \geq 3.$$

Do đó min A = 3 khi $m = -\dfrac{1}{2}$.

22. a) • Nếu m = 0 thì phương trình (1) trở thành $-5x - 2 = 0$ có nghiệm $x = -\dfrac{2}{5}$.

• Nếu $m \neq 0$ thì (1) là phương trình bậc hai,

$\Delta = (2m - 5)^2 - 4m(m - 2) = -12m + 25.$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow -12m + 25 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{25}{12}$.

Kết hợp cả hai trường hợp ta được nếu $m \leq \dfrac{25}{12}$ thì (1) có nghiệm.

b) Điều kiện để (1) có hai nghiệm phân biệt là $m < \dfrac{25}{12}$ và $m \neq 0$.

Theo hệ thức Vi–ét ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{5 - 2m}{m}$; $x_1x_2 = \dfrac{m - 2}{m}$.

Do đó $(6x_1 - 1)(6x_2 - 1) = -2$

$\Leftrightarrow 36x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 1 = -2$

$\Leftrightarrow \dfrac{36(m - 2)}{m} - \dfrac{6(5 - 2m)}{m} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 51m = 102 \Leftrightarrow m = 2$ (thỏa mãn điều kiện).

23. a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 = 4x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 2. \end{cases}$

Do đó m = 16.

b) Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta = 25 - m \geq 0$ hay $m \leq 25$.

Ta có $x_1^3 + x_2^3 = 370$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 370$

$\Leftrightarrow 10^3 - 3.m.10 = 370$

$\Leftrightarrow m = 21$ (thỏa mãn điều kiện).

24. Ta thấy $a - b + c = 1 + 2m - 2m + 1 = 0$

nên phương trình đã cho có một nghiệm là -1

• Nếu $x_1 = -1$ thì $x_2 = 2m + 1$.

Theo đề bài ta có $x_1 + 3x_2 = 14$

$\Leftrightarrow -1 + 3(2m + 1) = 14 \Leftrightarrow m = 2$.

• Nếu $x_2 = -1$ thì $x_1 = 2m + 1$

Theo đề bài ta có $x_1 + 3x_2 = 14 \Leftrightarrow 2m + 1 - 3 = 14 \Leftrightarrow m = 8$.

Vậy $m \in \{2 ; 8\}$.

25. a) $\Delta' = [-(m - 1)]^2 - (m^2 + 4m + 13) = -6m - 12$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow -6m - 12 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -2$.

b) Phương trình (1) có hai nghiệm âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ m < -2 \\ m^2 + 4m + 13 > 0 \\ 2(m - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ (m + 2)^2 + 9 > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2.$$

Chuyên đề 4

26. Gọi quãng đường AM là x km (x > 0).

Gọi quãng đường MB là y km (y > 0).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{9} + \dfrac{y}{18} = 2 \\ \dfrac{x}{18} + \dfrac{y}{9} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 24 \text{ (thỏa mãn ĐK).} \end{cases}$$

Vậy quãng đường AM dài 6 km ; quãng đường MB dài 24 km.

27. Thời gian ô tô đã đi cho đến khi đuổi kịp xe máy là :

$$11 - 7 = 4 \text{ (giờ)}$$

Thời gian xe máy đã đi cho đến khi ô tô đuổi kịp là :'

$$4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \text{ (giờ).}$$

Gọi vận tốc ô tô là x (km/h) $(x > 0)$.

Gọi vận tốc xe máy là y (km/h) $(y > 0)$.

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ 4x - \dfrac{9}{2}y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \text{ (thỏa mãn ĐK).} \end{cases}$$

Vậy vận tốc ô tô là 50 km/h ; vận tốc xe máy là 40 km/h.

Lưu ý **:** Bài này có thể giải bằng cách chọn một ẩn số.

28. Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h).

Gọi vận tốc dòng nước là y (km/h) $(x > y > 0)$.

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x + y) + 2(x - y) = 126 \\ 1,5(x + y) + 1,5(x - y) = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 43 \\ y = 3 \text{ (thỏa mãn ĐK).} \end{cases}$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 43 km/h.

Vận tốc dòng nước là 3 km/h.

29. Gọi thời gian xe I đã đi là x (giờ) $(x > 0)$.

Suy ra thời gian xe II đã đi là $x + \frac{1}{3}$ hay $\frac{3x + 1}{3}$ (giờ).

Dẫn tới phương trình :

$$\frac{150}{x} - \frac{150}{\frac{3x+1}{3}} = 5 \Leftrightarrow \frac{150}{x} - \frac{450}{3x + 1} = 5$$

Tìm được nghiệm $x_1 = 3$ (thỏa mãn ĐK) ; $x_2 = -\frac{10}{3}$ (loại).

Vậy xe I đã đi trong 3 giờ ; xe II đã đi trong 3 giờ 20 phút.

30. Gọi năng suất dự kiến là x (sản phẩm/ngày) (x nguyên dương).

Dẫn tới phương trình : $\dfrac{180}{x} - \dfrac{190}{x + 8} = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 18x - 1440 = 0$, có nghiệm $x_1 = 30$ (thỏa mãn ĐK) ; $x_2 = -48$ (loại).

Vậy năng suất dự kiến là 30 sản phẩm/ngày.

31. Gọi năng suất theo kế hoạch của mỗi tổ là x (sản phẩm/ngày) (x : nguyên dương).

Gọi thời gian mỗi tổ phải làm theo kế hoạch là y (ngày) ($y > 3$).

Suy ra số sản phẩm mỗi tổ phải làm là xy (sản phẩm).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases}(x + 4)(y - 3) = xy + 58 \\ (x + 3)(y - 2) = xy + 54\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x + 4y = 70 \\ -2x + 3y = 60.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = 30 \\ y = 40 \text{ (thỏa mãn ĐK).}\end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch, mỗi tổ phải sản xuất là :

$$30 \times 40 = 1200 \text{ (sản phẩm).}$$

32. Gọi thời gian đội I làm một mình xong công việc là x giờ ($x > 4$).

Gọi thời gian đội II làm một mình xong công việc là y giờ ($y > 4$).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{6}{y} = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 6 \\ y = 12 \text{ (thỏa mãn ĐK).}\end{cases}$$

Vậy đội I làm một mình xong công việc trong 6 giờ ;

Đội II làm một mình xong công việc trong 12 giờ.

33. Hai vòi chảy $\dfrac{2}{5}$ bể hết 45 phút $= \dfrac{3}{4}$ giờ.

Vậy hai vòi chảy đầy bể hết $\dfrac{3}{4} : \dfrac{2}{5} = \dfrac{15}{8}$ (giờ).

Gọi thời gian để vòi I chảy một mình đầy bể là x giờ $\left(x > \dfrac{15}{8}\right)$, dẫn tới phương trình :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{8}{15} \Leftrightarrow 4x^2 - 7x - 15 = 0,$$

có nghiệm $x_1 = 3$ (thỏa mãn ĐK) ; $x_2 = -\frac{5}{4}$ (loại).

Vậy vòi I chảy đầy bể trong 3 giờ ;

Vòi II chảy đầy bể trong 5 giờ.

34. Gọi chữ số hàng chục là x ($x \in \mathbb{N}$; $0 < x \le 9$)

Gọi chữ số hàng đơn vị là y ($y \in \mathbb{N}$; $0 \le y \le 9$).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 100x + y = 9(10x + y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ 10x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \text{(thoả mãn ĐK).}$$

Vậy số phải tìm là 45.

35. Gọi chữ số hàng chục là x ($x \in \mathbb{N}$, $0 < x \le 9$), chữ số hàng đơn vị là y ($y \in \mathbb{N}$, $0 \le y \le 9$).

Dẫn tới hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 10x + y - 2xy + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 12 & (1) \\ 2x^2 - 15x + 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải phương trình (2) được $x_1 = 7$ (thỏa mãn ĐK) ; $x_2 = \frac{1}{2}$ (loại).

Suy ra $y_1 = 12 - x_1 = 5$.

Vậy số phải tìm là 75.

36. Gọi số sản phẩm tổ I phải sản xuất theo kế hoạch là x (x nguyên, dương).

Gọi số sản phẩm tổ II phải sản xuất theo kế hoạch là y (y nguyên, dương).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{8}{100}x + \frac{6}{100}y = 69 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1000 \\ 8x + 6y = 6900 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 450 \\ y = 550 \text{ (thỏa mãn ĐK).} \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch tổ I phải sản xuất 450 sản phẩm ;

Tổ hai phải sản xuất 550 sản phẩm.

37. Gọi số học sinh tiên tiến là x (x nguyên, dương).

Gọi số vở để làm phần thưởng là y (y nguyên, dương).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = 12x + 10 \\ y = 13x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 250 \text{ (thỏa mãn ĐK).} \end{cases}$$

Vậy lớp đó có 20 học sinh tiên tiến và có 250 quyển vở để làm phần thưởng.

38. Gọi số hàng ghế lúc đầu là x (x nguyên dương, x < 25).

Dẫn tới phương trình

$$\frac{418}{x+2} - \frac{360}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 56x + 720 = 0,$$

có nghiệm $x_1 = 20$ (thỏa mãn ĐK) ; $x_2 = 36$ (loại).

Vậy lúc đầu có 20 hàng ghế.

39. Gọi số sản phẩm phân xưởng I làm trong một ngày là x (x nguyên dương).

Gọi số sản phẩm phân xưởng II làm trong một ngày là y (y nguyên dương).

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} 10x + 12y = 940 \\ 4x - 3y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 45 \text{ (thỏa mãn ĐK).} \end{cases}$$

Số sản phẩm phân xưởng I làm trong 10 ngày là

$$40 \times 10 = 400 \text{ (sản phẩm).}$$

Số sản phẩm phân xưởng II làm trong 12 ngày là

$$45 \times 12 = 540 \text{ (sản phẩm).}$$

Chuyên đề 5

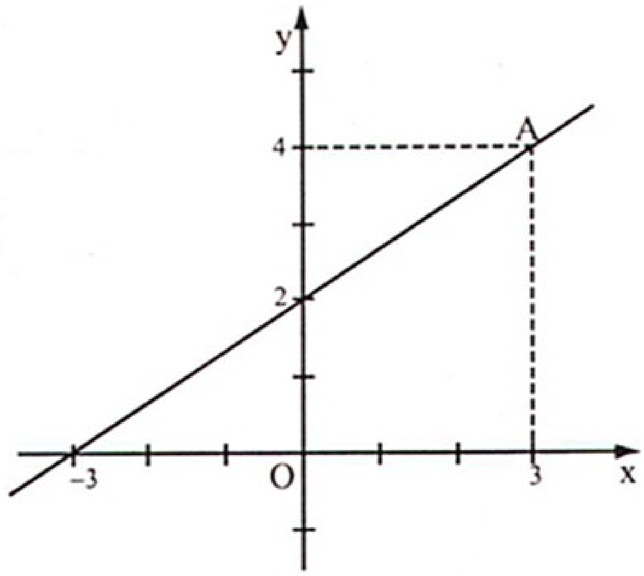
40. a) Vì đồ thị của hàm số $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = \frac{2}{3}x$ nên $a = \frac{2}{3}$.

Vì đồ thị của hàm số $y = \frac{2}{3}x + b$ đi qua điểm A(3 ; 4) nên $4 = \frac{2}{3}.3 + b$ $\Rightarrow b = 2$.

Vậy hàm số cần xác định là

$$y = \frac{2}{3}x + 2.$$

b) Đồ thị : xem hình bên.



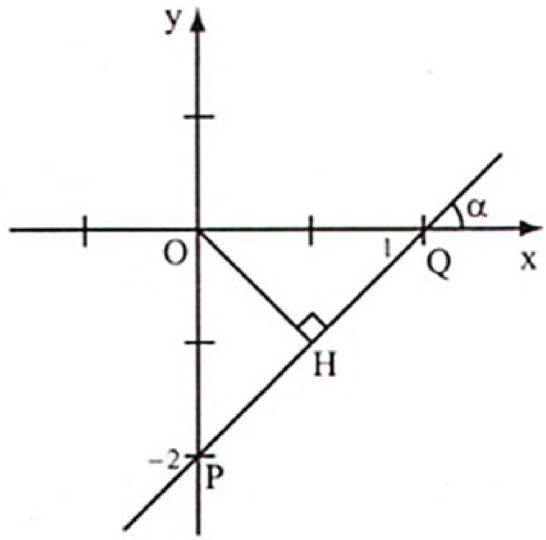
41. a) Vì $a \neq 0$ nên (d) cắt trục tung tại P có tung độ là -2 và cắt trục hoành tại điểm Q có hoành độ là $\frac{2}{a}$.

Xét Δ OPQ vuông tại O có $\widehat{Q_1} = \alpha = 45^o$ nên tam giác này vuông cân.

Suy ra $OQ = OP = |-2| = 2$.

Do đó ta tìm được hoành độ của điểm Q :

$\frac{2}{a} = 2 \Rightarrow a = 1.$



b) Vẽ $OH \perp PQ$, ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2}$

hay $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}$

$OH^2 = 2 \Rightarrow OH = \sqrt{2}.$

42. a) Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ đi qua A(4 ; 4) nên $4 = a.4^2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$.

Vậy hàm số đã cho là $y = \frac{1}{4}x^2$.

b) Gọi đường thẳng (d) đi qua A và tiếp xúc với (P) tại A là $y = ax + b$. (1)

Vì (d) đi qua A(4 ; 4) nên $4 = a.4 + b \Rightarrow b = -4a + 4$.

Do đó (d) là đường thẳng $y = ax - 4a + 4$.

Xét phương trình hoành độ điểm chung của (P) và (d) :

$\frac{1}{4}x^2 = ax - 4a + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4ax + 16a - 16 = 0,$

$\Delta' = 4a^2 - 16a + 16 = 4(a-2)^2.$

(P) và (d) tiếp xúc $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow a = 2.$

Vậy phương trình của đường thẳng (d) là $y = 2x - 4$. (Học sinh tự vẽ hình).

43. a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

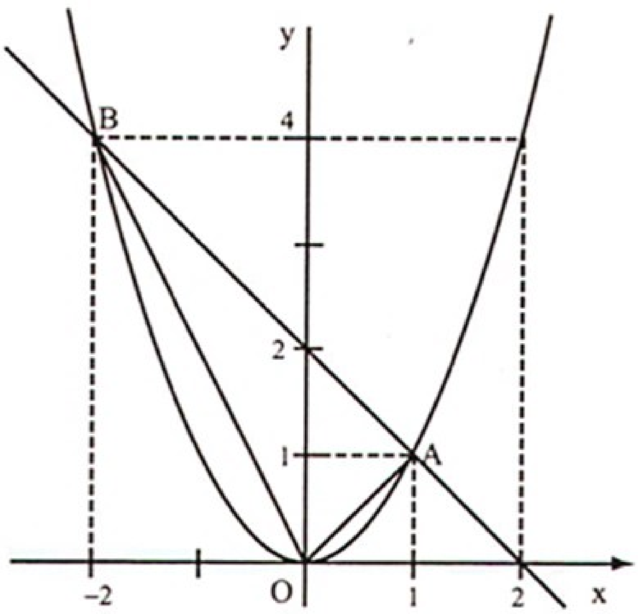
$x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$, có hai nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = -2$.

Vậy (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.

Vì $x_1 = 1 > 0$; $x_2 = -2 < 0$ nên hai điểm A và B nằm về hai phía của trục tung.

b) Với $x_1 = 1$ ta có $y_1 = 1 \Rightarrow A(1 ; 1)$.

Với $x_2 = -2$ ta có $y_2 = 4 \Rightarrow B(-2 ; 4)$.



Ta có

$AB^2 = [1-(-2)]^2 + (1-4)^2 = 18.$

$OA^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$

$OB^2 = 2^2 + 4^2 = 20.$

Vậy $OB^2 = AB^2 + AO^2$

$\Rightarrow \Delta$ AOB vuông tại A.

$$S_{AOB} = \frac{OA.AB}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{18}.\sqrt{2}}{2} = 3 \text{ (đvdt)}.$$

44. a) Ta viết (d) dưới dạng $y = -ax + 1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$\frac{1}{2}x^2 = -ax + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2ax - 2 = 0$

$\Delta' = a^2 + 2 > 0.$

Do đó (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Ta có

$x_A = -a - \sqrt{a^2+2}$; $\qquad y_A = -ax_A + 1$

$x_B = -a + \sqrt{a^2 + 2}$; $y_B = -ax_B + 1$.

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

$= \left(2\sqrt{a^2 + 2}\right)^2 + [-a(x_B - x_A)]^2$

$= 4(a^2 + 2) + a^2.4(a^2 + 2)$

$= 4a^4 + 12a^2 + 8 \geq 8$.

Vậy min $AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (khi $a = 0$).

Chuyên đề 6

45. a) Bình phương hai vế (do hai vế đều dương) ta được

$x \geq x + 1 - 2\sqrt{x + 1} + 1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x + 1} \geq 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x + 1} \geq 1 \Leftrightarrow x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ (đúng).

b) Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$x + 5 > 2\sqrt{x + 4}$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 > 4(x + 4) \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 > 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)^2 > 0$ (đúng vì $x \geq 0$).

46. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm.

a) Ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$b + c \geq 2\sqrt{bc}$

$c + a \geq 2\sqrt{ca}$.

Nhân từng vế các bất đẳng thức trên ta được :

$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8\sqrt{a^2.b^2.c^2} = 8abc$.

(dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$).

b) $\dfrac{a}{2b + 3c} + \dfrac{2b + 3c}{4a} \geq 2\sqrt{\dfrac{a}{2b + 3c}.\dfrac{2b + 3c}{4a}} = 2.\dfrac{1}{2} = 1$.

Dấu "=" xảy ra khi $2a = 2b + 3c$.

47. Ta có

$$\frac{\sqrt{1}}{1}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\ldots+\frac{\sqrt{200}}{200}$$

$$=\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}}\right)}_{100 \text{ số hạng}}+\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{101}}+\frac{1}{\sqrt{102}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{200}}\right)}_{100 \text{ số hạng}}$$

$$>\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{100}}+\frac{1}{\sqrt{100}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}}\right)}_{100 \text{ số hạng}}+\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{200}}+\frac{1}{\sqrt{200}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{200}}\right)}_{100 \text{ số hạng}}$$

$$=\frac{100}{\sqrt{100}}+\frac{100}{\sqrt{200}}=10+5\sqrt{2}.$$

48. Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}>\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}$$

……

$$\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được :

$$S>\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}=S_1.$$

Ta có $S > S_1$.

Suy ra $2S > S_1 + S$ hay

$$2S>\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

$$2S>\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{80}-\sqrt{79}+\sqrt{81}-\sqrt{80}$$

$$2S>\sqrt{81}-\sqrt{1}=8.$$

Do đó $S > 4$.

49. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có :

$$a\sqrt{b-1} = a\sqrt{(b-1).1} \le a.\frac{b-1+1}{2} = \frac{ab}{2}$$

$$b\sqrt{a-1} = b\sqrt{(a-1).1} \le b.\frac{a-1+1}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được :

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \le ab.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b-1=1 \\ a-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2.$

50. Chia cả hai vế của bất đẳng thức cho $\sqrt{ab} > 0$ ta được :

$$\frac{\sqrt{c(a-c)}}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{c(b-c)}}{\sqrt{ab}} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{c}{b}.\frac{a-c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a}.\frac{b-c}{b}} \le 1$$

Ta có $\sqrt{\frac{c}{b}.\frac{a-c}{a}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} + \frac{a-c}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c}{b} - \frac{c}{a}\right)$

$$\sqrt{\frac{c}{a}.\frac{b-c}{b}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a} + \frac{b-c}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right).$$

Cộng từng vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{c}{b}.\frac{a-c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a}.\frac{b-c}{b}} \le \frac{1}{2}.2 = 1.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{c}{b} = \frac{a-c}{a}$ và $\frac{c}{a} = \frac{b-c}{b} \Leftrightarrow c = \frac{ab}{a+b}.$

51. Ta có :

$$x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 > 0,$$

$$x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3 > 0,$$

$$x^2 - 3x + 6 = \frac{(x^2 - 2x + 5) + (x^2 - 4x + 7)}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta được

$$\sqrt{(x^2 - 2x + 5)(x^2 - 4x + 7)} \le x^2 - 3x + 6\,.$$

Nghiệm của phương trình (1) chính là giá trị của x để dấu "=" xảy ra.

Trong bất đẳng thức trên, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$x^2 - 2x + 5 = x^2 - 4x + 7 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 1$.

Chuyên đề 7

52. Giải bất phương trình (1) được $x > \dfrac{8}{11}$.

Giải bất phương trình (2) được $x < 3$.

Vậy $\dfrac{8}{11} < x < 3$. Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{1\,;\,2\}$.

53. Đưa bất phương trình đã cho về dạng

$$(5m - 1)x \ge 2(5m - 1).$$

- Nếu $m \ge \dfrac{1}{5}$ thì $x \ge 2$;
- Nếu $m < \dfrac{1}{5}$ thì $x < 2$;
- Nếu $m = \dfrac{1}{5}$ thì $0x \ge 0$, nghiệm đúng với mọi x.

54. a) Khi $m = \sqrt{5}$ thì (1) là $2\sqrt{5}x - 19 > x$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{5} - 1)x > 19 \Leftrightarrow x > \dfrac{19}{2\sqrt{5} - 1} = 2\sqrt{5} + 1.$

b) $2mx - 19 > x$ (1) $\Leftrightarrow (2m - 1)x > 19$ (*)

- Nếu $2m - 1 \le 0$ hay $m \le \dfrac{1}{2}$ thì (*) không thỏa mãn với mọi $x > 1$.
- Nếu $2m - 1 > 0$ hay $m > \dfrac{1}{2}$ thì $x > \dfrac{19}{2m - 1}$.

Đặt $\dfrac{19}{2m - 1} = x_0$.

Để (1) nhận mọi giá trị $x > 1$ là nghiệm thì $x_0 \le 1$.

Do đó ta có hệ :

$$\begin{cases} 2m - 1 > 0 \\ \dfrac{19}{2m - 1} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m \ge 10 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 10.$$

Vậy với $m \ge 10$ thì (1) nhận mọi giá trị $x > 1$ là nghiệm.

55. a) A có nghĩa $\Leftrightarrow 25 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \le 25 \Leftrightarrow -5 \le x \le 5$.

b) B có nghĩa $\Leftrightarrow x^2 - 9 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le -3. \end{array}\right.$

c) C có nghĩa $\Leftrightarrow$ A và B đều có nghĩa

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 \le x < 5 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5 \le x \le 5 \text{ và } x \ge 3 \\ -5 \le x \le 5 \text{ và } x \le -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 \le x \le 5 \\ -5 \le x \le -3. \end{array}\right.$$

56. a) ĐK : $x \ne \dfrac{1}{3}$.

$$\frac{6x + 1}{3x - 1} < 2 \Leftrightarrow \frac{6x + 1}{3x - 1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{3x - 1} < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}.$$

b) ĐK : $x \ne 4$.

$$\frac{4x + 5}{x - 4} \le 1 \Leftrightarrow \frac{4x + 5}{x - 4} - 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{3x + 9}{x - 4} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + 9 \ge 0 \text{ và } x - 4 < 0 \\ 3x + 9 \le 0 \text{ và } x - 4 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge -3 \text{ và } x < 4 \\ x \le -3 \text{ và } x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow -3 \le x < 4.$$

57. a) $\dfrac{1}{4} < x < 1$.

b) $|5x + 7| < 3x - 1 \Leftrightarrow 1 - 3x < 5x + 7 < 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x > -\dfrac{3}{4} \end{cases}$ (vô nghiệm).

c) $|2x - 5| > x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 5 > x - 1 \\ 2x - 5 < 1 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < 2. \end{array}\right.$

d) Bình phương hai vế được :

$x^2 - 8x + 16 > 4x^2 + 4x + 1. \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 < 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+5) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x < 1.$

58. a) ĐK : $x \geq \frac{5}{7}$ ĐS : $\frac{5}{7} \leq x < 3.$

b) $\sqrt{(5x-2)^2} > 4x + 1 \Leftrightarrow |5x-2| > 4x + 1.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - 2 > 4x + 1 \\ 5x - 2 < -4x - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < \frac{1}{9}. \end{array}\right.$

c) ĐK : $x(x+6) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq -6. \end{array}\right.$

Khi đó

$x^2 + 6x > 40 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 40 > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+10) > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < -10 \text{ (thỏa mãn ĐK).} \end{array}\right.$

Chuyên đề 8

59. a) $A = -3\left(x^2 + 2x - \frac{2}{3}\right) = -3(x+1)^2 + 5 \leq 5.$

Vậy max A = 5 khi và chỉ khi $x = -1$.

b) $B = \dfrac{23}{4x^2 - 5x + 3} = \dfrac{23}{4\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{23}{16}} \leq \dfrac{23}{\frac{23}{16}} = 16.$

Vậy max B = 16 khi và chỉ khi $x = \frac{5}{8}$.

c) Ta có $\sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \geq \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$

Do đó $-\sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{2}} \le -\frac{1}{2}$ suy ra $\max C = -\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = \frac{1}{4}$.

60. Xét biểu thức

$$\frac{3x + \sqrt{x} + 6}{\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} + 1 \ge 2.\sqrt{3\sqrt{x}.\frac{6}{\sqrt{x}}} + 1 = 6\sqrt{2} + 1.$$

Do đó $A = -\frac{3x + \sqrt{x} + 6}{\sqrt{x}} \le -(6\sqrt{2} + 1)$.

Vậy $\max A = -(6\sqrt{2} + 1)$ khi $3\sqrt{x} = \frac{6}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 2$.

61. Coi (1) như là phương trình bậc hai ẩn x, tham số y.

Nếu tồn tại cặp số (x ; y) thỏa mãn (1) thì (1) phải có nghiệm.

Do đó $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 36 - 2(-y + 19) \ge 0 \Leftrightarrow y \ge 1$.

Vậy min y = 1 khi (1) có nghiệm kép $x = \frac{6}{2} = 3$.

Cặp số cần tìm là (3 ; 1).

62. Gọi a là một giá trị của P. Biểu thức P nhận giá trị a khi và chỉ khi phương trình sau có nghiệm :

$$\frac{2x}{x^2 - 2x + 4} = a \qquad (1)$$

(1) $\Leftrightarrow ax^2 - 2(a + 1)x + 4a = 0$ (2)

- Nếu a = 0 thì (2) là $-2x = 0$ có nghiệm x = 0.
- Nếu $a \ne 0$ thì (2) là phương trình bậc hai.

Xét $\Delta' = -3a^2 + 2a + 1 = (3a + 1)(1 - a)$

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \ge 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le a \le 1$.

Giá trị a = 0 nằm giữa $-\frac{1}{3}$ và 1 nên không thể là giá trị cần tìm.

Do đó $\min P = -\frac{1}{3}$ khi x là nghiệm kép của (2), tức là

$$x = \frac{a+1}{a} = \left(-\frac{1}{3}+1\right) : \left(-\frac{1}{3}\right) = -2.$$

max P = 1 khi x là nghiệm kép của (2), tức là

$$x = \frac{a+1}{a} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

63. a) Ta có $(am + bn)^2 \le (a^2 + b^2)(m^2 + n^2)$

$\Leftrightarrow a^2m^2 + 2abmn + b^2n^2 \le a^2m^2 + a^2n^2 + b^2m^2 + b^2n^2$

$\Leftrightarrow a^2n^2 - 2abmn + b^2m^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (an - bm)^2 \ge 0.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow an = bm \Leftrightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n}.$

Lưu ý : Bất đẳng thức trên được gọi là bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki.

b) Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki đối với hai bộ số (1 ; 2) và $(\sqrt{x}\ ;\ \sqrt{y})$ ta được

$$\left(1.\sqrt{x} + 2.\sqrt{y}\right)^2 \le (1^2 + 2^2)\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2\right]$$

$\Leftrightarrow 5^2 \le 5(x + y) \Leftrightarrow x + y \ge 5.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{y}}{2} \Leftrightarrow x = 1\ ;\ y = 4.$

Vậy min $(x + y) = 5$ khi và chỉ khi $x = 1\ ;\ y = 4$.

64. Áp dụng bất đẳng thức $|a| - |b| \le |a - b|$ ta có :

$A = |x + 3| - |x - 4| \le |x + 3 - (x - 4)|$

$A \le 7.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3 \ge x - 4 \ge 0 \\ x + 3 \le x - 4 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 4.$

65. $B = x^2 + 3x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{4} + 3x + \frac{1}{x} - \frac{1}{4}$

$$B \ge 2\sqrt{x^2.\frac{1}{4}} + 3x + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \quad \left(\text{dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\right)$$

$B \geq x + 3x + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} = 4x + \frac{1}{x} - \frac{1}{4}$

$B \geq 2\sqrt{4x.\frac{1}{x}} - \frac{1}{4} = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy min $B = 3\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$.

66. $C = x + \frac{1}{x+1} = \left(\frac{x+1}{25} + \frac{1}{x+1}\right) + \frac{24x-1}{25}$

$C \geq 2\sqrt{\frac{x+1}{25}.\frac{1}{x+1}} + \frac{24x-1}{25}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 4$)

$C \geq 2.\frac{1}{5} + \frac{24.4-1}{25}$ (vì $x \geq 4$)

$C \geq \frac{21}{5}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 4$).

Do đó min $C = \frac{21}{5}$ khi và chỉ khi $x = 4$.

67. Ta có

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{z}.\frac{yz}{x}} = 2y$$

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{zx}{y}} = 2z$$

$$\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \geq \sqrt{\frac{zx}{y}.\frac{xy}{z}} = 2x.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$2.S \geq 2(x + y + z) = 2a \Leftrightarrow S \geq a.$$

Do đó min $S = a$ khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{a}{3}$.

68. Ta có

$$A = \frac{x^2 + 3y^2}{xy} = \frac{x^2 + 9y^2 - 6y^2}{xy} = \frac{x^2 + 9y^2}{xy} - \frac{6y^2}{xy}$$

$$A \geq \frac{2\sqrt{x^2.9y^2}}{xy} - \frac{6y}{x} \text{ (dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = 3y).$$

$$A \geq 6 - \frac{6y}{3y} \text{ (vì } x \geq 3y)$$

$A \geq 6 - 2 = 4$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 3y$).

Vậy min A = 4 khi và chỉ khi $x = 3y$.

69. Ta có

$$B = 3x^2 - x + \frac{1}{9x} + \frac{1}{3}$$

$$= 3x^2 - 2x + x + \frac{1}{9x} + \frac{1}{3}$$

$$= 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \left(x + \frac{1}{9x}\right)$$

$$\geq 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\sqrt{x.\frac{1}{9x}}$$

$$\geq 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}$$

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{1}{9x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}.$

Vậy min B $= \dfrac{2}{3}$ khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{3}$.

Chuyên đề 9

70. Gọi số có ba chữ số đó là $\overline{abc}$. Ta có

$$\overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$$

$$= 99a - 99c = 99(a - c).$$

Vì các chữ số a và c là các chữ số lẻ nên $a - c \vdots 2$

Do đó $\overline{abc} - \overline{cba} \vdots 99$ và $\overline{abc} - \overline{cba} \vdots 2$,

mà $(99 ; 2) = 1$ nên $\overline{abc} - \overline{cba} \vdots 198$.

71. Ta có $A = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + 19^3$

$= (1^3 + 19^3) + (3^3 + 17^3) + (5^3 + 15^3) + (7^3 + 13^3) + (9^3 + 11^3)$

$= (1 + 19).a + (3 + 17).b + (5 + 15).c + (7 + 13).d + (9 + 11).e$

$= 20(a + b + c + d + e)$ trong đó $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$.

Vậy $A \vdots 20$.

72. Ta đặt $c_1 = a_1 - b_1 ; c_2 = a_2 - b_2 ; \ldots ; c_5 = a_5 - b_5$.

Ta có $c_1 + c_2 + \ldots + c_5 = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_5 - b_5)$

$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_5) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_5) = 0$.

Tổng của 5 số hạng bằng 0 thì phải có ít nhất một số chẵn, suy ra $c_1.c_2 \ldots c_5 \vdots 2$.

73. a) Khai triển rồi thu gọn các biểu thức $(a + b)(b + c)(c + a) - abc$

và $(a + b + c)(ab + bc + ca) - 2abc$ được các kết quả giống nhau.

b) Vì $a + b + c \vdots 4$ nên trong ba số a, b, c ít nhất cũng có một số chẵn (vì nếu cả ba số a, b, c đều lẻ thì tổng $a + b + c$ là một số lẻ, không chia hết cho 4).

Suy ra $2abc \vdots 4$, do đó $P \vdots 4$.

74. Với $n \in \mathbb{Z}$ thì $n^2(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)n$.

Ta có $n(n - 1) \vdots 2$; $(n + 1)n \vdots 2$

Suy ra $n(n - 1)(n + 1)n \vdots 4$.

Mặt khác, $n(n - 1)(n + 1) \vdots 3$ mà $(3 ; 4) = 1$ nên $n^2(n^2 - 1) \vdots 12$.

75. a) Đặt $\underbrace{11\ldots1}_{n} = a$ thì $9a + 1 = 10^n$.

Ta có $M = \underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{11\ldots1}_{n} + \underbrace{44\ldots4}_{n} + 1$

$= a.10^n + a + 4a + 1$

$= a(9a + 1) + 5a + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a + 1)^2$

$= \underbrace{33\ldots3}_{n-1}4^2$.

b) $N = \underbrace{11...1}_{n}2.\underbrace{11...1}_{n}4 + 1$

Ta đặt $a = \underbrace{11...1}_{n}2$ thì $b = \underbrace{11...1}_{n}4 = a + 2$.

Do đó $N = a(a + 2) + 1 = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$ là một số chính phương.

76. Giả sử $n^2 = \overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100(\overline{cd} + 4) + \overline{cd} = 101\overline{cd} + 400$.

Suy ra $101\overline{cd} = n^2 - 400 = (n - 20)(n + 20)$.

Vì n^2 là một số có 4 chữ số nên $n < 100$.

Mặt khác, 101 là số nguyên tố nên $n + 20 = 101 \Rightarrow n = 81$.

Vậy $\overline{abcd} = 81^2 = 6561$.

Thử lại : $65 - 61 = 4$.

Vậy số cần tìm là 6561.

77. Gọi số chính phương cần tìm là $\overline{xxyy}$.

Ta có $\overline{xxyy} = 1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y$

$= 11(100x + y) \,\vdots\, 11$

Do $\overline{xxyy}$ là số chính phương nên $\overline{xxyy} \,\vdots\, 121$.

Suy ra $100x + y \,\vdots\, 11$ hay $99x + (x + y) \,\vdots\, 11$

Vì $99x \,\vdots\, 11$ nên $x + y \,\vdots\, 11$.

Do $0 < x + y \leq 18$ nên $x + y = 11$.

Khi đó $\overline{xxyy} = 11(100x + y) = 11(99x + x + y) = 11(99x + 11) = 121(9x + 1)$.

Suy ra $9x + 1$ là một số chính phương.

Thử trực tiếp ta được $x = 7$; $y = 4$.

Vậy số cần tìm là $7744 = 88^2$.

78.

- Với $n \geq 5$ thì $(n!)^4 = (1.2.3.4.5\ldots)^4$ có tận cùng là 0 nên $(n!)^4 + 7$ có tận cùng là 7, không thể là số chính phương.
- Với $n = 0$ thì $(0!)^4 + 7 = 8$, không phải là số chính phương.
- Với $n = 1$ thì $(1!)^4 + 7 = 8$, không phải là số chính phương.

• Với n = 2 thì $(2!)^4 + 7 = 23$, không phải là số chính phương.

• Với n = 3 thì $(3!)^4 + 7$ có tận cùng là 3, không phải là số chính phương.

• Với n = 4 thì $(4!)^4 + 7$ có tận cùng là 3, không phải là số chính phương.

Tóm lại, với mọi giá trị của n thì $(n!)^4 + 7$ đều không là số chính phương.

79. Xét dãy số $7, 7^2, 7^3, \ldots, 7^{1001}$ (1).

Dãy này có 1001 số. Đem chia mỗi số cho 1000 thì được nhiều nhất là 1000 số dư khác nhau nên ít nhất cũng tồn tại hai số có cùng số dư. Gọi hai số đó là 7^m và 7^n $(1 \le n < m \le 1000)$.

Vậy $7^m - 7^n \,\vdots\, 1000$ hay $7^m(7^{m-n} - 1) \,\vdots\, 1000$.

Mặt khác $(7^n ; 1000) = 1$ nên $7^{m-n} - 1 \,\vdots\, 1000$.

Do đó 7^{m-n} chia cho 1000 dư 1, nên nó tận cùng là 001.

Dễ thấy số 7^{m-n} là một số của dãy (1).

80. Khi chia một số cho 60 thì số dư có thể là 0, 1, 2, 3, …, 59.

Chia 60 số dư này thành 31 nhóm (31 lồng) : (1 ; 59), (2 ; 58), (3 ; 57), … (29 ; 31) ; (0) và (30). Xét phép chia 32 số đã cho cho 60 ta được 32 số dư (coi là 32 con thỏ). Có 32 số dư mà chỉ có 31 nhóm nên tồn tại hai số có số dư thuộc cùng một nhóm. Hai số dư này có hiệu chia hết cho 60 nếu chúng bằng nhau (hoặc thuộc nhóm (0) hoặc nhóm (30), có tổng chia hết cho 60 nếu chúng khác nhau.

HÌNH HỌC

Chuyên đề 10

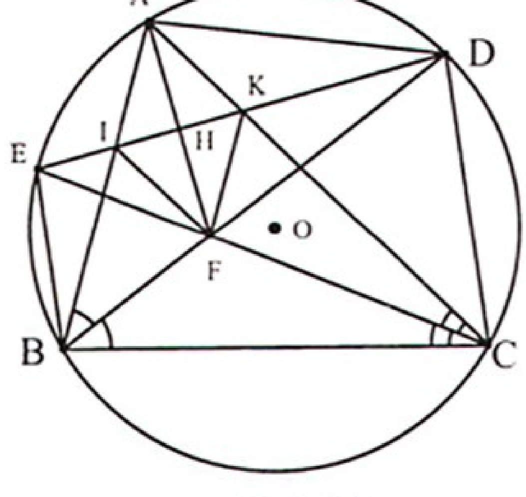
1. (h.31)

a) Ta có

$$\widehat{EBF} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{EA} + \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AD}$$

$$= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{EB} + \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{DC} = \widehat{EFB}$$

$\Rightarrow \Delta EBF$ cân tại E.



Hình 31

Ta có $\widehat{DFA} = \widehat{FAB} + \widehat{DBA}$

$= \widehat{FAC} + \widehat{DAC} = \widehat{DAF} \Rightarrow \Delta$ DAF cân tại D.

b) Do $\widehat{DKC} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{DC} + \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AE} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{DC} + \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BE} = \widehat{DFC}$

nên tứ giác DKFC nội tiếp. Suy ra $\widehat{CKF} = \widehat{CDF} = \widehat{CAB}$.

Vậy KF // AB.

c) Chứng minh tương tự, tứ giác BEIF nội tiếp và FI // AC.

Suy ra AIFK là hình bình hành hành, mà AF là đường phân giác $\widehat{IAK}$ nên AIFK là hình thoi.

d) Do tam giác EBF cân đỉnh E, tam giác DAF cân đỉnh D nên tứ giác AEFD là hình thoi thì điều kiện cần và đủ là AE = AD

e) $\Leftrightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AE} \Leftrightarrow \widehat{ACE} = \widehat{ABD} \Leftrightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$.

Hay tam giác ABC cân tại A.

Giả sử AEFD là hình thoi. Khi đó tam giác ABC cân tại A và AE // BF.

Gọi H là tâm đối xứng của hình thoi. Ta có:

$$S_{AEFD} = 3S_{AIFK} \Leftrightarrow S_{AEF} = 3S_{AIF} \Leftrightarrow EH = 3IH.$$

Khi đó I là trọng tâm của tam giác AEF nên AB đi qua trung điểm EF. Suy ra AEBF là hình bình hành (vì đã có AE // BF). Do đó EF đi qua trung điểm của AB. Suy ra tam giác ABC cân tại C. Vậy tam giác ABC đều.

2. (h.32) a) $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên

$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DC} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ mà $\widehat{ADB} = 90^0$

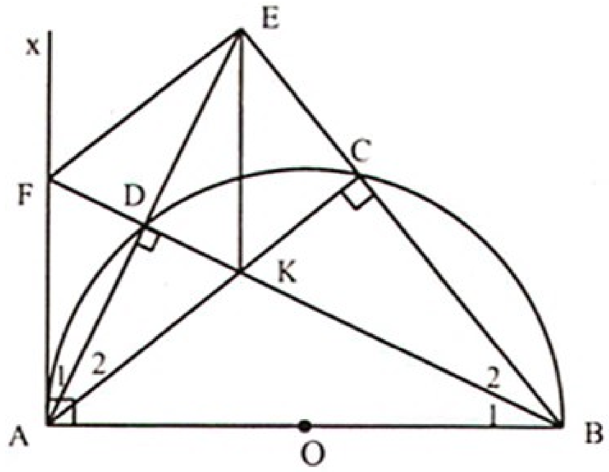
$\Rightarrow$ BD là đường phân giác, đồng thời là đường cao trong ΔAEB. Vậy ΔABE cân tại B.

b) AC, BD là đường cao trong tam giác ABE $\Rightarrow$ K là trực tâm $\Rightarrow$ EK $\perp$ AB.

ΔABE cân tại B có BD là đường cao

$\Rightarrow$ BD là đường trung tuyến

$\Rightarrow$ DA = DE.



Hình 32

ΔAKF cân tại A có AD là đường cao $\Rightarrow$ AD là đường trung tuyến $\Rightarrow$ DF = DK mà AE $\perp$ FK, từ đó suy ra AKEF là hình thoi.

c) Ta có $\sin\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{2}$.

ΔABC có BK là đường phân giác nên $\dfrac{KC}{AK} = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \dfrac{KC}{AK} = \dfrac{1}{2}$ hay AK = 2.KC.

3. (h.33) a) ΔIBN và ΔIMB có $\widehat{BIN}$ chung, $\widehat{IBN} = \widehat{IMB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

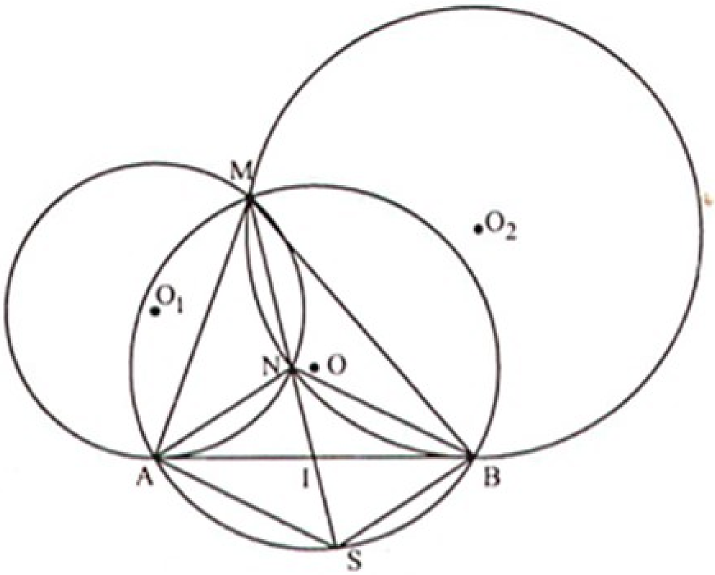
$\Rightarrow \Delta IBN \backsim \Delta IMB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{IN}{IB} = \dfrac{IB}{IM} \Rightarrow IB^2 = IN.IM$.

Tương tự, ta có $\Delta IAN \backsim \Delta IMA$ (g.g)

$\Rightarrow IA^2 = IN.IM$

$\Rightarrow IA^2 = IB^2 \Rightarrow IA = IB$



Hình 33

b) Ta có $\widehat{NAB} = \widehat{AMN}$, $\widehat{NBA} = \widehat{BMN}$

mà $\widehat{NAB} + \widehat{NBA} + \widehat{ANB} = 180^0 \Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{ANB} = 180^0$.

c) Xét (O) có $\widehat{AMS} = \widehat{ABS}$ (góc nội tiếp).

Xét (O_1) có $\widehat{AMS} = \widehat{NAB}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung), suy ra $\widehat{ABS} = \widehat{NAB}$. Mà AI = IB; $\widehat{AIN} = \widehat{BIS} \Rightarrow \Delta AIN = \Delta BIS$ (c.g.c)

$\Rightarrow IN = IS \Rightarrow$ ANBS là hình bình hành.

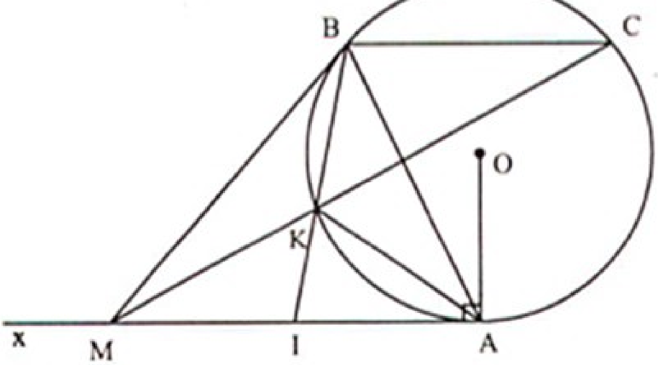
4. (h.34) a) $\Delta IAB \backsim \Delta IKA$ (g.g)

$\Rightarrow IA^2 = IK.IB$.

b) Ta có $IA = IM \Rightarrow IM^2 = IK.IB$

$\Rightarrow \dfrac{IM}{IK} = \dfrac{IB}{IM}$ mà $\widehat{MIB}$ chung

nên $\Delta IMK \backsim \Delta IBM$ (c.g.c).



Hình 34

c) $\Delta IMK \backsim \Delta IBM \Rightarrow \widehat{IMK} = \widehat{IBM}$

mà $\widehat{IBM} = \widehat{BCK}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \widehat{IMK} = \widehat{BCK} \Rightarrow AM \parallel BC$.

d) $AK \perp MB \Leftrightarrow \widehat{KAB} + \widehat{MBA} = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{KBM} + \widehat{MBA} = 90^0$

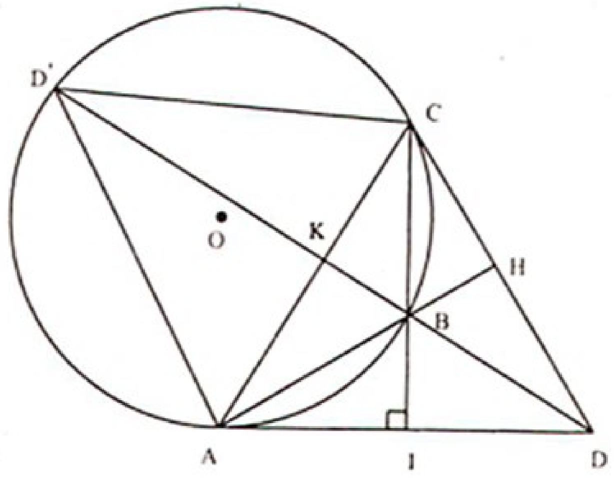
$\Leftrightarrow \widehat{KMA} + \widehat{MAB} = 90^0 \Leftrightarrow MK \perp AB \Leftrightarrow BI \perp AM \Leftrightarrow BA = BM$

$\Leftrightarrow \Delta ABM$ đều $\Leftrightarrow AM = R\sqrt{3}$.

5. (h.35) a) ΔIAB đồng dạng ΔICA (g.g)

$\Rightarrow IA^2 = IB.IC \Rightarrow I\,B.IC = \dfrac{a^2}{4}$ không đổi.

b) Tia DB cắt AC tại K. Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$ mặt khác $\widehat{ACI} = \widehat{BAD}$ nên $\widehat{ACI} = \widehat{BDA}$.



Hình 35

Ta có $\widehat{ACI} + \widehat{CAI} = 90^0$

nên $\widehat{BDA} + \widehat{CAI} = 90^0 \Rightarrow DK \perp AC$

từ đó suy ra B là trực tâm ΔABC.

ΔABC có BK, AI là đường cao cắt nhau tại D $\Rightarrow$ D là trực tâm của ΔABC.

Vậy khi đường tròn (O) thay đổi thì trực tâm của ΔABC là điểm D cố định.

c) Gọi H là giao điểm của tia AB và CD.

D' đối xứng với D qua AC nên $\Delta ADC = \Delta AD'C$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AD'C} = \widehat{ADC}$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{IBH}$ và $\widehat{IBH} + \widehat{ADC} = 180^0$

nên $\widehat{AD'C} + \widehat{ABC} = 180^0 \Rightarrow$ ABCD' là tứ giác nội tiếp.

d) $\cos\widehat{CAI} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{CAI} = 60^0 \Rightarrow \Delta CAD$ đều. Do $\Delta ADC = \Delta AD'C$ nên $\Delta AD'C$ đều

$\Rightarrow AD = CD = CD' = AD' \Rightarrow$ADCD' là hình thoi.

6. (h.36) a) Ta có $\widehat{ABO} = 90^0, \widehat{ACO} = 90^0, \widehat{AHO} = 90^0 \Rightarrow$ A, H, B, O, C cùng thuộc đường tròn đường kính AO $\Rightarrow \widehat{BHA} = \widehat{BOA}, \widehat{CHA} = \widehat{COA}$ mặt khác AB, AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{BOA} = \widehat{COA} \Rightarrow \widehat{BHA} = \widehat{CHA} \Rightarrow$ HA là tia phân giác của $\widehat{BHC}$.

b) Gọi giao điểm của BC và AO là I, ta có :

- $\Delta AIK \backsim \Delta AHO$ (g.g) $\Rightarrow AI.AO = AK.AH$. (1)
- $\Delta ABD \backsim \Delta AEB$ (g.g) $\Rightarrow AD.AE = AB^2 = AC^2$. (2)

- $\Delta AIC \backsim \Delta ACO$ (g.g) $\Rightarrow AI.AO = AC^2$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra AK.AH = AD.AE.

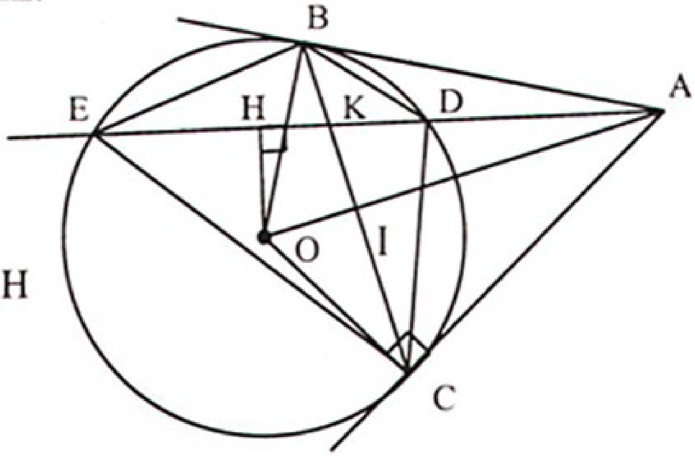
c) Từ AK.AH = AD.AE

$\Rightarrow \dfrac{2}{AK} = \dfrac{2AH}{AD.AE}$.

Mặt khác ta có

$AD + AE = AH - DH + AH + HE = 2AH$

nên $\dfrac{2}{AK} = \dfrac{AD + AE}{AD.AE} = \dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{AE}$.



Hình 36

d) $\Delta ABD \backsim \Delta AEB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{EB}$. (4)

$\Delta ACD \backsim \Delta AEC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{CD}{EC}$. (5)

Từ (4), (5) và lưu ý AB = AC, ta có $\dfrac{BD}{EB} = \dfrac{CD}{EC} \Rightarrow BD.EC = CD.BE$.

e) $\Delta ABD \backsim \Delta AEB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{BD}{EB}$. (6)

$\Delta ACD \backsim \Delta AEC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{CD}{EC}$. (7)

Nhân vế với vế của (6), (7) và lưu ý AB = AC, ta có : $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{BD}{EB} \cdot \dfrac{CD}{EC}$. (8)

Lại có $\Delta BKD \backsim \Delta EKC$ (g.g), $\Delta BKE \backsim \Delta DKC$ (g.g), ta có :

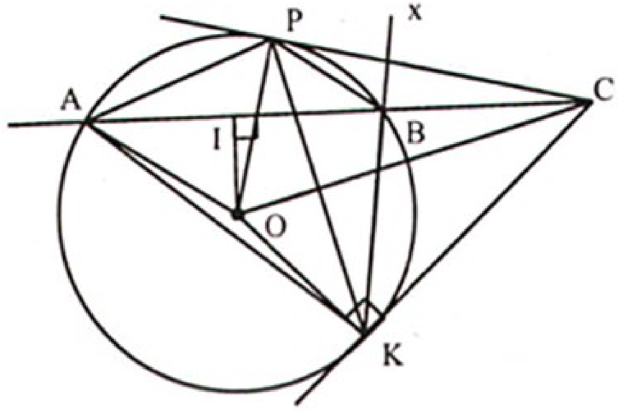
$$\frac{BK}{EK} = \frac{BD}{EC}, \quad \frac{BK}{DK} = \frac{BE}{DC}.$$

Chia từng vế của hai kết quả trên ta được $\dfrac{DK}{EK} = \dfrac{BD}{EC} \cdot \dfrac{CD}{BE}$. (9)

Từ (8) và (9) ta có : $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{DK}{EK} \Rightarrow 1 - \dfrac{DE}{AE} = \dfrac{DE}{EK} - 1$

$\Rightarrow 2 = \dfrac{DE}{EK} + \dfrac{DE}{AE} \Rightarrow \dfrac{1}{AE} + \dfrac{1}{KE} = \dfrac{2}{DE}$.

Chuyên đề 11



Hình 37

7. (h.37) a) $\widehat{CPO} = \widehat{CKO} = 90^0$ (vì CP, CK là tiếp tuyến)

$\Rightarrow$ CPOK là tứ giác nội tiếp. (1)

b) IA = IB $\Rightarrow$ OI $\perp$ AB

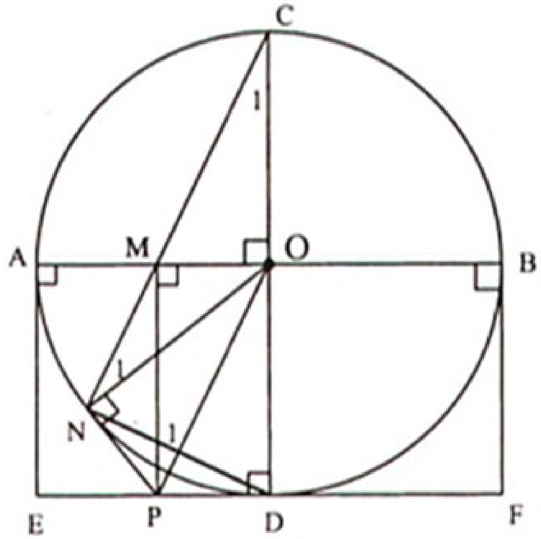
$\Rightarrow \widehat{OIC} = \widehat{OPC} = 90^0$

$\Rightarrow$ CPIO là tứ giác nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) suy ra C, P, I, O, K cùng nằm trên một đường tròn đường kính CO.

c) AP // CK $\Rightarrow \widehat{APK} = \widehat{PKC}$ (so le trong) mà $\widehat{PAK} = \widehat{PKC}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung) $\Rightarrow \widehat{APK} = \widehat{PAK}$,

mà $\widehat{PAK} = \widehat{PBx}; \widehat{APK} = \widehat{ABK} = \widehat{CBx} \Rightarrow \widehat{PBx} = \widehat{CBx} \Rightarrow$ điều phải chứng minh.



Hình 38

8. (h.38) a) Ta có $\widehat{OMP} = \widehat{ONP} = 90^0$

$\Rightarrow$ tứ giác OMNP nội tiếp.

b) OMNP là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{P_1} = \widehat{N_1}$.

ΔONC cân (OC = ON) $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{N_1}$

$\Rightarrow \widehat{P_1} = \widehat{C_1}$.

ΔOMC và ΔMOP có $\widehat{COM} = \widehat{PMO} = 90^0$, OM chung, $\widehat{P_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow \Delta OMC = \Delta MOP$

$\Rightarrow$ MP = OC $\Rightarrow$ MP = OD.

Tứ giác MODP có MP // OD, MP = OD, $\widehat{MOD} = 90^0$

$\Rightarrow$ MODP là hình chữ nhật $\Rightarrow$ MODP là tứ giác nội tiếp.

Mà MOPN là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ O, M, N, P, D cùng nằm trên một đường tròn.

c) Ta có $\widehat{COM} = \widehat{CND} = 90^0 \Rightarrow \Delta COM \backsim \Delta CND$ (g.g)

$\Rightarrow CM.CN = CO.CD = 2R^2$.

Vậy tích $CM.CN = 2R^2$ không phụ thuộc vị trí M.

d) MODP là hình chữ nhật suy ra PD // AB nên P thuộc đường thẳng đi qua D và song song với AB.

Mà M chỉ chạy trong đoạn AB nên P chỉ chạy trong đoạn EF.

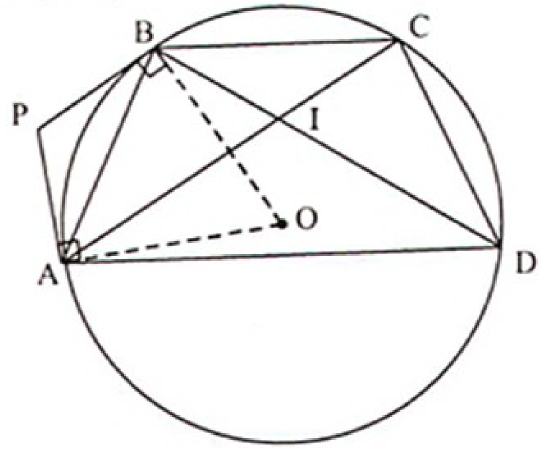
9. (h.39) Ta có PA, PB là tiếp tuyến nên $\widehat{PAO} = \widehat{PBO} = 90^0$,

do đó AOBP nội tiếp. (1)

Mặt khác, BC // AD nên sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\overset{\frown}{CD}$

$$\Rightarrow \widehat{AIB} = \frac{sđ\overset{\frown}{AB} + sđ\overset{\frown}{CD}}{2} = sđ\,\overset{\frown}{AB}.$$

Hay $\widehat{AIB} = \widehat{AOB} \Rightarrow$ I và O là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn AB dưới một góc bằng nhau. Do đó AOIB là tứ giác nội tiếp. (2)



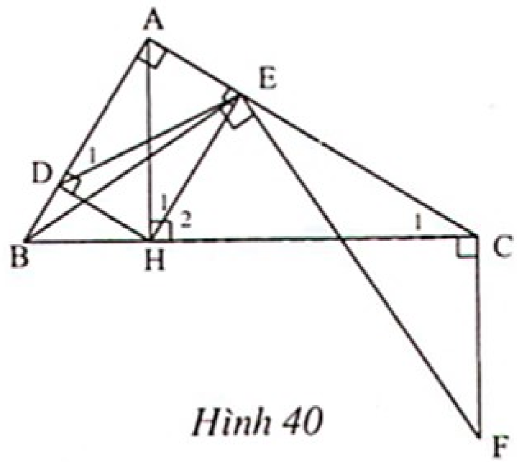
Hình 39

Từ (1) và (2) suy ra A, O, I, B, P cùng nằm trên một đường tròn.

10. (h.40) Ta có ADHE là hình chữ nhật nên $\widehat{D_1} = \widehat{H_1}$, mặt khác $\widehat{H_1} = \widehat{C_1}$ (cùng phụ với $\widehat{H_2}$) $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C_1}$ mà $\widehat{D_1} + \widehat{BDE} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{BDE} = 180^0$, do đó BCED là tứ giác nội tiếp. (1)

Ta có $\widehat{BEF} = 90^0$; $\widehat{BCF} = 90^0$ nên BECF là tứ giác nội tiếp. (2)



Hình 40

Từ (1)và (2) suy ra năm điểm B, D, E, C, F cùng nằm trên một đường tròn.

11. (h.41) a) Áp dụng định lí góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, ta có:

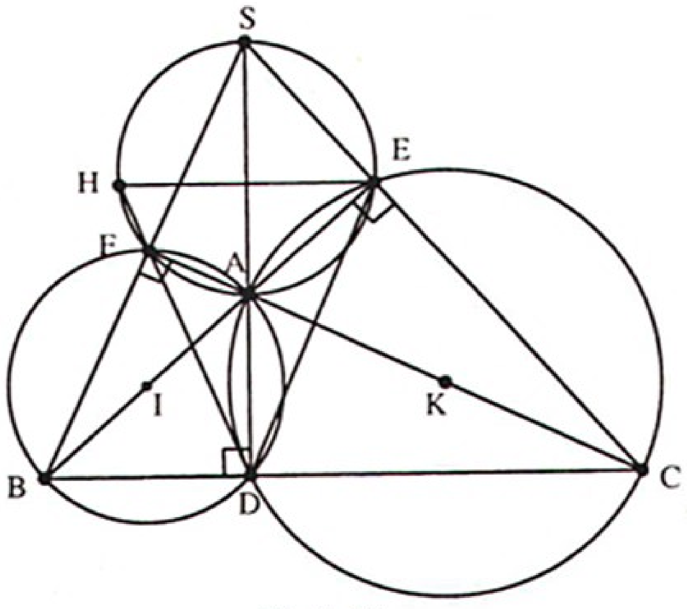
$\widehat{ADB} = 90^0; \widehat{ADC} = 90^0$.

Suy ra $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^0$.

Vậy B, D, C thẳng hàng.

b) Áp dụng định lí góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, ta có:

$\widehat{BFA} = 90^0; \widehat{CEA} = 90^0$;



Hình 41

suy ra $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} \left(= 90^0\right)$. Khi đó E ; F là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn BC dưới một góc bằng nhau.

Vậy tứ giác BFEC nội tiếp.

c) Xét tam giác ABC có $AD \perp BC$; $BF \perp AC$; $CE \perp AB$. Suy ra AD, BF, CE là ba đường cao. Vậy chúng cắt nhau tại một điểm S.

d) Ta có AEHF nội tiếp nên $\widehat{EHF} = \widehat{FAB}$ mặt khác $\widehat{FAB} = \widehat{FDB} \Rightarrow \widehat{EHF} = \widehat{FDB}$

$\Rightarrow HE // BC \Rightarrow AD \perp HE$. (1)

Vận dụng góc nội tiếp , tứ giác nội tiếp ta có: $\widehat{FDA} = \widehat{FBA} = \widehat{FCE} = \widehat{ADE}$

$\Rightarrow$ DA là đường phân giác $\widehat{EDF}$. (2)

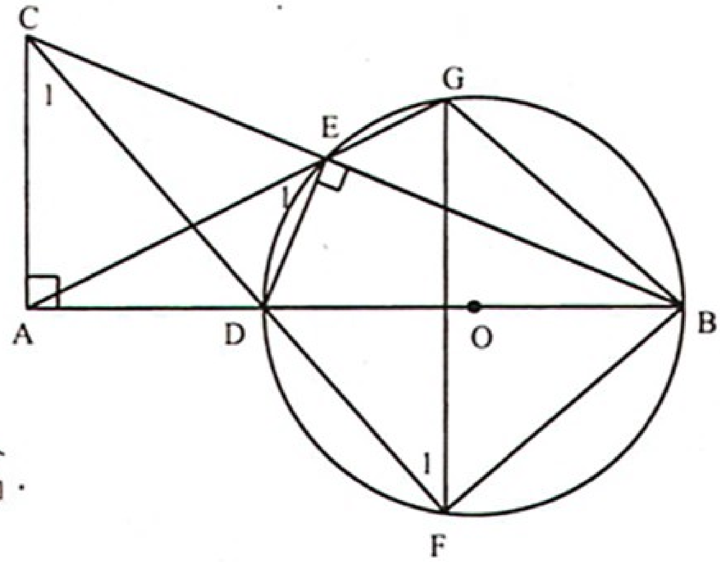
Từ (1) và (2) suy ra DEH cân tại D suy ra DE = DH.

12. (h.42) a) $\widehat{CAD} = 90^0$, $\widehat{CED} = 90^0$

$\Rightarrow$ tứ giác ADEC nội tiếp.

$\widehat{CAB} = 90^0$, $\widehat{CFB} = 90^0$

$\Rightarrow$ tứ giác AFBC nội tiếp.



Hình 42

b) Ta có $\Delta AED \backsim \Delta ABG$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AD}{AG} \Rightarrow AD.AB = AE.AG$.

c) Tứ giác ACED nội tiếp $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{E_1}$.

Tứ giác DFGE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{E_1}$.

Suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{F_1} \Rightarrow AC // GF$.

d) ΔBCD có CA, BF, DE là đường cao $\Rightarrow$ CA, BF, DE đồng quy.

Chuyên đề 12

13. (h.43) a) DC là tiếp tuyến của (O; R) $\Rightarrow \widehat{DCO} = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến).

Mặt khác $DH \perp AO$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{DHO} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{DCO} + \widehat{DHO} = 180^0$, mà hai góc ở vị trí đối diện, suy ra tứ giác DHOC nội tiếp đường tròn đường kính DO.

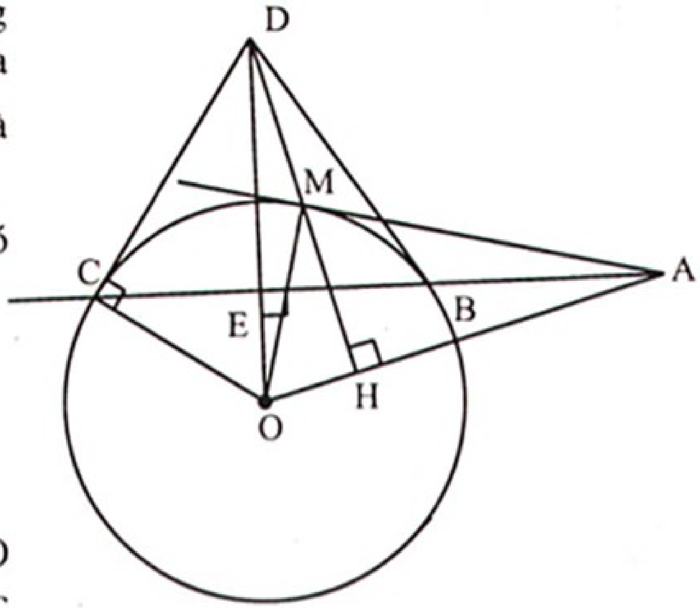
b) Vì DB, DC là tiếp tuyến của đường tròn (O; R) nên DB = DC và DE là tia phân giác góc $\widehat{BDC}$ nên DE cũng là đường cao trong $\Delta DBC \Rightarrow DE \perp BC$.

Hai tam giác vuông HDO và EAO có chung góc nhọn $\widehat{DOA}$

nên $\Delta HDO \backsim \Delta EAO$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{HO}{EO} = \dfrac{OD}{OA} \Rightarrow OH.OA = OE.OD.$

c) ΔCOD vuông tại C có $CE \perp DO$ nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông:



Hình 43

$OE.OD = OC^2 = R^2$ mà $OE.OD = OH.OA$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow OH.OA = OC^2 \Rightarrow OH.OA = OM^2 \Rightarrow \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{OM}{OA}$ và $\widehat{MOA}$ chung

nên $\Delta OHM \backsim \Delta OMA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{OHM}$ mà $\widehat{OHM} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OMA} = 90^0$

$\Rightarrow$ AM vuông góc với bán kính OM tại M. Vậy AM là tiếp tuyến của đường tròn(O; R).

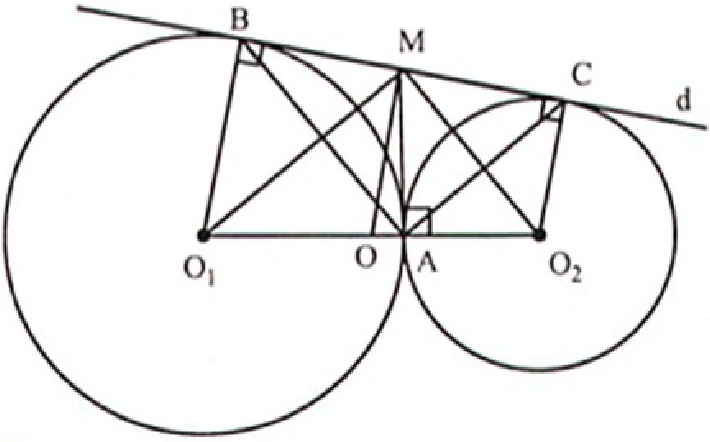
14. (h.44) a) (O_1); (O_2) tiếp xúc ngoài tại A $\Rightarrow O_1$, A, O_2 thẳng hàng mà BC là tiếp tuyến chung

$\Rightarrow \quad O_1B \perp BC, O_2C \perp BC$

$\Rightarrow O_1B \,//\, O_2C$

$\Rightarrow \widehat{BO_1A} + \widehat{CO_2A} = 180^0.$

Ta có $\widehat{CBA} = \dfrac{1}{2}\widehat{BO_1A}$; $\widehat{BCA} = \dfrac{1}{2}\widehat{CO_2A}$



Hình 44

$\Rightarrow \widehat{CBA} + \widehat{BCA} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BO_1A} + \widehat{CO_2A}\right) = 90^0$ hay ΔABC vuông tại A.

b) ΔABC vuông tại A có MB = MC nên MA = MB.

Xét ΔO_1BM và ΔO_1AM có MA = MB, MO_1 chung, $O_1A = O_1B$

nên $\Delta O_1BM = \Delta O_1AM$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{O_1BM} = \widehat{O_1AM} \Rightarrow \widehat{O_1AM} = 90^0$ mà O_1A là bán kính $\Rightarrow$ MA là tiếp tuyến của đường tròn (O_1).

Tương tự ta có $\widehat{O_2AM} = 90^0$ mà O_2A là bán kính $\Rightarrow$ MA cũng là tiếp tuyến của đường tròn (O_2).

c) MA, MB là tiếp tuyến của $(O_1) \Rightarrow MO_1$ là tia phân giác của $\widehat{BMA}$.

MA, MC là tiếp tuyến của $(O_2) \Rightarrow MO_2$ là tia phân giác của $\widehat{CMA}$.

Mà $\widehat{BMA}$ và $\widehat{CMA}$ là hai góc kề bù $\Rightarrow MO_1 \perp MO_2$ hay góc O_1MO_2 vuông.

d) Gọi O là trung điểm của $O_1O_2 \Rightarrow OO_1 = OO_2 = OM$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔO_1O_2M. (1)

Mặt khác O_1O_2CB là hình thang (O_1B // O_2C) có $OO_1 = OO_2$; MB = MC $\Rightarrow$ OM là đường trung bình $\Rightarrow$ OM // $O_1B \Rightarrow OM \perp BC$. (2)

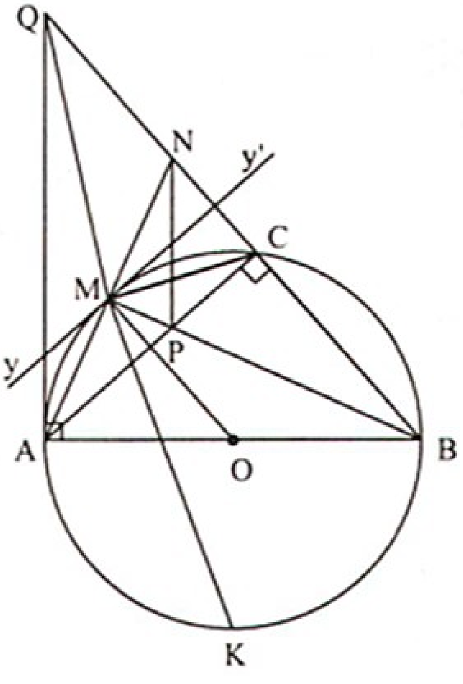
Từ (1) và (2) suy ra BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMO_1O_2.

15. (h.45) a) Tam giác ABN có đường cao BM đồng thời là đường phân giác nên tam giác ABN cân tại B.

b) Vì P là trực tâm của tam giác ABN nên $NP \perp AB \Rightarrow$ NP // AQ, do đó APNQ là hình thang.

c) Nếu Q, M, K thẳng hàng thì từ tính chất góc có đỉnh bên ngoài đường tròn, ta có QM là đường phân giác của góc AQB. Mặt khác, BM là phân giác của góc ABQ nên AM là phân giác của góc BAQ, vô lí. Vậy ba điểm Q, M, K không thẳng hàng.

d) Tại điểm M, kẻ tiếp tuyến yMy' với (O) sao cho My và MA cùng phía với đường thẳng MQ. Ta có đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tiếp xúc với (O) khi và chỉ khi yMy' tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tại M. Điều đó tương đương với



Hình 45

$$\widehat{NQM} = \widehat{NMy'} \Leftrightarrow \widehat{NQM} = \widehat{AMy} \Leftrightarrow \widehat{NQM} = \widehat{ABM} \Leftrightarrow \widehat{NQM} = \widehat{MBC}$$

$$\Leftrightarrow MB = MQ \Leftrightarrow BC = NQ \text{ (vì } \Delta MNC \text{ cân).}$$

Mà $AB^2 = BC.BQ \Leftrightarrow AB^2 = BC.(BN + NQ) \Leftrightarrow 4R^2 = BC.(2R + BC)$

$\Leftrightarrow BC = R(\sqrt{5} - 1)$.

Vậy với $BC = R(\sqrt{5} - 1)$ thì đường tròn ngoại tiếp ΔMNQ tiếp xúc với đường tròn (O).

16. (h.46) a) Ta có $\widehat{BOO'} = \widehat{BCA}\ (= \frac{1}{2}\widehat{BOA})$; $\widehat{BO'O} = \widehat{BDA}\ (= \frac{1}{2}\widehat{BO'A})$

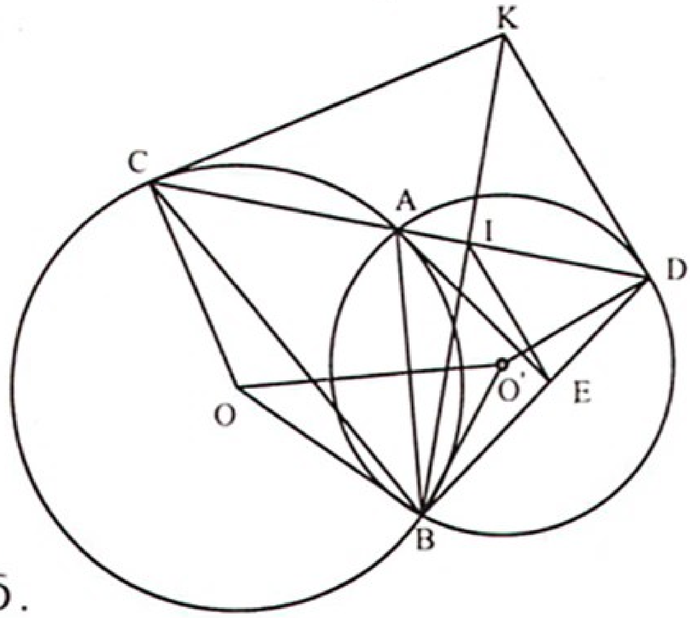
$\Rightarrow \Delta BOO' \backsim \Delta BCD$ (g.g).

b) Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ACK}; \widehat{ABD} = \widehat{ADK}$

mà $\widehat{ACK} + \widehat{ADK} + \widehat{CKD} = 180^0$

$\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

c) Vì IE // KD nên $\widehat{DIE} = \widehat{KDA}$ mà $\widehat{ABD} = \widehat{ADK} \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{EID}$ suy ra tứ giác BAIE nội tiếp, do đó $\widehat{BAE} = \widehat{BIE}$.



Hình 46

Tứ giác BCKD nội tiếp nên $\widehat{BCD} = \widehat{BKD}$.

Mặt khác $\widehat{BIE} = \widehat{BKD}$ do đó $\widehat{BAE} = \widehat{BCA}$.

Từ đó suy ra AE là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

17. (h.47) a) Xét ΔABD có $BC \perp DA$, CA = CD nên BC vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến, do đó ΔABD cân tại B.

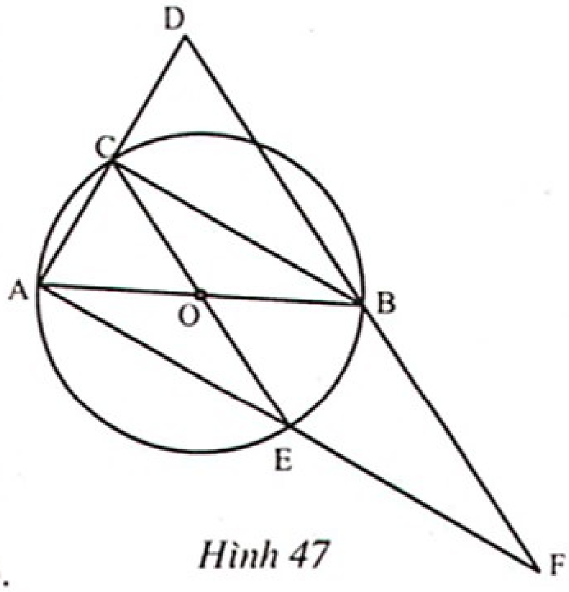
b) $\widehat{CAE} = 90^0$ nên CE là đường kính của đường tròn (O) $\Rightarrow$ C, O, E thẳng hàng.

Ta có CO là đường trung bình của ΔABD

$\Rightarrow$ CO // BD $\Rightarrow$ CE // BD.

Tương tự, OE là đường trung bình của $\Delta ABF \Rightarrow$ OE // BF $\Rightarrow$ CE // BF.

Suy ra B, D, F thẳng hàng (theo tiên đề Ơclít).



Hình 47

c) Theo tính chất đường trung bình của ΔABD ; ΔABF ta có $OC = \frac{1}{2}BD; OE = \frac{1}{2}BF$

mà $OC = OE \Rightarrow BD = BF = AB$

$\Rightarrow$ B là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ADF \Rightarrow$ BA là bán kính.

Mà OB = AB – OA nên đường tròn ngoại tiếp ΔADF tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A.

18. (h.48) a) Ta có $\widehat{AOM} + \widehat{BON} = 90^0$;

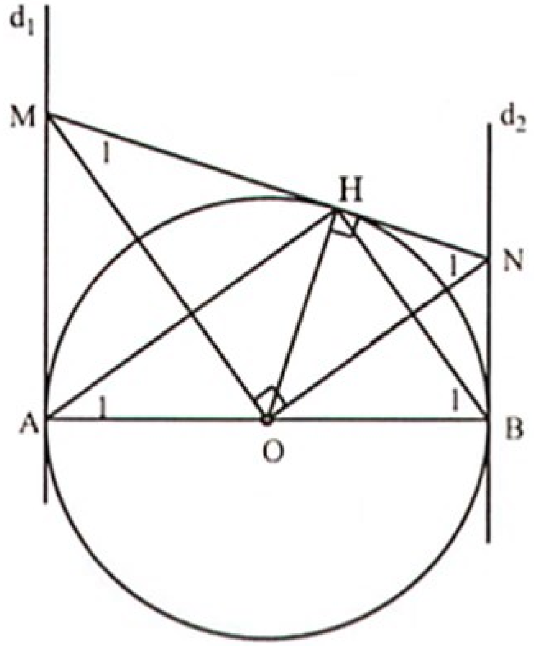
$\widehat{ONB} + \widehat{BON} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{ONB}$.

Mà $\widehat{MAO} = \widehat{OBN} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta AOM \backsim \Delta BNO$(g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AO}{BN} = \dfrac{AM}{BO} \Rightarrow AM.BN = AO.BO = \dfrac{AB^2}{4}$.

b) Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng MN thì ta có các tứ giác OAMH; OBNH nội tiếp được $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{M_1}; \widehat{B_1} = \widehat{N_1}$ mà $\widehat{M_1} + \widehat{N_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 90^0$



Hình 48

$\Rightarrow \widehat{AHB} = 90^0 \Rightarrow$ H thuộc đường tròn đường kính AB, mà OH $\perp$ MN $\Rightarrow$ MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Chuyên đề 13

19. (h.49) a) $\Delta OIC \backsim \Delta OBA$ (g.g)

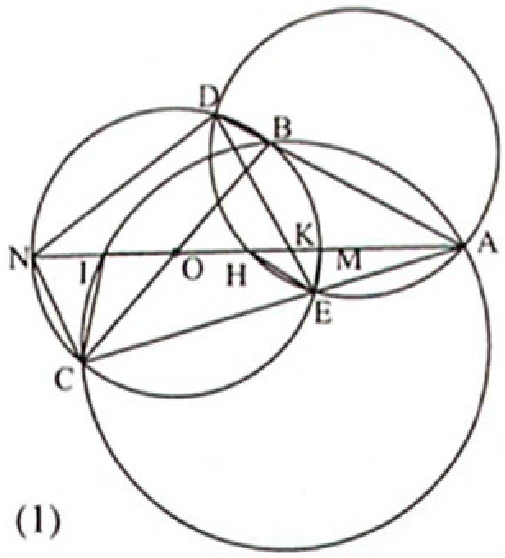
$\Rightarrow \dfrac{OI}{OB} = \dfrac{OC}{OA} \Rightarrow OB.OC = OI.OA$.

Xét các góc nội tiếp, ta có

$\widehat{ICB} = \widehat{IAB}, \widehat{BCE} = \widehat{EDB}$

$\Rightarrow \widehat{ICB} + \widehat{BCE} = \widehat{IAB} + \widehat{EDB} \Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{EKA}$

$\Rightarrow \Delta AKE \backsim \Delta ACI$ (g.g) $\Rightarrow AK.AI = AE.AC$. (1)



b) Từ $OB.OC = OI.OA \Rightarrow R.R = OI.2R \Rightarrow OI = \dfrac{1}{2}.R$.

Hình 49

Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng AO với đường tròn (O) (M nằm giữa A và N)

$\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{ACN} \Rightarrow \Delta AME \backsim \Delta ACN$ (g.g) $\Rightarrow AM.AN = AE.AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AK.AI = AM.AN \Rightarrow AK.\frac{5R}{2} = R.3R \Rightarrow AK = \frac{6R}{5}$.

c) Gọi H là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp ΔADE với AO. Ta có:

$\Delta KHE \backsim \Delta KDA$ (g.g) $\Rightarrow KH.KA = KD.KE$

$\Delta KDN \backsim \Delta KME$ (g.g) $\Rightarrow KN.KM = KD.KE$

$\Rightarrow KH.KA = KM.KN \Rightarrow KH.\frac{6R}{5} = \left(\frac{6R}{5} - R\right).\left(3R - \frac{6R}{5}\right)$

$\Rightarrow KH = \frac{3R}{10} \Rightarrow$ H cố định $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

20. (h.50) a) Tứ giác SEHF nội tiếp vì H và E cùng nhìn FS dưới một góc vuông.

b) Ta có $\Delta OHS \backsim \Delta OEF$(g.g) suy ra $OH.OF = OE.OS$.

Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AOS ta có $OE.OS = OA^2$

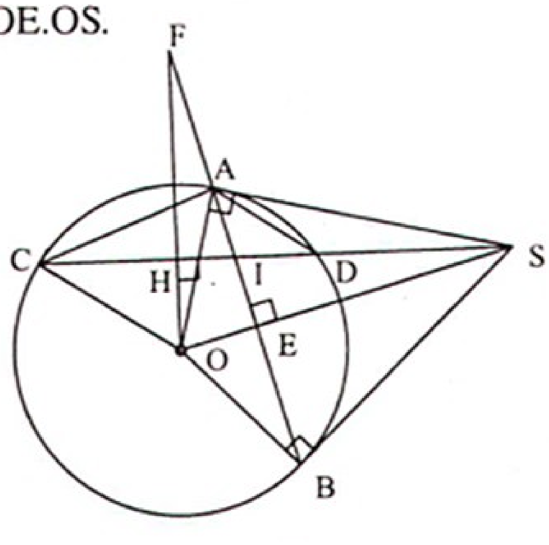
nên $OH.OF = OA^2 = R^2$.

c) Chứng minh các cặp tam giác đồng dạng:

- $\Delta SAD \backsim \Delta SCA$ (g.g) $\Rightarrow SA^2 = SC.SD$
- $\Delta SAE \backsim \Delta SOA$ (g.g) $\Rightarrow SA^2 = SE.SO$
- $\Delta SEI \backsim \Delta SHO$ (g.g) $\Rightarrow SI.SH = SE.SO$

Từ đó suy ra $SI.SH = SC.SD$.

d) Từ đề bài O, C, D cố định nên H cố định.



Hình 50

Từ câu b) suy ra $OF = \frac{R^2}{OH}$ không đổi. Vậy đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định là F.

21. (h.51) a) $\widehat{ACD} = 90^0; \widehat{AMD} = 90^0 \Rightarrow$ A, C, M, D cùng thuộc đường tròn đường kính AD.

b) MN là tiếp tuyến $\Rightarrow \widehat{NMK} = \widehat{ABM}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây).

Ta lại có: $\widehat{K_2} = \widehat{B_1}$ (cùng phụ $\widehat{A_1}$) $\Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{B_1} \Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{NMK}$

$\Rightarrow \Delta MNK$ cân tại N.

c) Ta có Δ COI vuông tại C

$$\Rightarrow IC^2 + CO^2 = OI^2 \Rightarrow IC^2 = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow IC = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CK = \frac{R\sqrt{3}}{4}.$$

Ta có Δ CAK $\backsim$ Δ CDB

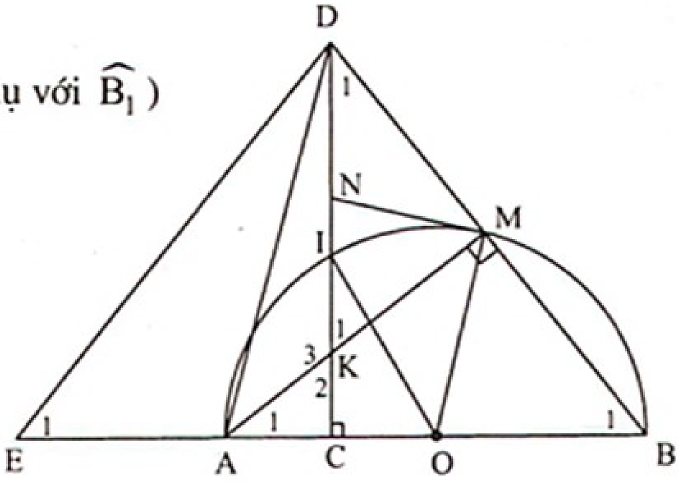
vì $\widehat{ACD} = \widehat{BCD} = 90^0; \widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ (cùng phụ với $\widehat{B_1}$)

$$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{CK}{CB} \Rightarrow CD.CK = CA.CB$$

$$\Rightarrow CD.\frac{R\sqrt{3}}{4} = \frac{R}{2}.\frac{3R}{2} \Rightarrow CD = R\sqrt{3}.$$

Do đó diện tích ΔABD là

$$S = \frac{1}{2}AB.CD = \frac{1}{2}.2R.R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}.$$



Hình 51

d) Gọi E là điểm đối xứng với B qua C

suy ra E cố định và Δ BDE cân tại D $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{B_1}$ mà $\widehat{B_1} = \widehat{K_2} \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{K_2}$.

Mặt khác $\widehat{K_2} + \widehat{K_3} = 180^0 \Rightarrow \widehat{E_1} + \widehat{K_3} = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác AKDE nội tiếp hay đường tròn ngoại tiếp Δ AKD luôn đi qua điểm E cố định.

22. (h.52) Gọi giao điểm của đường thẳng OA với đường tròn (O) là I, K $\Rightarrow$ I, K cố định.

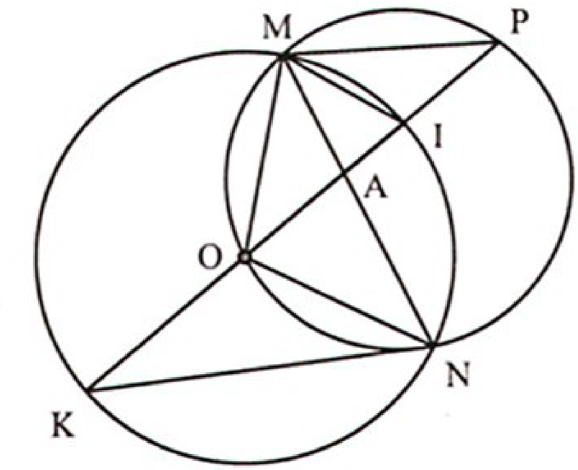
Gọi giao điểm của đường thẳng OA với đường tròn ngoại tiếp ΔOMN là P.

Từ $\Delta AMI \backsim \Delta AKN$ (g.g) suy ra

AM.AN = AK.AI. (1)

$\Delta AON \backsim \Delta AMP$ (g.g) suy ra

AO.AP = AM.AN. (2)



Hình 52

Từ (1) và (2) ta có: AO.AP = AI.AK hay $AP = \frac{AI.AK}{AO}$ mà AI, AK, AO cố định

$\Rightarrow$ AP không đổi $\Rightarrow$ P là điểm cố định.

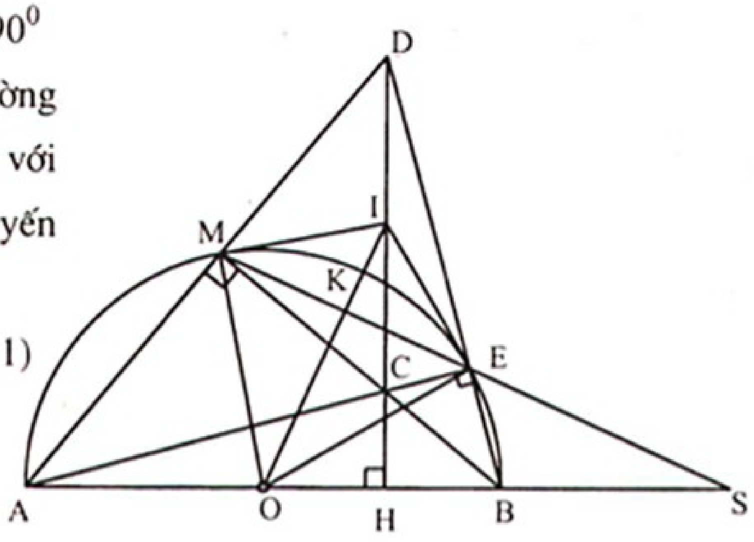
23. (h.53) a) Xét ΔABD có BM $\perp$ AD; DH $\perp$ AB $\Rightarrow$ C là trực tâm $\Rightarrow$ AC $\perp$ DB mà AE $\perp$ BE (vì $\widehat{AEB} = 90^0$) $\Rightarrow$ B, E, D thẳng hàng.

Tứ giác AMCH có $\widehat{AMC} = \widehat{AHC} = 90^0$

$\Rightarrow$ AMCH nội tiếp đường tròn đường kính AC $\Rightarrow \widehat{MAH} = \widehat{MCI}$ (cùng bù với $\widehat{ABM}$) mà MI là tiếp tuyến

$\Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{MAH} \Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{MCI}$

$\Rightarrow \Delta MCI$ cân tại I $\Rightarrow$ IM = IC. (1)



Hình 53

Ta có $\widehat{MDI} + \widehat{DCM} = 90^0$;

$\widehat{DMI} + \widehat{IMC} = 90^0$

mà $\widehat{DCM} = \widehat{IMC} \Rightarrow \widehat{DMI} = \widehat{MDI}$

$\Rightarrow \Delta IMD$ cân tại I $\Rightarrow$ IM = ID. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ID = IC = IM.

ΔCDE vuông tại E có IC = ID $\Rightarrow$ IC = ID = IE.

Từ đó ta có IM = IE; OM = OE, OI là cạnh chung suy ra $\Delta OEI = \Delta OMI$ (c.c.c).

$\Rightarrow \widehat{OEI} = \widehat{OMI} \Rightarrow \widehat{OEI} = 90^0 \Rightarrow$ IE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) IM, IE là tiếp tuyến của O $\Rightarrow IO \perp ME$ tại K.

ΔOMI có $\widehat{OMI} = 90^0$; $MK \perp OI$ nên $OM^2 = OK.OI \Rightarrow OK.OI = R^2$ không đổi.

Gọi S là giao điểm của ME và AB. Xét ΔOKS và ΔOHI có $\widehat{OHI} = \widehat{OKS} = 90^0$; $\widehat{IOS}$ chung $\Rightarrow \Delta OKS \backsim \Delta OHI$ (g.g) $\Rightarrow$ OK.OI = OH.OS

$$\Rightarrow OH.OS = R^2 \Rightarrow OS = \frac{R^2}{OH}.$$

Mà OH cố định $\Rightarrow$ OS không đổi $\Rightarrow$ S cố định hay ME luôn đi qua điểm S cố định.

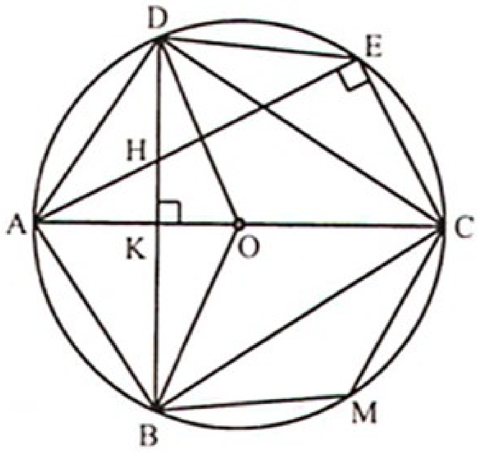
Chuyên đề 14

24. (h.54) a) Ta có $\widehat{HKC} = \widehat{HEC} = 90^0$ suy ra tứ giác CKHE nội tiếp đường tròn đường kính CH.

b) ΔOBD cân tại O có OK là đường cao nên OK cũng là đường phân giác nên $\widehat{DOA} = \widehat{BOA} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow \widehat{DEA} = \widehat{ADB}$, mặt khác $\widehat{DAE}$ chung nên

$\Delta ADH \backsim \Delta AED$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AH}{AD} \Rightarrow AD^2 = AH.AE$.



Hình 54

c) $BD = 12cm \Rightarrow KB = 6cm$

- Δ BKC vuông tại K $\Rightarrow BK^2 + KC^2 = BC^2$

$\Rightarrow 36 + KC^2 = 100 \Rightarrow KC^2 = 64 \Rightarrow KC = 8cm$.

Δ ABC vuông tại B có $BK \perp AC$

$\Rightarrow BC^2 = CK.AC \Rightarrow 100 = 8.AC$

$\Rightarrow AC = \dfrac{25}{2} \Rightarrow OC = \dfrac{25}{4}$.

- Vậy diện tích hình tròn là $S = \pi R^2 = \dfrac{625}{16}\pi$ (cm^2).

d) ΔBCD cân tại C $\Rightarrow \widehat{BDC} = \dfrac{180^0 - \widehat{BCD}}{2} = 90^0 - \dfrac{\alpha}{2}$.

Mặt khác, $M \in (O) \Leftrightarrow$ BDCM nội tiếp

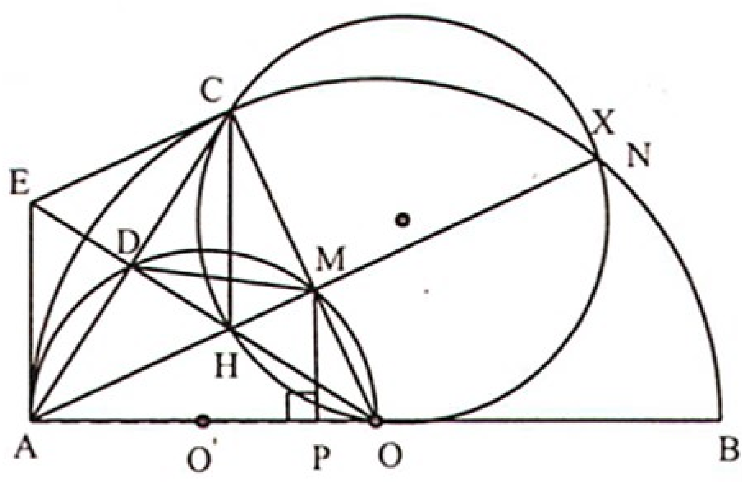
$\Leftrightarrow \widehat{BDC} + \widehat{BMC} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{BMC} = 180^0 - \widehat{BDC} \Leftrightarrow \widehat{BMC} = 90^0 + \dfrac{\alpha}{2}$.

Ta lại có ΔMBC cân tại M $\Rightarrow \widehat{MBC} = \dfrac{180^0 - \widehat{BMC}}{2} = 45^0 - \dfrac{\alpha}{4}$.

25. (h.55) a) Tam giác OAC cân và $OD \perp CA$ nên $\widehat{AOD} = \widehat{DOM}$. Suy ra AD = DM, do đó ΔADM cân tại D.

b) EA là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn đã cho.

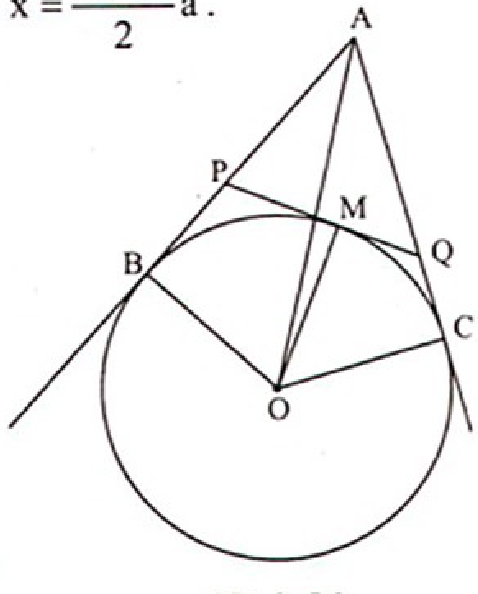
c) Giả sử AM cắt nửa đường tròn (O) tại X. Ta có H là trực tâm của ΔOAC, từ đây chứng minh tứ giác CHOX nội tiếp, suy ra $X \equiv N$.



Hình 55

d) Kẻ $MP \perp AO$. Giả sử ME // AB, suy ra ΔEMO cân tại M và AEMP là hình chữ nhật. Đặt $MO = ME = AP = x$ $(x > 0)$. Ta có:

$MO^2 = OP.OA = (OA - AP)OA \Rightarrow x^2 = (a-x)a \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$.



Hình 56

26. (h.56) a) Áp dụng tính chất của tiếp tuyến ta có:

AB = AC; PM = PB; QM = QC

Chu vi tam giác APQ là: AP + PQ + QA

= AP + PM + MQ + QA

= AP + PB + QC + AQ = AB + AC = 2AC.

Vậy khi M chuyển động trên cung nhỏ BC thì chu vi tam giác APQ bằng 2AC không đổi.

b) $\widehat{BAC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BAO} = 30^0$.

Ta có Δ OAB vuông tại B

$\Rightarrow AB = OB.\cot 30^0 = 6.\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ (cm).

Diện tích tứ giác ABOC là: $S_1 = 2.\frac{1}{2}OB.AB = 36\sqrt{3}$ (cm^2).

Ta có $\widehat{BAC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^0$.

Diện tích hình quạt của $\widehat{BMC}$ là: $S_2 = \frac{\pi R^2 n}{360^0} = \frac{\pi.6^2.120}{360} = 12\pi$ (cm^2).

Vậy diện tích phần mặt phẳng được giới hạn bởi hai tiếp tuyến AB, AC và cung nhỏ BC là:

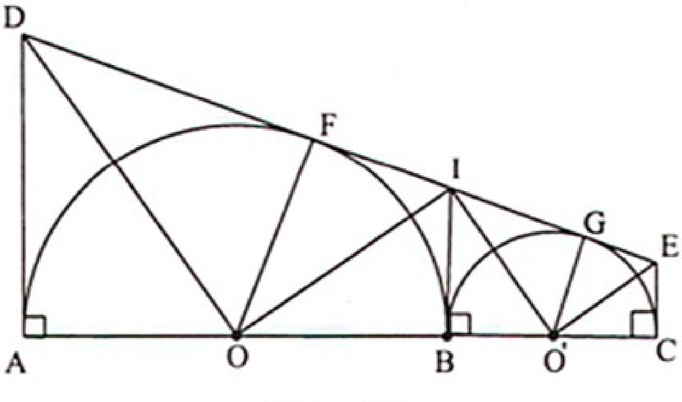
$$S = S_1 - S_2 = 36\sqrt{3} - 12\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

27. (h.57) a) Ta có IO là phân giác của $\widehat{FIB}$, IO' là phân giác của $\widehat{BIE}$ mà $\widehat{BIF}; \widehat{BIE}$ là hai góc kề bù

$\Rightarrow IO \perp IO' \Rightarrow \Delta OIO'$ vuông.

Ta có OD là đường phân giác của $\widehat{AOF}$, OI là đường phân giác của $\widehat{BOF}$ mà $\widehat{AOF}$ và $\widehat{BOF}$ là hai góc kề bù $\Rightarrow OD \perp OI \Rightarrow \Delta DOI$ vuông.

Tương tự ta có $\Delta IO'E$ vuông.



Hình 57

b) Ta có $O'C = R \Rightarrow O'B = R \Rightarrow OB = OA = 2R$.

$\Delta OIO'$ vuông tại I có $IB \perp OO' \Rightarrow IB^2 = OB.O'B = 2R^2$

$\Rightarrow IB = R\sqrt{2} \Rightarrow IG = R\sqrt{2}$.

$\Delta IO'E$ vuông tại O' có $O'G \perp IF \Rightarrow O'G^2 = IG.GE$

$\Rightarrow R^2 = R\sqrt{2}.GE \Rightarrow GE = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $IF = IB = R\sqrt{2}$.

ΔODI vuông tại O có $OF \perp DI \Rightarrow OF^2 = DF.FI$

$\Rightarrow 4R^2 = DF.R\sqrt{2} \Rightarrow DF = 2R\sqrt{2} \Rightarrow AD = DF = 2R\sqrt{2}$.

c) * Diện tích hình thang ACED là $S_1 = \dfrac{AD + CE}{2}.AC$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{2R\sqrt{2} + \dfrac{R\sqrt{2}}{2}}{2}.6R = \frac{15R^2\sqrt{2}}{2}.$$

* Diện tích nửa hình tròn tâm O là $S_2 = \dfrac{1}{2}\pi(2R)^2 = 2\pi R^2$.

* Diện tích nửa hình tròn tâm O' là $S_3 = \dfrac{1}{2}\pi R^2$.

Diện tích phần nằm trong hình thang nhưng nằm ngoài hai nửa hình tròn là:

$$S_4 = S_1 - (S_2 + S_3) = \frac{5R^2\left(3\sqrt{2} - \pi\right)}{2}.$$

Chuyên đề 15

28. (h.58) a) ΔBOC cân $(OB = OC)$ có OI vừa là trung tuyến vừa là đường phân giác $\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MC}$.

b) Vì $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MC}$ suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$ (góc nội tiếp) do đó AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

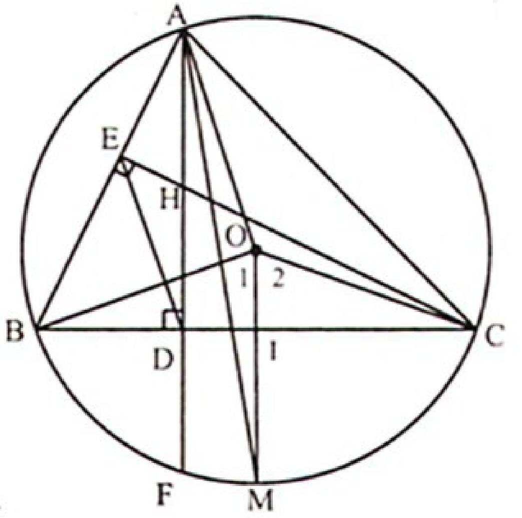
Vì AD // OM nên $\widehat{FAM} = \widehat{AMO}$, mặt khác $\widehat{AMO} = \widehat{MAO}$. Suy ra $\widehat{FAM} = \widehat{MAO}$ nên AM còn là tia phân giác của $\widehat{FAO}$.

c) Ta có $\widehat{BCF} = \widehat{BAF}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BF}$) và $\widehat{BCE} = \widehat{BAF}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) nên $\widehat{BCE} = \widehat{BCF}$.

Mặt khác $HF \perp BC$ nên ΔCHF cân. Suy ra $DH = DF$, do vậy hai điểm H, F đối xứng với nhau qua BC.

d) Dựng đường tròn tâm O bán kính $R = 2{,}5cm$

- Dựng $BC = 4cm$;
- Từ O kẻ $OM \perp BC$ với M thuộc cung nhỏ BC ;
- Từ M dựng tia Mx sao cho $\widehat{OMx} = 15^o$ (theo chứng minh trên), Mx cắt đường tròn tại A;
- Nối AB, AC được tam giác ABC cần dựng. Bạn đọc tự vẽ hình.



Hình 58

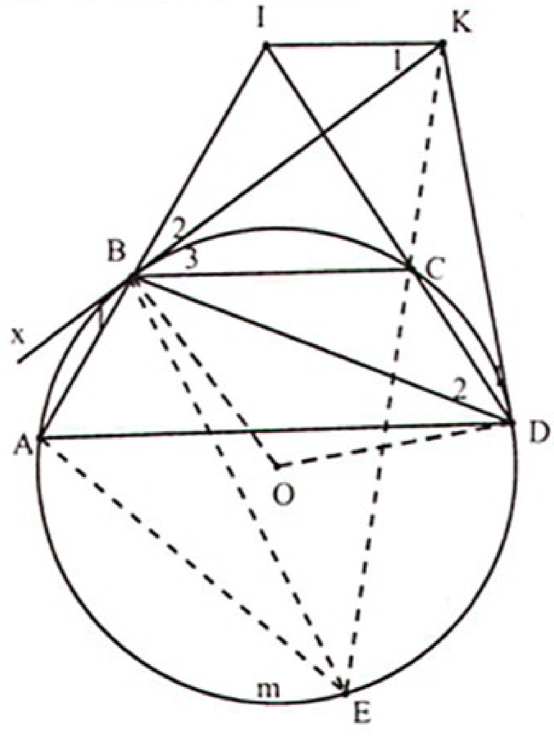
29. (h.59) a) Ta có BC // AD suy ra $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (hai cung chắn giữa hai dây song song) $\Rightarrow AB = CD$.

Ta lại có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (đối đỉnh). (1)

$\widehat{B_1}$ là góc giữa tiếp tuyến và dây AB chắn cung AB;

$\widehat{D_1}$ là góc giữa tiếp tuyến và dây CD chắn cung CD, mà $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{B_2} = \widehat{D_1}$ (đpcm).



Hình 59

b) Ta có B nhìn IK dưới góc IBK,

D nhìn IK dưới góc IDK, mà $\widehat{IBK} = \widehat{IDK}$ (cmt), suy ra tứ giác BIKD nội tiếp được, suy ra $\widehat{K_1} = \widehat{D_2}$ (góc nội tiếp chắn cung BI). (3)

- $\widehat{B_3} = \widehat{D_2}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây BC và góc nội tiếp chắn cung BC). (4)
- Từ (3) và (4) được $\widehat{K_1} = \widehat{B_3}$, ở vị trí so le trong, suy ra IK // BC.

c) Ta có IK // AD (vì cùng song song BC) nên AIKD là hình bình hành

$\Leftrightarrow$ AI // KD $\Leftrightarrow \widehat{IDK} = \widehat{AID} \Leftrightarrow$ sđ$\dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AmD} - sđ\overset{\frown}{BC}}{2}$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{AmD} = \overset{\frown}{BCD} \Leftrightarrow AD = BD.$

Vậy điều kiện phải tìm là AD = BD. Bạn đọc tự vẽ hình.

d) *Phân tích*: Giả sử đã dựng được hình, kéo dài KC cho gặp (O) tại điểm thứ hai E, ta có: BC = AE (vì KC // IB). Mà AB = CD nên $\overset{\frown}{BCD} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{BAE}$, suy ra BE = BD.

Cách dựng: (Bạn đọc tự vẽ hình) Dựng dây BE = BD (tồn tại vì BD không chứa O). Kẻ các tiếp tuyến của (O) tại B, D cắt nhau tại K. Nối KE cắt đường tròn tại điểm thứ hai C. Nối BC, kẻ dây DA // BC được hình thang ABCD phải dựng.

Chứng minh: Thật vậy, do $\overset{\frown}{BCD} = \overset{\frown}{BAE}$ (cách dựng),

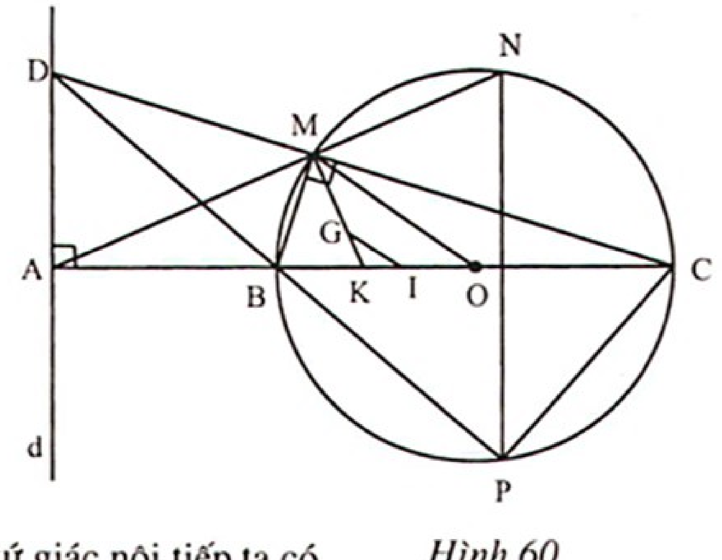
$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BA}$ (vì DA //BC) nên $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BE} - \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AE}$.

Suy ra $\widehat{BEC} = \widehat{EBA}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau). Do đó AB // CE.

Kết hợp với câu a) thì IK // BC, nên BIKC là hình bình hành.

Biện luận: Vì BD không chứa O nên luôn luôn dựng được E, K; do đó dựng được C, BC và DA. Hơn nữa E, K duy nhất, do đó C, A duy nhất và nghiệm hình là duy nhất.

30. (h.60) a) $\widehat{BMC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BMD} = 90^0$ mà $\widehat{BAD} = 90^0$, suy ra tứ giác ABMD nội tiếp đường tròn đường kính BD.



Hình 60

b) Xét ΔCBM và ΔCDA có

$\widehat{CAD} = \widehat{CMB} = 90^0, \widehat{ACD}$ chung

$\Rightarrow \Delta CBM \backsim \Delta CDA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CB}{CD} = \dfrac{CM}{CA}$

$\Rightarrow CD.CM = CA.CB$ không đổi.

Vậy tích CD.CM = CA.CB không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

c) Áp dụng tính chất góc nội tiếp của tứ giác nội tiếp ta có

$\widehat{DAM} = \widehat{DBM} = \widehat{MCP} = \widehat{ANP} \Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{ANP}$ suy ra AD // NP.

d) Gọi K là trung điểm của AC $\Rightarrow$ K cố định. Qua G kẻ đường thẳng song song với OM cắt AC tại I $\Rightarrow \dfrac{KI}{KO}=\dfrac{KG}{KM}\Rightarrow\dfrac{KI}{KO}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$ I là điểm cố định.

$GI\,//\,MO\Rightarrow\dfrac{GI}{MO}=\dfrac{KG}{KM}\Rightarrow\dfrac{GI}{MO}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow GI=\dfrac{1}{3}MO=\dfrac{1}{6}BC$.

Vậy G thuộc đường tròn cố định $(I\,;\,\dfrac{1}{6}BC)$.

31. (h.61) a) d là tiếp tuyến suy ra $d\perp AB\Rightarrow\widehat{P_1}=\widehat{B_1}$ (cùng phụ với $\widehat{B}_2$)

mà $\widehat{D_2}=\widehat{B_1}$ (góc nội tiếp) $\Rightarrow\widehat{P_1}=\widehat{D_2}$.

Mặt khác $\widehat{D_2}+\widehat{CDQ}=180^0$

$\Rightarrow\widehat{P_1}+\widehat{CDQ}=180^0$

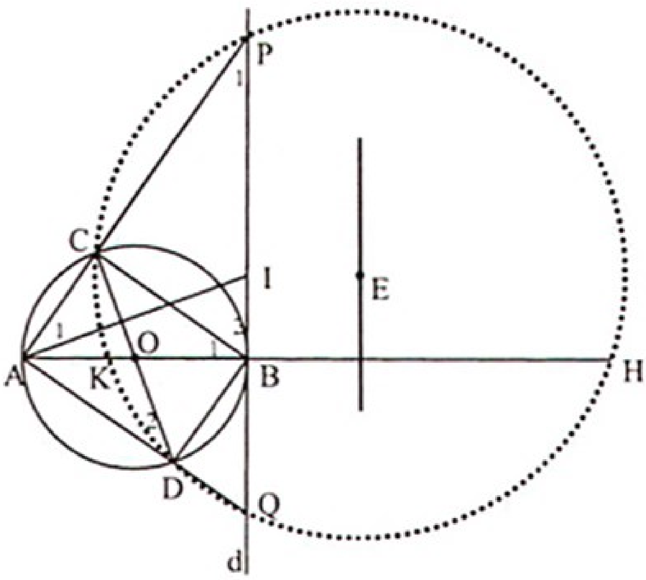
$\Rightarrow$ tứ giác CPQD nội tiếp.

b) ΔAPQ có $\widehat{PAQ}=90^0$, AI là đường trung tuyến $\Rightarrow IA=IP$

$\Rightarrow\Delta IAP$ cân tại I

$\Rightarrow\widehat{A_1}=\widehat{P_1}\Rightarrow\widehat{A_1}=\widehat{D_2}$

mà $\widehat{A_1}+\widehat{IAD}=90^0\Rightarrow\widehat{D_2}+\widehat{IAD}=90^0\Rightarrow AI\perp CD$.



Hình 61

c) Gọi K, H là giao điểm của đường thẳng AB với đường tròn ngoại tiếp ΔCPD (K nằm giữa A và H).

Ta có $AK.AH=AC.AP=AB^2\Rightarrow AK.AH=4R^2$. (1)

$BK.BH=BP.BQ=AB^2\Rightarrow BK.BH=4R^2$

$\Leftrightarrow(AB-AK).(AH-AB)=4R^2\Leftrightarrow AB(AH+AK)=12R^2$

$\Leftrightarrow AK+AH=6R$. (2)

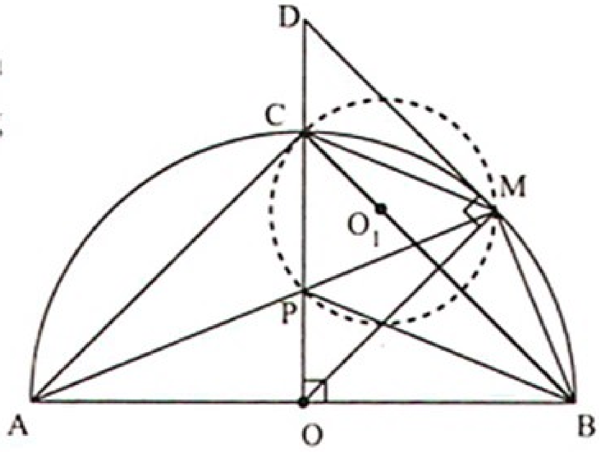
Từ (1) và (2) ta có AK; AH là nghiệm của phương trình: $X^2-6R.X+4R^2=0$.

Giải ra ta được $X_1=\left(3+\sqrt{5}\right)R$; $X_2=\left(3-\sqrt{5}\right)R$.

Vì $AK<AH\Rightarrow AK=\left(3-\sqrt{5}\right)R$; $AH=\left(3+\sqrt{5}\right)R$.

Từ đó suy ra KH cố định, do đó quỹ tích tâm E của đường tròn ngoại tiếp ΔCPD là đường trung trực của HK cố định.

32. (h.62) a) $\widehat{PMB} = 90^0, \widehat{POB} = 90^0$ nên tứ giác OBMP nội tiếp đường tròn đường kính PB.



Hình 62

Từ đó ta có $\widehat{MBO} = \widehat{DPM}$

mà $\widehat{PMD} = \widehat{MBO} \Rightarrow \widehat{PMD} = \widehat{DPM}$

$\Rightarrow \Delta DMP$ cân tại D.

b) $PO = PM \Leftrightarrow \Delta$ PMO cân tại P

$\Leftrightarrow \widehat{POM} = \widehat{PMO} \Leftrightarrow \widehat{PAO} = \widehat{POM} \Leftrightarrow \widehat{APO} = 2.\widehat{PAO}$

$\Leftrightarrow \widehat{MBA} = 2.\widehat{PAO} \Leftrightarrow \widehat{PAO} = 30^0, \widehat{MBA} = 60^0$.

Cách dựng điểm P : Trên nửa mặt phẳng bờ AB dựng $\widehat{BAx} = 30^0$, tia Ax cắt OC tại P.

c) $MP = MB \Leftrightarrow \Delta MPB$ vuông cân tại M $\Leftrightarrow \widehat{MPB} = 45^0 \Leftrightarrow \widehat{MOB} = 45^0$.

Cách dựng điểm M: Dựng tia phân giác của góc $\widehat{COB}$ cắt nửa đường tròn tại M.

Ta có $\widehat{MOB} = 45^0$, kẻ $MH \perp AB$ ta có $MH = MO.\sin 45^0 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó diện tích tam giác AMB là: $S = \dfrac{1}{2}AB.MH = \dfrac{R^2\sqrt{2}}{2}$.

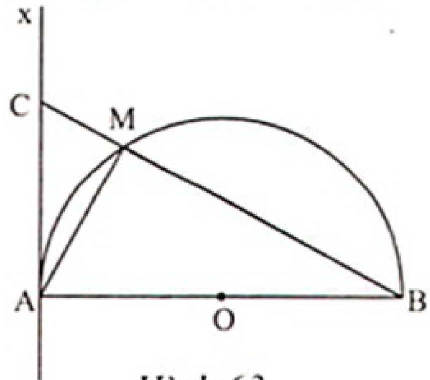
d) Ta có $\widehat{ACO} = \widehat{AMC} \Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔCPM.

Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta CPM \Rightarrow O_1C \perp CA$.

Mà $BC \perp CA \Rightarrow C, O_1, B$ thẳng hàng $\Rightarrow O_1$ nằm trên đường thẳng BC cố định.

Chuyên đề 16

33. (h.63) ΔABC vuông tại A, có $AM \perp BC$ nên $BM.BC = AB^2 = 4R^2$.



Hình 63

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$2BM + BC \geq 2.\sqrt{2BM.BC} = 2.\sqrt{8R^2} = 4R\sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất là $4R\sqrt{2}$ khi $2.BM = BC$

$\Leftrightarrow$ MB = MC $\Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa của nửa đường tròn.

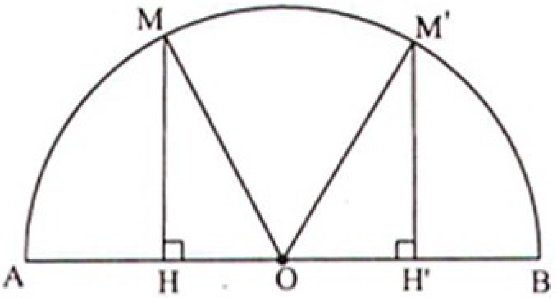
34. (h.64) Ta có $MH^2 + HO^2 = OM^2 = R^2$

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$S_{OMH} = \frac{1}{2}MH.HO \le \frac{1}{2}.\frac{MH^2 + HO^2}{2} = \frac{R^2}{4}$.

Vậy diện tích tam giác OMH lớn nhất là

$\frac{R^2}{4}$ khi MH = HO



Hình 64

$\Leftrightarrow \widehat{AOM} = 45^0$ hoặc $\widehat{BOM'} = 45^0$.

b) Áp dụng bất đẳng thức: $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \le \frac{x^2+y^2}{2}$; ta có:

$\left(\frac{MH+HO}{2}\right)^2 \le \frac{MH^2+HO^2}{2} = \frac{R^2}{2} \Leftrightarrow MH + HO \le R\sqrt{2}$.

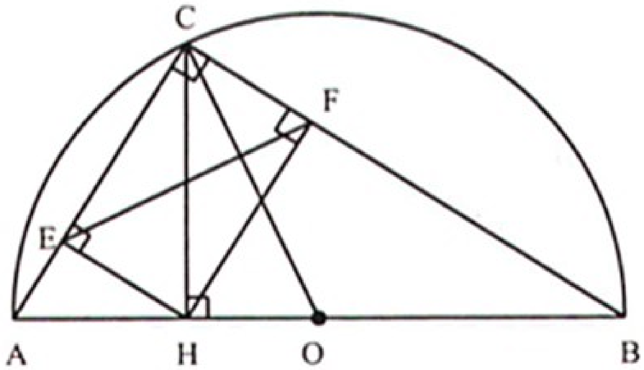
Ta có chu vi ΔMOH là $MO + MH + HO \le R + R\sqrt{2}$.

Vậy chu vi ΔMHO lớn nhất là $R(1+\sqrt{2})$ khi MH = HO $\Leftrightarrow \widehat{AOM} = 45^0$ hoặc $\widehat{BOM'} = 45^0$.

35. (h.65) a) $\widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), mặt khác HE $\perp$ AC, HF $\perp$ BC (gt) nên $\widehat{CEH} = \widehat{CFH} = 90°$ do đó CEHF là hình chữ nhật, suy ra EF = CH.

EF lớn nhất $\Leftrightarrow$ CH lớn nhất. Mà CH $\le$ CO nên CH lớn nhất

$\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow CO \perp AB \Leftrightarrow$ C là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O).



Hình 65

Vậy EF lớn nhất bằng R khi C là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O).

b) Áp dụng hệ thức lượng vào các tam giác vuông HAC và HBC ta có:

$CH^2 = CE.CA$; $CH^2 = CF.CB \Rightarrow CH^4 = CE.CF.CA.CB$.

Mặt khác, $CA.CB = CH.AB \Rightarrow CH^4 = CE.CF.AB.CH \Rightarrow CE.CF = \dfrac{CH^3}{AB}$.

$S_{CEHF} = CE.CF$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ CH lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow OC \perp AB$

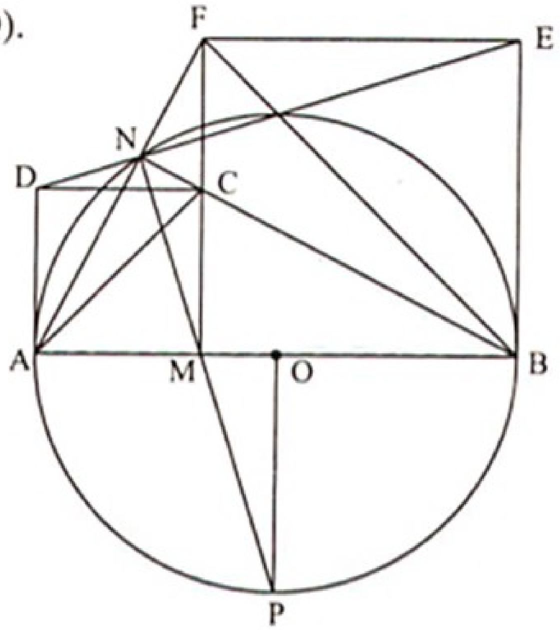
$\Leftrightarrow$ C là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O).

36. (h.66) a) Vì $\widehat{CAB} + \widehat{FBA} = 90^0$ nên $AC \perp BF$, mà $FM \perp AB$ suy ra C là trực tâm của ΔABF do đó $BC \perp AF$. Vì $\widehat{ANC} = \widehat{BNF} = 90^0$ nên N nằm trên hai đường tròn ngoại tiếp các hình vuông AMCD và MBEF.

b) Do $\widehat{MND} = \widehat{MNE} = 90^0$ nên D, N, E thẳng hàng và $MN \perp DE$.

c) N nằm trên hai đường tròn ngoại tiếp các hình vuông AMCD và MBEF

$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{BNM} = 45^0$.



Hình 66

Ta có A, B cố định, $\widehat{ANB} = 90^0$ nên N thuộc đường tròn đường kính AB. Dựng đường tròn đường kính AB và gọi P là giao điểm thứ hai của MN với đường tròn đó. Vì $\widehat{ANM} = \widehat{BNM} = 45^0 \Rightarrow$ P là điểm chính giữa của cung AB, do đó P là điểm cố định. Vậy MN luôn đi qua P.

d) Gọi O là trung điểm của AB.

Ta có $PN \le AB$ và $PM \ge PO = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow MN \le \dfrac{1}{2}AB$.

Vậy giá trị lớn nhất của MN là $\dfrac{1}{2}AB$ khi M là trung điểm của AB.

37. (h.67) a) Ta có $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$. (1)

Ta có $DI = DB \Rightarrow \Delta DBI$ cân tại D $\Rightarrow \widehat{DIB} = \widehat{DBI}$.

Mặt khác $\widehat{DIB} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{BD} + sđ\overset{\frown}{CK}}{2}$; $\widehat{DBK} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AD} + sđ\overset{\frown}{AK}}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{CK} \Rightarrow AK = CK \Rightarrow \Delta ACK$ cân tại K.

b) Ta có $\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{CK} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2} \Rightarrow$ BK là tia phân giác $\widehat{ABC}$.

ΔABC có CD; BK là các tia phân giác cắt nhau tại I.

Từ đó suy ra tia AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}$. Gọi E là giao điểm thứ hai của AI với đường tròn (O). Từ $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$

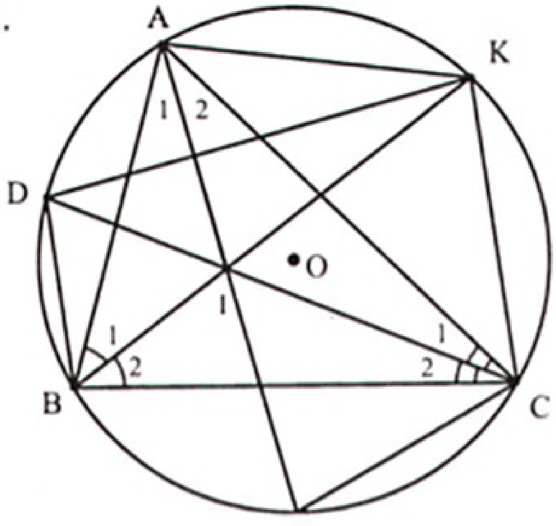
$\Rightarrow$ E là điểm cố định.

Ta có: $\widehat{CIE} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AD} + sđ\overset{\frown}{CE}}{2}$;

$\widehat{ICE} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{BD} + sđ\overset{\frown}{BE}}{2}$.

Mà $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}; \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{BE} \Rightarrow \widehat{CIE} = \widehat{ICE}$

$\Rightarrow \Delta CIE$ cân tại E $\Rightarrow$ IE = CE không đổi.



Hình 67

Mặt khác AI = AE − EI nên AI lớn nhất $\Leftrightarrow$ AE lớn nhất, mà AE $\le$ 2R nên AE lớn nhất bằng 2R khi EA là đường kính. Vậy AI lớn nhất bằng 2R − CE khi AE là đường kính hay A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

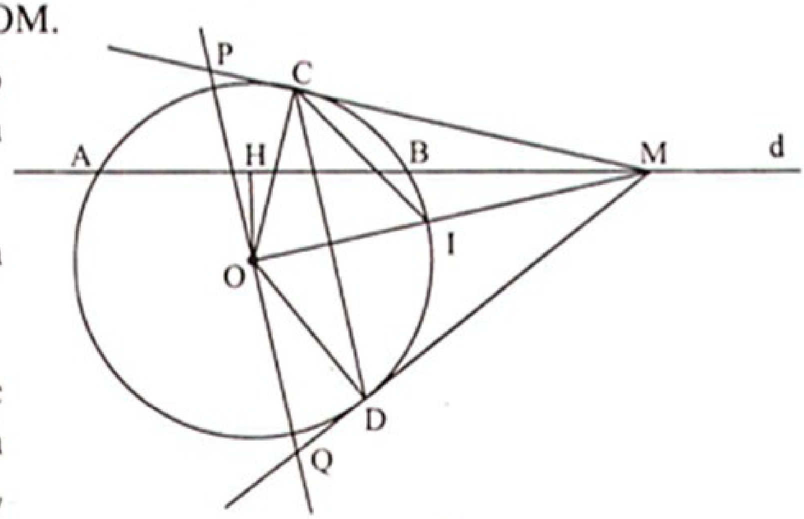
b) Bạn xem lời giải ở ví dụ 25.

38. (h.68) a) Ta có $\widehat{OHM} = 90^0; \widehat{ODM} = 90^0$ suy ra các điểm M, D, O, H cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

b) Theo tính chất tiếp tuyến, ta có MI là đường phân giác của $\widehat{CMD}$.

Ta có OI là đường phân giác của $\widehat{COD}$ nên $\overset{\frown}{CI} = \overset{\frown}{DI}$.

Từ đó suy ra $\widehat{DCI} = \widehat{MCI}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây) hay CI là đường phân giác của $\widehat{MCD}$. Vậy I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác MCD.



Hình 68

c) Ta có tam giác MPQ cân tại M có MO là đường trung trực nên

$S_{MPQ} = 2.S_{OQM} = 2.\dfrac{1}{2}OD.QM = R\left(MD + DQ\right)$.

Từ đó S nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MD + DQ nhỏ nhất.

Ta có $MD + DQ \geq 2.\sqrt{MD.DQ} = 2\sqrt{OD^2} = 2R \Rightarrow MD + DQ \geq 2R$.

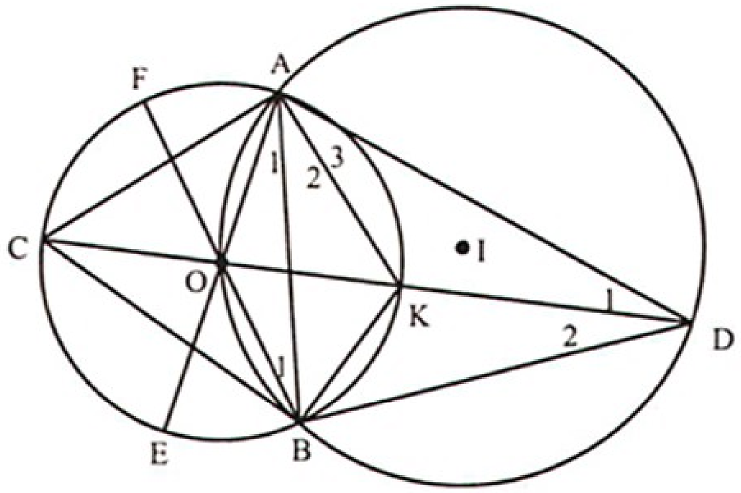
Vậy diện tích S nhỏ nhất $= 2R^2$ khi $MD = DQ \Leftrightarrow MO = R\sqrt{2}$ hay M là giao điểm của d với đường tròn (O; $R\sqrt{2}$).

39. (h.69) a) $\widehat{OBA} = \widehat{ODA}$ (góc nội tiếp của (I)), $\widehat{ABK} = \widehat{ACK}$ (góc nội tiếp của (O)) mà $\widehat{ODA} + \widehat{ACK} + \widehat{CAD} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{OBA} + \widehat{ABK} + \widehat{CAD} = 180^0$

hay $\widehat{OBK} + \widehat{CAD} = 180^0$.

b) Xét đường tròn (I) có $\widehat{D_1} = \widehat{B_1}; \widehat{D_2} = \widehat{A_1}$ mà ΔOAB cân tại O $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1} \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$



Hình 69

$\Rightarrow$ DO là đường phân giác của $\widehat{ADB}$. (1)

Xét đường tròn (I) có $\widehat{BOD} = \widehat{BAD}$.

Xét đường tròn (O) có $\widehat{BOK} = 2.\widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{BAD} = 2.\widehat{A_2}$

$\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{A_3} \Rightarrow$ AK là đường phân giác của $\widehat{BAD}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra K là tâm đường tròn nội tiếp ΔABD.

c) Kẻ $AH \perp CD$, $BJ \perp CD$. Ta có $S_{ACBD} = S_{ACD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}CD.AH + \frac{1}{2}CD.BJ$

$\Rightarrow S_{ACBD} = \frac{1}{2}CD.(AH + BJ) \leq \frac{1}{2}CD.AB$.

Vậy S_{ACBD} lớn nhất khi AH + BJ = AB và CD lớn nhất

$\Leftrightarrow CD \perp AB$ hay C là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{EF}$.

CÁC ĐỀ THAM KHẢO

Đề số 1

Bài 1.

a) $A = \sqrt{3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{2+\sqrt{3}}$

$= \sqrt{3}(2-3)+\left(2+\sqrt{3}\right) = 2.$

b) $B = \sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{3}+4\right)\left(5+2\sqrt{3}\right)}{13}}-\sqrt{\dfrac{\left(3\sqrt{3}-4\right)\left(2\sqrt{3}-1\right)}{11}}$

$= \sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Suy ra $\sqrt{2}.B = \sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2}.\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$= \sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = 2.$

Do đó $B = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

c) Điều kiện $x \geq 1$.

$C = \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}-\sqrt{x-1} = \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}-\sqrt{x-1}$

$= \left|\sqrt{x-1}-1\right|-\sqrt{x-1}$.

- Nếu $\sqrt{x-1}-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ thì $B = -1$.
- Nếu $\sqrt{x-1}-1 < 0 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$ thì $B = 1-2\sqrt{x-1}$.

Bài 2. Gọi số chi tiết máy tổ I sản xuất trong tháng trước là x (x nguyên dương).

Gọi số chi tiết máy tổ II sản xuất trong tháng trước là y (y nguyên dương).

Dẫn tới hệ phương trình: $\begin{cases} x+y = 800 \\ \dfrac{9}{100}x+\dfrac{10}{100}y = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 500 \\ y = 300. \end{cases}$

Bài 3. a) $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=3 \\ -m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$

b) Thay x = 5; y = 12 vào hàm số y = (m – 1)x + 2

ta được 12 = (m – 1)5 + 2 ⇔ m = 3.

Thay x = 5; y = 12 vào hàm số y = 3x – m

ta được 12 = 3.5 – m ⇔ m = 3.

Vậy với m = 3 thì (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm M (5; 12).

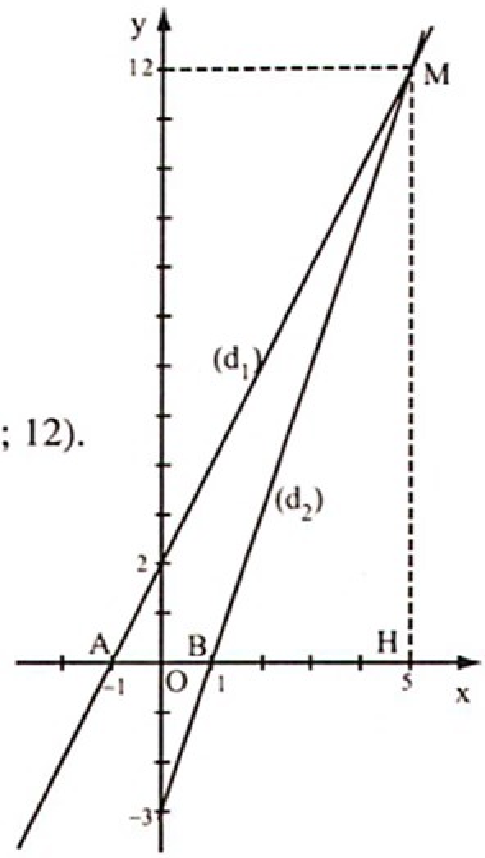
c) (h.70) Với m = 3 thì (d_1) là y = 2x + 2.

Cho y = 0 thì x = –1. Vậy (d_1) cắt trục hoành tại A có hoành độ là x = –1.

Với m = 3 thì (d_2) là y = 3x – 3.

Cho y = 0 thì x = 1. Vậy (d_2) cắt trục hoành tại B có hoành độ là x = 1.

Ta có $AB = |-1| + 1 = 2$.



Hình 70

Vậy diện tích ΔMAB là : $S = \frac{1}{2}AB.MH = \frac{1}{2}.2.12 = 12$ (đvdt).

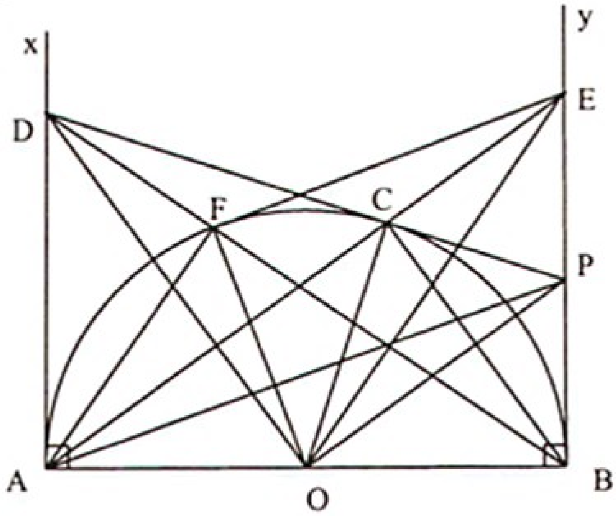
Bài 4. (h.71)

a) Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có OD là tia phân giác của $\widehat{AOC}$, OP là tia phân giác của $\widehat{BOC}$. Mà $\widehat{AOC}$ và $\widehat{BOC}$ là hai góc kề bù, nên OP ⊥ OD ⇒ ΔPOD vuông tại O.

b) PB = PC ⇒ ΔBPC cân có PO là đường phân giác nên PO là đường cao

⇒ PO ⊥ BC ⇒ PO // AC.

Từ đó ta có PO là đường trung bình trong tam giác ABE ⇒ PB = PE.



Hình 71

c) Từ $CP.CD = OC^2 \Rightarrow BP.AD = OA.OB \Rightarrow 2BP.AD = 2OA.OB \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{OB}{AD}$

$\Rightarrow \Delta BEO \backsim \Delta ABD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BEO} = \widehat{ABD}$. Từ đó suy ra BD ⊥ OE.

d) Tương tự ta có $\Delta ADO \backsim \Delta BAE \Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{OA}{BE}$. (1)

Mà $\Delta ABD \backsim \Delta FBA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{FA}{FB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{OA}{BE} = \dfrac{FA}{FB}$.

Mặt khác $\widehat{OAF} = \widehat{EBF}$ nên $\Delta OAF \backsim \Delta EBF$ (c.g.c).

Kết hợp với OA = OF suy ra EF = EB.

Do đó $\Delta EFO = \Delta EBO$ (c.c.c) nên $\widehat{EFO} = \widehat{EBO} = 90^0$. Vậy EF là tiếp tuyến của (O).

Bài 5. Ta có:

$$P = \left(x - 4\sqrt{x} + 4\right) + \left(\frac{x+16}{\sqrt{x}+3} - 4\right) + 10 = \left(\sqrt{x} - 2\right)^2 + \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\sqrt{x}+3} + 10 \geq 10.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 10 khi x = 4.

Đề số 2

Bài 1. a) ĐK: $x \geq 0; x \neq 1$; $P = \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$.

b) $P < \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \dfrac{1}{3} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x+2\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x+\sqrt{x}+1} < 0$.

Vì $x \neq 1$ nên bất đẳng thức cuối đúng, suy ra $P < \dfrac{1}{3}$.

c) $P = \dfrac{2}{7} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} = \dfrac{2}{7} \Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \frac{1}{2})(\sqrt{x} - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4} \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Bài 2. Gọi vận tốc lúc về là x km/h (x > 0).

Dẫn tới phương trình: $\dfrac{60}{x+10} + \dfrac{60}{x} = \dfrac{11}{5}$.

Tìm được nghiệm $x_1 = 50$ (thỏa mãn điều kiện); $x_2 = -\dfrac{60}{11}$ (loại).

Bài 3. a) Thay $x = -1$; $y = -1$ vào hàm số $y = (m + 2)x + m + 1$

ta được $0.m = 0$ (đúng với mọi m).

Tọa độ của điểm M thỏa mãn hàm số đã cho nên (d) luôn đi qua M $(-1; -1)$.

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

Ta có $(m + 2)x + m + 1 = -x^2$

$\Leftrightarrow x^2 + (m + 2)x + m + 1 = 0$

$\Delta = (m + 2)^2 - 4(m + 1) = m^2$.

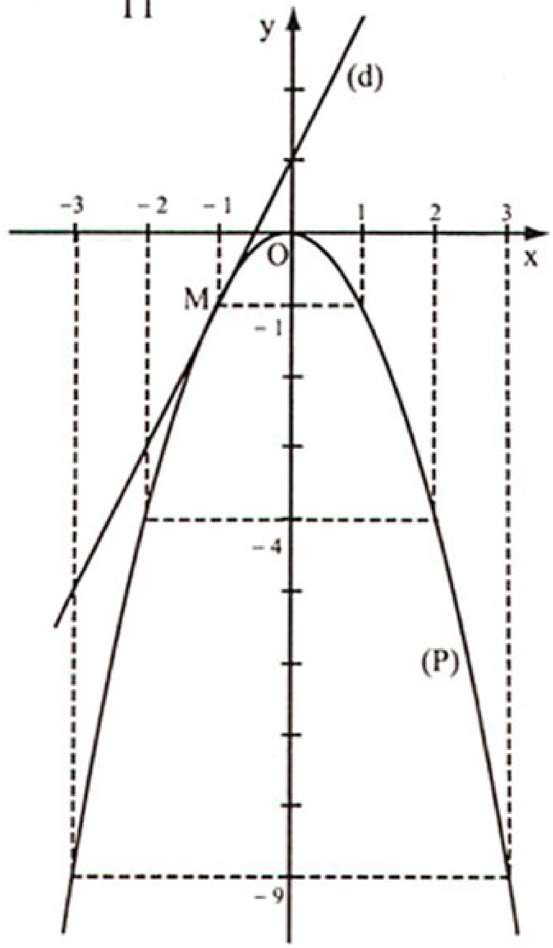
(d) và (P) tiếp xúc khi và chỉ khi $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Hoành độ của tiếp điểm là

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(m+2)}{2} = -1.$$

Khi đó $y = -1$.

c) Với $m = 0$ ta vẽ đồ thị của các hàm số $y = 2x + 1$ và $y = -x^2$ (h.72).



Hình 72

Bài 4. (h.73) a) $\widehat{AEB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BEM} = 90^0$

mà $\widehat{BHM} = 90^0$ nên tứ giác BEMH nội tiếp đường tròn đường kính BM.

b) Δ AEB $\backsim$ Δ AHM (g.g)

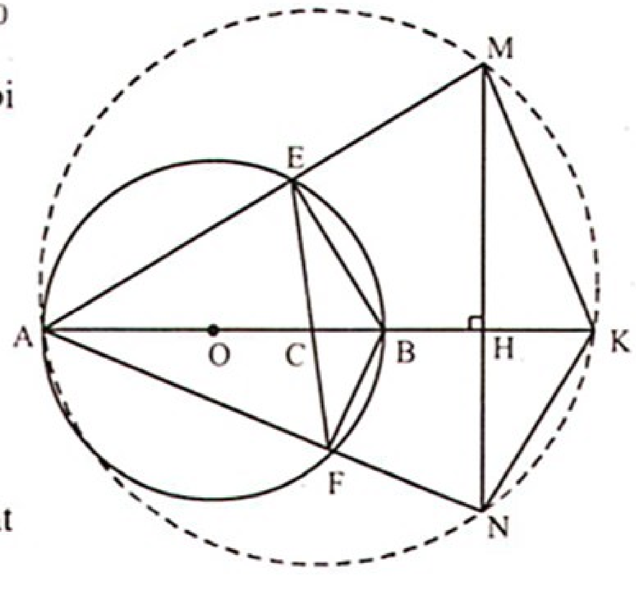
nên AE.AM = AB.AH.

Δ AFB $\backsim$ Δ AHN (g. g)

nên AF.AN = AB.AH.

Suy ra: AE.AM = AF.AN.

c) Vẽ đường tròn ngoại tiếp Δ AMN cắt đường thẳng AB tại K.



Hình 73

Sử dụng các góc nội tiếp, tứ giác nội tiếp ta có:

$\widehat{AKN} = \widehat{AMN} = \widehat{ABE} = \widehat{AFC} \Rightarrow \Delta AFC \backsim \Delta AKN$ (g.g) $\Rightarrow$ AC.AK = AF.AN.

Mà AF.AN = AB.AH nên AC.AK = AB.AH

$\Rightarrow AK = \dfrac{AB.AH}{AC}$ không đổi $\Rightarrow$ K là điểm cố định.

d) Từ câu c) ta có $AK = \dfrac{AB.AH}{AC} = \dfrac{4.5}{3} = \dfrac{20}{3}$ cm $\Rightarrow HK = AK - AH \Rightarrow HK = \dfrac{5}{3}$ cm.

Mặt khác $\Delta HMA \backsim \Delta HKN$ (g.g) $\Rightarrow HM.HN = HA.HK \Rightarrow HM.HN = 5.\dfrac{5}{3} = \dfrac{25}{3}$.

Ta có Δ AMN có đường cao AH = 5cm không đổi.

Suy ra S_{AMN} nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MN nhỏ nhất.

Mà $MN = MH + HN \geq 2\sqrt{MH.HN} = 2.\sqrt{\dfrac{25}{3}} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Do đó giá trị nhỏ nhất của diện tích Δ AMN là : $\dfrac{1}{2}.5.\dfrac{10\sqrt{3}}{3} = \dfrac{25\sqrt{3}}{3}$ cm^2,

khi HM = HN $\Leftrightarrow$ EF $\perp$ AB tại C.

Bài 5. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bán kính R, kẻ đường kính AD của đường tròn đó. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC (h.74).

Ta có BH // CD, CH // BD, suy ra BDCH là hình bình hành $\Rightarrow$ BH = CD.

Xét tam giác ACD có $\widehat{ACD} = 90^0$ nên

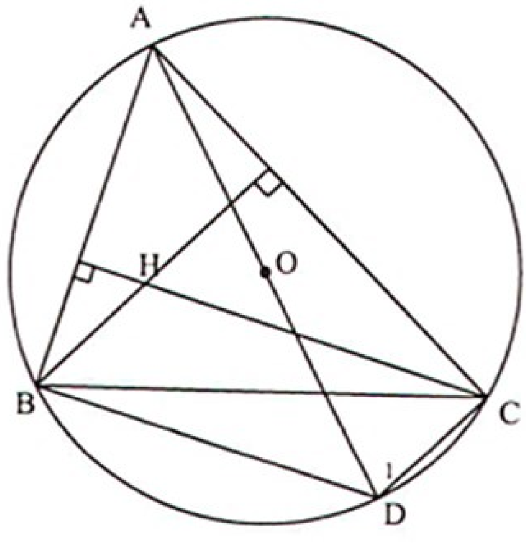
$\sin \widehat{D_1} = \dfrac{AC}{AD}$, $\cos\widehat{D_1} = \dfrac{CD}{AD}$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{D_1}$

$\Rightarrow \sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{2R}$, $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{BH}{2R}$.

Tương tự, ta có:

$\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{2R}$, $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AH}{2R}$,

$\sin \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{2R}$, $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{CH}{2R}$.



Hình 74

Do đó sinA + sinB + sinC < 2(cosA + cosB + cosC)

$\Leftrightarrow$ BC + AC + AB < 2(AH + BH + CH). (*)

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có:

AH + BH > AB, AH + CH > AC, BH + CH > BC.

Cộng các bất đẳng thức cùng chiều ta có bất đẳng thức (*) được chứng minh, suy ra điều phải chứng minh.

Đề số 3

Bài 1. a) Điều kiện: $x, y \ge 0; x \ne y$; $P = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

b) $P = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{4x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} = \dfrac{1}{3}$.

c) $\dfrac{1}{P}$ có nghĩa khi $\begin{cases} x, y \ge 0; x \ne y \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0; y \ge 0$ và $x \ne y$.

Với điều kiện này thì $P > 0$.

Do đó $P + \dfrac{1}{P} \ge 2\sqrt{P.\dfrac{1}{P}} = 2$ (bất đẳng thức Cô-si).

Dấu "=" xảy ra khi $P = \dfrac{1}{P} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = x \Leftrightarrow \sqrt{y}\left(\sqrt{y}+2\sqrt{x}\right) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (vì $\sqrt{y}+2\sqrt{x} \ne 0$).

Do đó $P + \dfrac{1}{P} = 2$ khi $x > 0$ và $y = 0$.

Bài 2. a) $x_1 = \dfrac{1}{4}; x_2 = -\dfrac{1}{2}$. b) $x = \pm\sqrt{5}$; c) $x_{1,2} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$; d) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Bài 3. a) $m < 2$.

b) Thay $x = 2$; $y = 3$ vào hàm số đã cho ta tính được $m = 3$.

c) Nếu $m = 2$ thì đường thẳng (d) là $y = 1$, có khoảng cách từ O đến (d) là $h = 1(*)$.

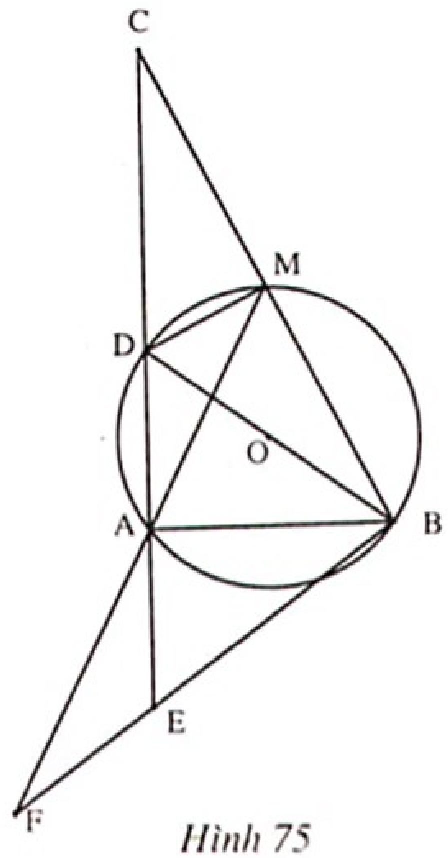
Nếu $m \ne 2$ thì (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là $\dfrac{1}{2-m}$.

Ta có $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2-m}\right)^2} = 1 + (2-m)^2 > 1$ (vì $m \ne 2$).

Suy ra $h^2 < 1$, do đó $h < 1$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra max $h = 1$ khi $m = 2$.

Bài 4. (h.75) a) MA = MB = MC nên tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow$ BD là đường kính của đường tròn (O).



Hình 75

Ta lại có D, E đối xứng qua A mà $AB \perp DE$ nên tam giác BDE cân tại B

$\Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{BDA}$. (1)

Mặt khác $\widehat{BMD} = 90^0$, MC = MB nên tam giác BDC cân tại D.

Từ đó suy ra $\widehat{BDA} = 2.\widehat{BCD}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{BEC} = 2.\widehat{ACB}$.

b) Ta có $\Delta CAM \backsim \Delta CBD$

nên $CD.CA = CM.CB = \dfrac{BC^2}{4}$.

c) Tam giác MAC cân tại M nên $\widehat{MCA} = \widehat{MAC}$; $\widehat{MAC} = \widehat{EAF}$

$\Rightarrow \widehat{BEC} = 2\widehat{EAF} \Rightarrow$ tam giác EAF cân tại E $\Rightarrow$ EA = EF.

Ta có: BD = BE nên CD = BE.

Mà EF = AE nên AD = EF. Suy ra CD + AD = BE + EF. Vậy AC = BF.

d) Ta có AE = AD.

MDFE là hình bình hành $\Leftrightarrow$ AM = AF $\Leftrightarrow$ DM = DA $\Leftrightarrow$ tam giác ABM cân tại B.

Vậy tam giác ABM đều thì tứ giác MDFE là hình bình hành.

Bài 5. Ta có: $\dfrac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}} = \dfrac{2(a+b)}{\sqrt{4a(3a+b)}+\sqrt{4b(3b+a)}}$. (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương ta được:

$$\sqrt{4a(3a+b)} \le \frac{4a+(3a+b)}{2} = \frac{7a+b}{2}. \quad (2)$$

$$\sqrt{4b(3b+a)} \le \frac{4b+(3b+a)}{2} = \frac{7b+a}{2}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra: $\sqrt{4a(3a+b)}+\sqrt{4b(3b+a)} \le 4a+4b$. (4)

Từ (1) và (4) suy ra:

$$\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}} \geq \frac{2(a+b)}{4a+4b} = \frac{1}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b.

Đề số 4

Bài 1. a) Điều kiện : $x \geq 0; x \neq 1$; $P = x - \sqrt{x}$.

b) $x = 13 - 4\sqrt{3} = \left(2\sqrt{3}-1\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2\sqrt{3}-1$. Do đó $P = 14 - 6\sqrt{3}$.

c) $P = x - \sqrt{x} = x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$.

Do đó min $P = -\frac{1}{4}$ khi $x = \frac{1}{4}$.

Bài 2. Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h).

Gọi vận tốc của dòng nước là y (km/h) ($x > y > 0$).

Dẫn tới hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(x+y)+3(x-y)=195 \\ 3(x+y)+2(x-y)=205 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 5. \end{cases}$$

Bài 3. a) Khi m = 3 ta giải phương trình $4x^2 - 4x + 1 = 0$ được $x_{1,2} = \frac{1}{2}$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ (m-1)^2 - (m+1)(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < 3 \end{cases} \quad (*)$$

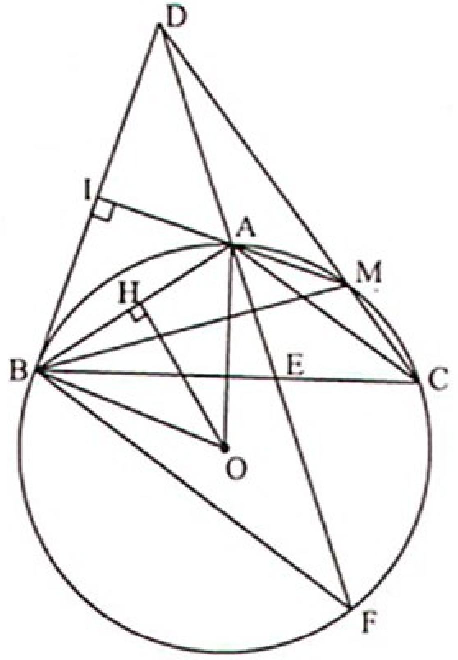
c) Theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1}$; $\quad x_1x_2 = \frac{m-2}{m+1}$.

Do đó $4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2 \Leftrightarrow \frac{8(m-1)}{m+1} = \frac{7(m-2)}{m+1} \Leftrightarrow m = -6$ (thỏa mãn (*)).

Bài 4. (h.76) a) Tứ giác ABCM nội tiếp đường tròn(O)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AMD}$ (cùng bù với $\widehat{AMC}$).

Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$ (góc nội tiếp).



Hình 76

Theo giả thiết $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{AMB}$ hay MA là tia phân giác của $\widehat{BMD}$.

b) ΔBMD có MI là đường phân giác, đồng thời là đường cao nên ΔBMD cân tại M, suy ra MI là đường trung trực của BD $\Rightarrow$ AB = AD.

Mặt khác, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow AB = AC$

$\Rightarrow AB = AC = AD \Rightarrow$ A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Xét đường tròn (A; AB) có $\widehat{BDC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (không đổi)

$\Rightarrow \widehat{BDC}$ có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

c) Xét đường tròn (O) có $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AFB}\ (= \widehat{ACB})$.

Dựa vào nhận xét của chuyên đề 12, bạn có thể chứng minh được AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBEF.

d) Ta có $\Delta ABE \backsim \Delta AFB$ (g.g) $\Rightarrow AB^2 = AE.AF$.

Kẻ $OH \perp AB \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{BOH} = \alpha$ và $AB = 2.BH$.

Mặt khác, $BH = OB.\sin\widehat{BOH} = R.\sin\alpha$

$\Rightarrow AB = 2R.\sin\alpha \Rightarrow AE.AF = AB^2 = 4R^2.\sin^2\alpha$.

Bài 5. Phương trình hoành độ giao điểm là $-x^2 = m \Leftrightarrow x^2 = -m$.

Điều kiện để y = m cắt (P) tại hai điểm A; B phân biệt là $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó $A(-\sqrt{-m}; m)$, $B(\sqrt{-m}; m)$. Vì A, B đối xứng nhau qua trục tung suy ra OA = OB.

ΔOAB đều $\Leftrightarrow OB = AB \Leftrightarrow \sqrt{-m + m^2} = 2\sqrt{-m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -3. \end{array}\right.$

Với m = – 3 thỏa mãn điều kiện, thì ΔOAB đều.

Khi đó $AB = 2\sqrt{3}$ và diện tích ΔOAB là $S = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$ (đvdt).

Đề số 5

Bài 1. Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 4$; $P = \dfrac{x^2 - 9}{x - 4}$.

a) $P < 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+3)(x-3)}{x-4} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x-4} < 0$ (vì $x \geq 0$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 > 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4$.

Không có giá trị nguyên nào của x để $P < 0$.

b) $P.(x-4) + 4y^2 - 4xy + 9 + |2x - y - 3| = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + |2x - y - 3| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

Bài 2. Gọi năng suất dự kiến theo kế hoạch là x (sản phẩm/ngày) (x nguyên dương). Dẫn tới phương trình :

$$\frac{2160}{x} - \frac{2160}{x+8} = 3.$$

Tìm được $x_1 = -80$ (loại) ; $x_2 = 72$ (thỏa mãn điều kiện).

Bài 3.

a) $\Delta = [-(3m-1)]^2 - 4(2m^2 - m) = (m-1)^2 \geq 0$.

b) Theo hệ thức Vi-ét ta có :

$x_1 + x_2 = 3m - 1 ; x_1x_2 = 2m^2 - m$.

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (3m-1)^2 - 2(2m^2 - m) = 5m^2 - 4m + 1$.

Do đó $x_1^2 + x_2^2 = 2 \Leftrightarrow 5m^2 - 4m + 1 = 2 \Leftrightarrow 5m^2 - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1; m_2 = -\dfrac{1}{5}$.

c) Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 5m^2 - 4m + 1 = 5\left(m - \dfrac{2}{5}\right)^2 + \dfrac{1}{5} \geq \dfrac{1}{5}$.

Suy ra $\min\left(x_1^2 + x_2^2\right) = \dfrac{1}{5}$ khi $m = \dfrac{2}{5}$.

Bài 4. (h.77) a) $\widehat{MCN} = 90^0; \widehat{MDN} = 90^0$ nên tứ giác CMDN nội tiếp đường tròn đường kính MN.

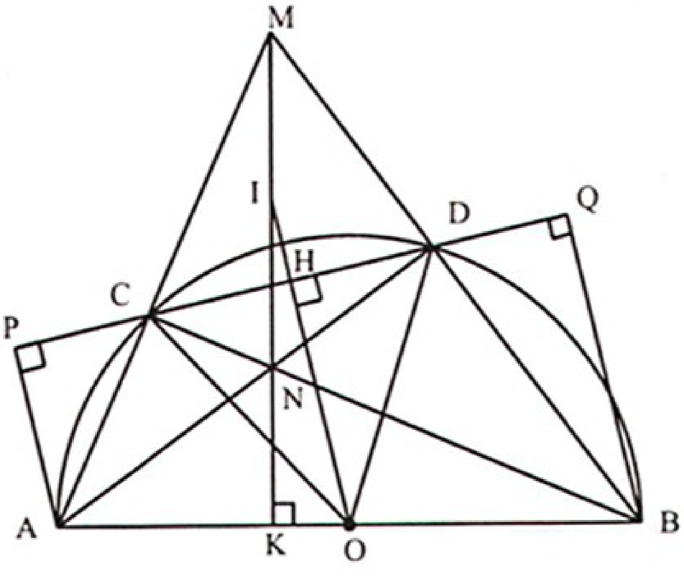
b) Kẻ AP và BQ vuông góc với đường thẳng CD.

$\Rightarrow$ Tứ giác APQB là hình thang vuông có OH là đường trung bình $\Rightarrow AP + BQ = 2OH$;

ΔOCD đều có OH là đường cao nên

$OH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ không đổi

$\Rightarrow AP + BQ = R\sqrt{3}$ không đổi.



Hình 77

c) Ta có OC = OD (bán kính),

$HC = HD, IC = ID = \dfrac{1}{2}MN$

$\Rightarrow$ O, H, I cùng thuộc đường trung trực của CD nên O, H, I thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{COD} = 60^0 \Rightarrow \text{Sđ}\,\overset{\frown}{CD} = 60^0 \Rightarrow \widehat{AMB} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{CD}}{2} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{CMD} = 60^0 \Rightarrow \widehat{CID} = 2\widehat{CMD} = 120^0 \Rightarrow \widehat{CIH} = \widehat{DIH} = 60^0$.

Trong ΔDIH vuông có $DH = DI.\sin\widehat{DIH} \Rightarrow DI = \dfrac{R}{2} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

a) $\Delta MCD \backsim \Delta MBA$(g.g) nên $\dfrac{S_{MCD}}{S_{MAB}} = \left(\dfrac{MD}{MA}\right)^2 = \left(\sin 30^0\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow S_{MCD} = \dfrac{1}{4}.S_{MBA}$.

S_{MCD} lớn nhất khi S_{MBA} lớn nhất.

Kẻ MN kéo dài cắt AB tại K $\Rightarrow S_{MBA} = \dfrac{1}{2}AB.MK$.

Mà M chạy trên cung chứa góc 60^0 dựng trên AB nên MK lớn nhất khi M là điểm chính giữa cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn AB.

Khi đó ΔMAB đều $\Rightarrow MK = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{MBA} = R^2\sqrt{3} \Rightarrow S_{MCD} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy: Giá trị lớn nhất của diện tích ΔMCD là $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$, khi ΔMAB đều $\Leftrightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BD}$.

Bài 5. Từ $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 2xy = (x + y)^2 - 4 = (x + y + 2)(x + y - 2)$.

Vì $x + y + 2 \neq 0$ nên $\dfrac{xy}{x+y+2} = \dfrac{x+y}{2} - 1$. (1)

Áp dụng bất đẳng thức $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, ta có:

$x + y \leq \sqrt{2\left(x^2 + y^2\right)} \Rightarrow x + y \leq 2\sqrt{2}$. (2)

Từ (1), (2) ta được: $\dfrac{xy}{x+y+2} \leq \sqrt{2} - 1$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x = y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2}$.

Vậy $\max A = \sqrt{2} - 1$.

Đề số 6

Bài 1. a) Điều kiện: $x > 0; x \neq 4$; $P = \dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$.

b) $P > 2 \Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}} - 2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} > 0$.

Bất đẳng thức cuối đúng vì $x > 0$. Vậy $P > 2$.

c) $P\sqrt{x} = m \Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = m \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+1\right)^2 = m$ $(m > 0)$ suy ra $\sqrt{x} = \sqrt{m} - 1$.

Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x} > 0$, do đó $\sqrt{m} - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Vì $x \neq 4$ nên $\sqrt{x} \neq 2$, do đó $\sqrt{m} - 1 \neq 2 \Leftrightarrow m \neq 9$.

Vậy nếu $m > 1$ và $m \neq 9$ thì tồn tại x để $P\sqrt{x} = m$.

Bài 2. a) Nếu $m = 0$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2. \end{cases}$

Nếu $m \neq 0$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất, vì $\frac{m}{1} \neq \frac{-1}{m} \Leftrightarrow m^2 \neq -1$.

Tóm lại, với mọi giá trị của m thì hệ phương trình đã cho đều có nghiệm.

b) Khi $m = 2$ ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,8 \\ y = 1,6. \end{cases}$$

c) Rút x từ phương trình (2): $x = 5 - my$.

Thế vào (1) ta được: $m(5 - my) - y = 2 \Rightarrow y = \frac{5m - 2}{m^2 + 1}$.

Suy ra $x = \frac{2m + 5}{m^2 + 1}$.

Ta có $x + y = 5 \Leftrightarrow \frac{2m + 5}{m^2 + 1} + \frac{5m - 2}{m^2 + 1} = 5 \Leftrightarrow 5m^2 - 7m + 2 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1; m_2 = \frac{2}{5}$.

Bài 3. a) Xem hình 78.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là :

$\frac{1}{2}x^2 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$, có nghiệm là $x_1 = 4$; $x_2 = -2$.

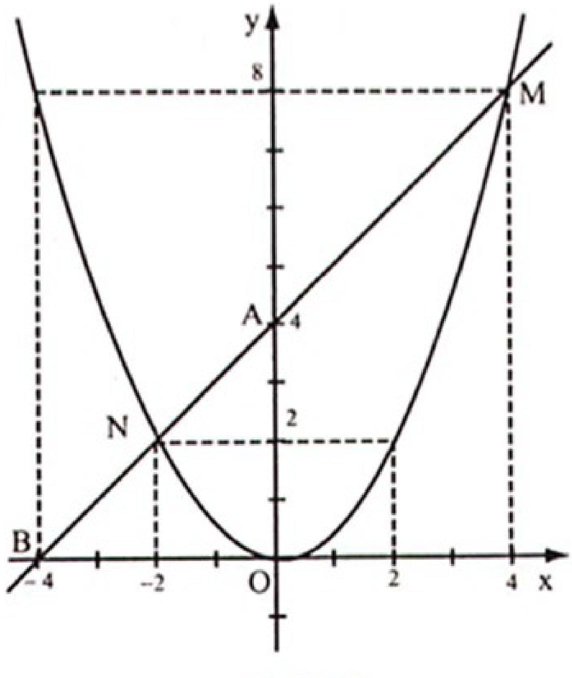
Suy ra $y_1 = 8$; $y_2 = 2$.

Do đó tọa độ hai giao điểm của (P) và (d) là M(4;8) ; N(−2; 2).

c) ΔAOB vuông cân vì có $OA = OB = 4$.

Suy ra $\widehat{ABO} = 45^0$.

Vậy $\alpha = 45^0$.



Hình 78

Bài 4. (h.79) a) $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CBD}$.

ΔABE có BD là đường phân giác đồng thời là đường cao $\Rightarrow \Delta ABE$ cân.

b) $AC = FC$, $BE \perp AF$

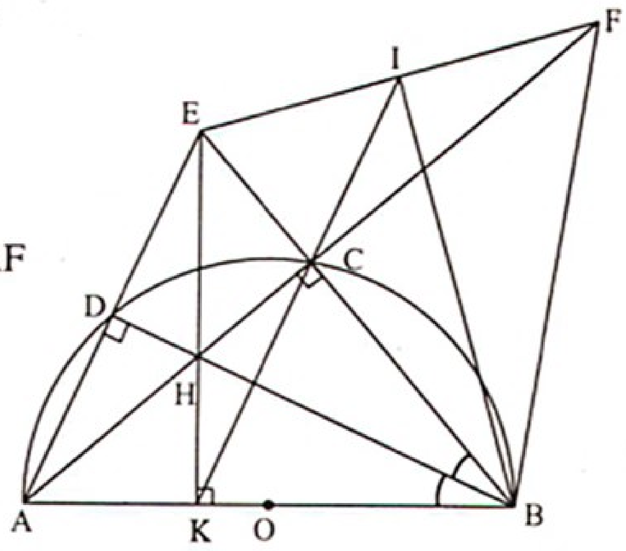
$\Rightarrow$ BE là đường trung trực của đoạn thẳng AF

$\Rightarrow EF = EA \Rightarrow \Delta AEF$ cân tại E, suy ra

$\widehat{EFA} = \widehat{EAF}$. Mặt khác, ta có

$\widehat{EAF} = \widehat{CBD}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$\Rightarrow \widehat{EFA} = \widehat{CBD}$ hay $\widehat{EFA} = \widehat{EBD}$.



Hình 79

c) ΔEFA cân tại E $\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{FEC}$. (1)

Ta có $\widehat{EDH} = \widehat{ECH} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác EDHC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{CHB}$. (2)

Ta có $\widehat{BCH} = \widehat{BKH} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác BCHK nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CHB} = \widehat{CKB}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{IEB} = \widehat{IKB}$ Vậy tứ giác EIBK nội tiếp đường tròn.

d) Tứ giác EIBK nội tiếp có $\widehat{EKB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{EIB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{EFC} = \widehat{EBI}$ (cùng phụ với $\widehat{FEB}$).

Mà $\widehat{EFC} = \widehat{CBH}$ (câu b) $\Rightarrow \widehat{CBH} = \widehat{EBI}$

$\Rightarrow \Delta CBH \backsim \Delta IBE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EI}{BI} = \dfrac{CH}{BC}$. (1)

ΔBAF cân tại B $\Rightarrow \widehat{BFC} = \widehat{BAC}$.

Mà $\widehat{BAC} = \widehat{BEK}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) $\Rightarrow \Delta KEB \backsim \Delta CFB$(g.g) $\Rightarrow \dfrac{EK}{BK} = \dfrac{CF}{BC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{EI}{BI} + \dfrac{EK}{BK} = \dfrac{CH}{BC} + \dfrac{CF}{BC} = \dfrac{HF}{BC}$.

Bài 5. Điều kiện: $x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ (1).

Đặt $a = \sqrt{x+1}$; $b = \sqrt{x^2 - x + 1}$, $(a \geq 0; b > 0)$ (2) $\Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + 2$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $10.ab = 3.(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a - 3b)(3a - b) = 0$

$\Leftrightarrow$ a = 3b hoặc b = 3a.

- Nếu a = 3b thì từ (2) suy ra: $\sqrt{x+1} = 3\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow 9x^2 - 10x + 8 = 0$ (vô nghiệm).
- Nếu b = 3a thì từ (2) suy ra:

$$3\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow 9x+9 = x^2-x+1 \Leftrightarrow x^2-10x-8=0.$$

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 5+\sqrt{33}$; $x_2 = 5-\sqrt{33}$ (thỏa mãn (1)).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 5+\sqrt{33}$ và $x_2 = 5-\sqrt{33}$.

Nhận xét. Phương trình đã cho đưa về dạng tổng quát sau:

$$\alpha.P(x) + \beta.Q(x) + \gamma.\sqrt{P(x)Q(x)} = 0$$

($\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$). Để giải phương trình này, có hai hướng giải:

Cách 1. Đặt $a = \sqrt{P(x)}$, $b = \sqrt{Q(x)}$, phương trình có dạng

$$\alpha.a^2 + \beta.b^2 + \gamma\ ab = 0,$$

sau đó phân tích đa thức thành nhân tử.

Cách 2. Đặt $\sqrt{P(x)} = t.\sqrt{Q(x)}$, phương trình có dạng $\alpha.t^2 + \beta + \gamma.t = 0$, sau đó tìm t.

Đề số 7

Bài I.

1. Thay x = 36 vào biểu thức A. Tính được: $A = \frac{5}{4}$.

2. Kết quả rút gọn $B = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$.

3. Rút gọn, ta được $B(A-1) = \frac{2}{x-16}$.

B(A – 1) là số nguyên $\Leftrightarrow$ x– 16 là ước của 2. Lập luận suy ra được: x nhận các giá trị 17; 15; 18; 14.

Bài II. Gọi thời gian để người thứ nhất làm một mình xong công việc là x (giờ, x > 0). Suy ra thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là x + 2 (giờ).

Lập luận đi đến phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{5}{12}$.

Giải phương trình, ta được: $x_1 = 4$ (thoả mãn) $x_2 = -\frac{6}{5}$ (không thỏa mãn).

Vậy người thứ nhất làm một mình xong công việc trong 4 giờ, người thứ hai làm một mình xong công việc trong 6 giờ.

Bài III.

1. Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$. Đặt $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$. Ta có hệ: $\begin{cases} 2u + v = 2 \\ 6u - 2v = 1 \end{cases}$.

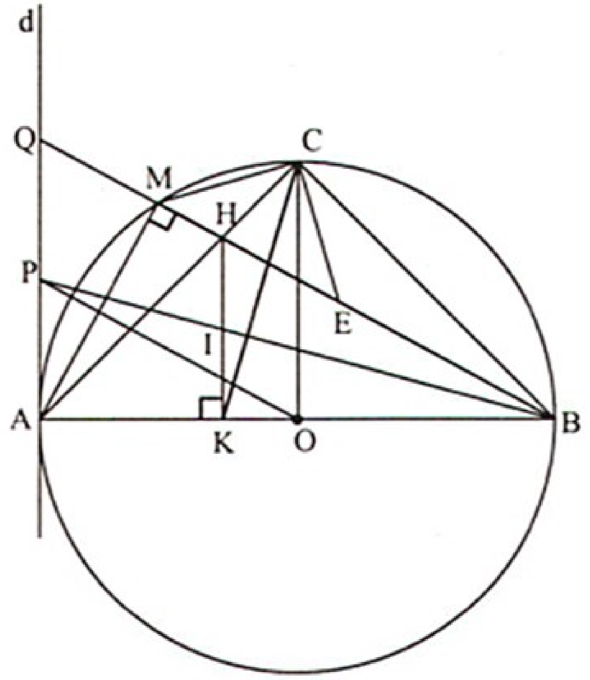
Giải ra ta được: $\begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = 1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ là nghiệm của hệ phương trình.

2. Ta có : $\Delta = 4m^2 + 1 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m. Theo định lí Vi-ét:

$$x_1^2 + x_2^2 = 7 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1.x_2 = 7 \Leftrightarrow (4m-1)^2 - 2\left(3m^2 - 2m\right) = 7.$$

Giải ra ta được: $m_1 = 1, m_2 = -\frac{3}{5}$. Vậy có hai giá trị m thỏa mãn điều kiện đề bài:

$m_1 = 1, m_2 = -\frac{3}{5}$.



Hình 80

Bài IV. (h.80)

1. $\widehat{ACB} = 90^0$, $\widehat{HKB} = 90^0$ $\Rightarrow$ tứ giác CBKH nội tiếp đường tròn đường kính BH.

2. $\widehat{MCA} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp chắn cung AM), $\widehat{ACK} = \widehat{MBA}$ (tứ giác CBKH nội tiếp). Suy ra $\widehat{MCA} = \widehat{ACK}$.

3. $\Delta MAC = \Delta EBC$ (c.g.c) $\Rightarrow$ MC = CE, mà $\widehat{CME} = 45^0$ suy ra ΔECM vuông cân tại C.

4. Từ $\frac{AP.MB}{MA} = R \Rightarrow \frac{AP}{MA} = \frac{OA}{MB}$, mà $\widehat{PAO} = \widehat{AMB} = 90^0 \Rightarrow \Delta PAO \backsim \Delta AMB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{POA} = \widehat{ABM} \Rightarrow PO // MB$.

Gọi Q là giao điểm của BM và d. Vì O là trung điểm của AB nên P là trung điểm của AQ.

Gọi I là giao điểm HK và BP. Theo định lí Ta-lét, ta có: $\frac{HI}{PQ} = \frac{IK}{AP}\left(= \frac{BI}{BP}\right)$, mà PQ = AP nên HI = IK. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài V. Ta có : $M = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{3x}{4y} + \left(\frac{x}{4y} + \frac{y}{x}\right)$.

Mà $x \geq 2y \Rightarrow \frac{3x}{4y} \geq \frac{3}{2}$; $\frac{x}{4y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{4y}.\frac{y}{x}} = 1 \Rightarrow M \geq \frac{5}{2}$. Khi $x = 2y$ thì $M = \frac{5}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của M là $\frac{5}{2}$ khi $x = 2y > 0$.

Đề số 8

Câu 1. Đáp án

a) Kết quả: $x_1 = -1; x_2 = \frac{3}{2}$.

b) Kết quả: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases}$

c) Kết quả: $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$.

d) Kết quả: $x_1 = \sqrt{2} - 3$; $x_2 = \sqrt{2} + 3$.

Câu 2.

a) Bạn đọc tự vẽ đồ thị.

b) Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Giải ra ta được: $x_1 = 2$; $x_2 = -4$. Từ đó ta tính được: $y_1 = 1$; $y_2 = 4$.

Vậy tọa độ của các giao điểm là A(2; 1), B(–4; 4).

Câu 3. Ta có $A = \dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)} + \dfrac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} - \dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$

$$= \frac{\sqrt{x}-1+2x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{2x-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Ta có: $B = \left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^3} - \left(2+\sqrt{3}\right).\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^3}$

$\Rightarrow B = \left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right).\sqrt{2+\sqrt{3}} - \left(2+\sqrt{3}\right).\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$= \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \sqrt{2}B = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3}+1\right) - \left(\sqrt{3}-1\right) = 2$

$\Rightarrow B = \sqrt{2}$.

Câu 4. a) Ta có $\Delta = \left(2m-1\right)^2 + 7 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m-2. \end{cases}$

Ta có $M = \dfrac{-24}{\left(x_1+x_2\right)^2 - 8x_1x_2} = \dfrac{-24}{4m^2 - 8\left(m-2\right)} = \dfrac{-6}{m^2-2m+4}$

$M = \dfrac{-6}{\left(m-1\right)^2+3} \geq -2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là -2 khi $m = 1$.

Câu 5. (h.81) a) Ta có $\Delta MAE \backsim \Delta MFB$ (g.g) nên

$\dfrac{MA}{ME} = \dfrac{MF}{MB} \Rightarrow MA.MB = ME.MF$.

b) $\Delta MCA \backsim \Delta MBC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MC}{MA} = \dfrac{MB}{MC} \Rightarrow MC^2 = MA.MB$.

ΔMCO vuông tại C có $CH \perp MO$ nên $MC^2 = MH.MO$.

Suy ra $MA.MB = MH.MO$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MH} = \dfrac{MO}{MB}$, mà $\widehat{BMF}$ chung

$\Rightarrow \Delta MHA \backsim \Delta MBO$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MHA} = \widehat{MBO}$

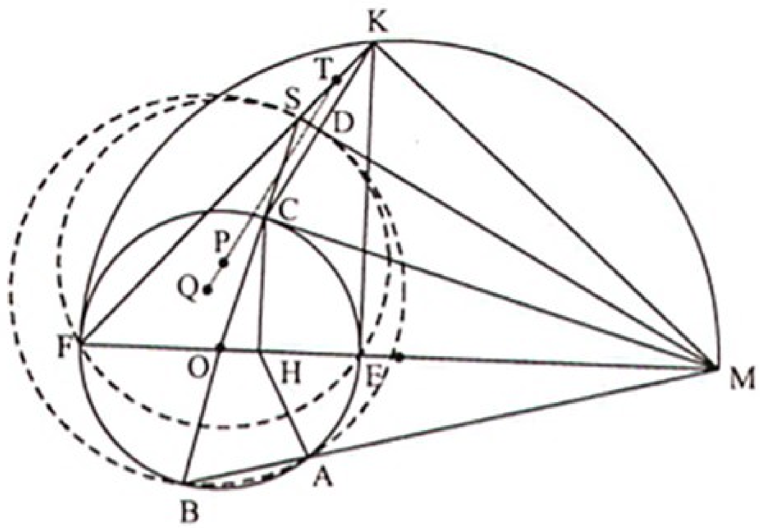
$\Rightarrow$Tứ giác AHOB nội tiếp.

c) ΔMKF vuông tại K có $KE \perp MF$

$\Rightarrow MK^2 = ME.MF$,

mà $MC^2 = MA.MB = ME.MF$

$\Rightarrow MK = MC$.



Hình 81

ΔMCS và ΔMKS có $\widehat{MCS} = \widehat{MKS} = 90^0$, MS chung, MC = MK

$\Rightarrow \Delta MCS = \Delta MKS \Rightarrow SC = SK \Rightarrow$ MS là đường trung trực của CK $\Rightarrow MS \perp KC$.

d) Giả sử MS vuông góc với KC tại D.

Vì $ME.MF = MA.MB = MS.MD$ ($= MC^2$) nên các đường tròn (P), (Q) đi qua D.

Suy ra $PQ \perp MS$ và PQ là đường trung trực của SD (đường nối tâm của hai đường tròn) nên PQ cũng đi qua trung điểm của KS (định lí đường trung bình của ΔSKD). Vậy ba điểm T, Q, P thẳng hàng.

Đề số 9

Câu 1.

a) Ta có : $P = \sqrt{a-b}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} + \dfrac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}\right) \cdot \dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} = \dfrac{a^2+b^2}{b}$.

b) Từ a = b + 1, áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$P = \frac{(b+1)^2+b^2}{b} = 2b + \frac{1}{b} + 2 \geq 2\sqrt{2b \cdot \frac{1}{b}} + 2 = 2\sqrt{2}+1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $2\sqrt{2}+1$ khi $a = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}; b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 2. Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h), vận tốc của ô tô là y (km/h) (x > 0, y > 0).

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{9y}{4} + 4x = 210 \\ \dfrac{9y}{4x} = \dfrac{4x}{y} \end{cases}$

Giải ra ta được : $\begin{cases} x = 30 \\ y = 40 \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy vận tốc của xe máy là 30 km/h, vận tốc của ô tô là 40 km/h.

Câu 3. Số giao điểm của (d) và (P) là số nghiệm của phương trình: $-x^2 = mx - m - 2$ $\Leftrightarrow x^2 + mx - m - 2 = 0$. Ta có $\Delta = (m + 2)^2 + 4 > 0$ với mọi m.

Ta suy ra điều phải chứng minh.

Theo định lí Vi-ét, ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = -(m+2) \end{cases}$.

Vì vậy $|x_1 - x_2| = \sqrt{20} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 20 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0$

$\Leftrightarrow m = 2$ hoặc $m = -6$.

Câu 4. (h.82)

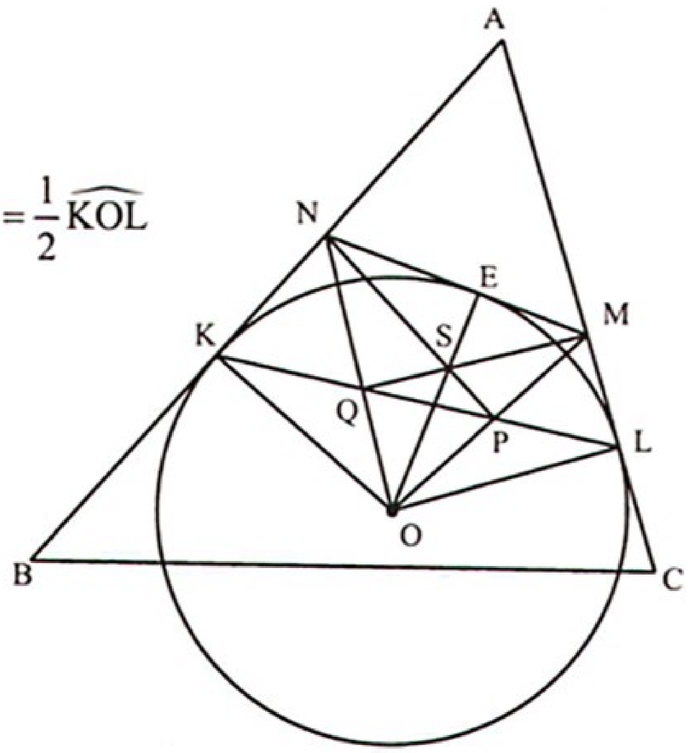
a) Do tứ giác AKOL nội tiếp nên

$$\widehat{MON} = \widehat{MOE} + \widehat{EON} = \frac{1}{2}\widehat{EOL} + \frac{1}{2}\widehat{EOL} = \frac{1}{2}\widehat{KOL}$$

$$= \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{BAC}\right) = 90^0 - \frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

b) Tam giác KAL cân tại A nên $\widehat{QLM} = 90^0 - \frac{\widehat{BAC}}{2} \Rightarrow \widehat{QLM} = \widehat{QOM}$.

Vậy tứ giác MLOQ nội tiếp, suy ra $\widehat{MQO} = 90^0 \Rightarrow MQ \perp NO$. Tương tự ta có $NP \perp MO$, mà $OE \perp MN$ suy ra MQ, NP và OE cùng đi qua một điểm.



Hình 82

c) Từ $\Delta MPL \backsim \Delta QNK$ (g.g) $\Rightarrow \frac{ML}{PL} = \frac{KQ}{NK} \Rightarrow KQ.PL = ML.NK = ME.EN$.

Câu 5. Từ giả thiết suy ra $x > y > 0$ và áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$(x+y)^2 = xy(x-y)^2 = \frac{1}{4}.4xy\left[(x+y)^2 - 4xy\right]$$

$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{4xy + (x+y)^2 - 4xy}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}(x+y)^4.$$

Suy ra x + y ≥ 4. Từ đó giá trị nhỏ nhất của P là 4 khi $x = 2+\sqrt{2}; y = 2-\sqrt{2}.$

Đề số 10

Câu 1:

1) a) Đặt $y = x^2, y \geq 0$. Phương trình trở thành $y^2 - y - 20 = 0$. Tìm được $y = 5$.

Từ đó $x \in \left\{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\right\}$.

b) $\sqrt{x+1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = (x-1)^2 \\ x \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

2) Từ (2) suy ra $y = |x| + 3$. Do đó $y \geq 3$ nên $|y-3| = y - 3$.

Trừ theo vế của (1) cho (2) ta được

$$\begin{cases} |x| = \dfrac{1}{2} \\ y = |x| + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Câu 2: 1) $9 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 3 \Rightarrow m = \pm 3$.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) với (P) là

$$x^2 = mx \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = m.$$

Từ đó có tọa độ hai giao điểm là A (0 ; 0), B $(m; m^2)$ với $m \neq 0$.

Ta có $AB = \sqrt{6} \Leftrightarrow m^2 + m^4 = 6 \Leftrightarrow m^2 = 2$. Vậy $m = \pm\sqrt{2}$.

Câu 3:

1) $P = \dfrac{2+\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} \cdot \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4-3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 2$.

2) Ta có:

$a^5 + b^5 - a^3b^2 - a^2b^3 = \left(a^2 - b^2\right)\left(a^3 - b^3\right) = (a+b)(a-b)^2\left(a^2 + ab + b^2\right) \geq 0$

(vì $a + b \geq 0$ (giả thiết), $(a-b)^2 \geq 0$ và $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$).

Vậy $a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + a^2b^3$.

Câu 4. (h.83)

1) Vì $\widehat{ADE} = \widehat{AHE} = \widehat{ACB}$ nên tứ giác BDEC nội tiếp.

2) Vì $\widehat{DAE} = 90^0$ nên DE là một đường kính của đường tròn(O).Vậy D, O, E thẳng hàng.

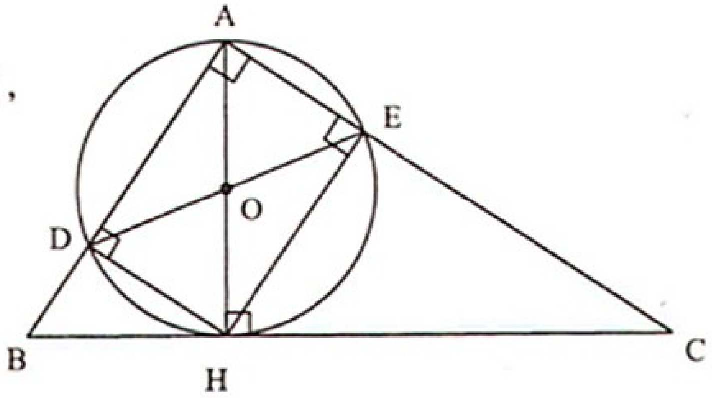
3) Ta có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4(cm)$,

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 6\left(cm^2\right)$ và

$AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{3.4}{5} = \frac{12}{5}(cm)$.

Vì $\Delta AED \backsim \Delta ABC$ nên

$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \left(\frac{ED}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AH}{BC}\right)^2 = \left(\frac{12}{25}\right)^2$



Hình 83

$\Rightarrow S_{AED} = \left(\frac{12}{25}\right)^2 S_{ABC} = \frac{144}{625}.6 = \frac{864}{625}\left(cm^2\right)$.

Vậy $S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} = 6 - \frac{864}{625} = \frac{2886}{625}\left(cm^2\right)$.

MỤC LỤC